

ZÁKLADNÍ POZNATKY Z MATEMATIKY

Gymnázium Jiřího Wolкера v Prostějově
Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia
Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve
vyučování matematiky na gymnáziu



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Číselné obory 1.....	7
Přirozená čísla	7
Celá čísla	9
Racionální čísla	10
Reálná čísla	12
Číselná osa.....	14
Číselné obory 1.....	15
Varianta A	15
Číselné obory 1.....	17
Varianta B	17
Číselné obory 1.....	19
Varianta C	19
Číselné obory 2.....	21
Druhá odmocnina	21
Třetí odmocnina	22
Absolutní hodnota reálného čísla	23
Číselné obory 2.....	24
Varianta A	24
Číselné obory 2.....	26
Varianta B	26
Číselné obory 2.....	28
Varianta C	28
Pravoúhlý trojúhelník.....	30
Pythagorova věta	30
Goniometrické funkce pravého úhlu	31
Pravoúhlý trojúhelník.....	33

Varianta A	33
Pravoúhlý trojúhelník	35
Varianta B	35
Pravoúhlý trojúhelník	37
Varianta C	37
Mocniny s přirozeným mocnitelem	39
Mocniny s celým mocnitelem	41
Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem	42
Varianta A	42
Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem	44
Varianta B	44
Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem	46
Varianta C	46
Základní množinové pojmy	48
Intervaly	51
Zobrazení	52
Množiny a zobrazení	53
Varianta A	53
Množiny a zobrazení	55
Varianta B	55
Množiny a zobrazení	57
Varianta C	57
Výrazy	59
Mnohočleny	60
Mnohočleny	62
Varianta A	62
Mnohočleny	64

Varianta B	64
Mnohočleny.....	66
Varianta C	66
Lomené výrazy.....	68
Krácení a rozšiřování lomených výrazů.....	68
Sčítání a násobení lomených výrazů	69
Dělení lomených výrazů.....	70
Složený lomený výraz	71
Lomené výrazy	72
Varianta A	72
Lomené výrazy	74
Varianta B	74
Lomené výrazy	77
Varianta C	77
Elementární teorie čísel.....	80
Zápisy přirozených čísel, násobek a dělitel čísla	80
Znaky dělitelnosti	82
Prvočísla a čísla složená	84
Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek.....	85
Elementární teorie čísel.....	86
Varianta A	86
Elementární teorie čísel.....	88
Varianta B	88
Elementární teorie čísel.....	90
Varianta C	90
Výroky.....	92
Výrok a jeho negace.....	92

Složené výroky	94
Důkazy matematických vět	97
Výroky	98
Varianta A	98
Výroky	100
Varianta B	100
Výroky	102
Varianta C	102

Číselné obory 1

Přirozená čísla

Slouží k vyjádření počtu, označení- N , $N = \{1,2,3,4, \dots\}$

Pro každá tři přirozená čísla a, b, c platí:

- 1.) Součet $a + b$ je přirozené číslo (U)
Součin $a \cdot b$ je přirozené číslo
- 2.) $a + b = b + a$ (K)
 $a \cdot b = b \cdot a$
- 3.) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (A)
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 4.) $1 \cdot a = a$ (N)
- 5.) $a(b + c) = ab + ac$ (D)

Všimněte si nápadné obdoby vlastností sčítání a násobení zapsaných v prvních šesti řádcích.

Označení v posledním sloupci znamená:

(U)... věty o uzavřenosti oboru vzhledem ke sčítání a násobení (součtem a stejně tak součinem libovolných přirozených čísel je vždy přirozené číslo)

(K)... věty o komutativnosti sčítání a násobení (pořadí sčítanců při součtu, resp. pořadí činitelů při násobení můžeme zaměnit)

(A)... věty o asociativnosti sčítání a násobení (sčítance při součtu, resp. činitele při násobení můžeme libovolně sdružovat)

(N)... věta o neutrálnosti čísla 1 vzhledem k násobení (číslo 1 je neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení přirozených čísel)

(D)... věta o distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání (násobíme-li číslem součet dvou nebo více čísel, vynásobíme tímto číslem každého sčítance)

Rozdíl $a - b$ dvou přirozených čísel a, b je to přirozené číslo x , pro které platí $a = b + x$.

Podíl $a : b$ dvou přirozených čísel a, b je to přirozené číslo x , pro které platí $a = b \cdot x$.

Mocnina a^b dvou přirozených čísel a, b je to přirozené číslo, které je součinem b činitelů rovnajících se číslu a .

Celá čísla

Vyjadřují změny počtů (přírůstky, úbytky). Označení- \mathbf{Z} , $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Pro každá tři celá čísla a, b, c platí:

1.) Součet $a + b$ je celé číslo (U)

Součin $a \cdot b$ je celé číslo

2.) $a + b = b + a$ (K)

$a \cdot b = b \cdot a$

3.) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (A)

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

4.) $0 + a = a$ (N)

$1 \cdot a = a$

5.) $a(b + c) = ab + ac$ (D)

Ke každému celému číslu a existuje takové celé číslo $(-a)$, že platí $a + (-a) = 0$. Čísla a a $(-a)$ se nazývají **čísla navzájem opačná**. Opačné číslo ke kladnému číslu je číslo záporné. Opačné číslo k zápornému číslu je číslo kladné. Opačné číslo k číslu nula je číslo nula.

Při počítání s opačnými čísly postupujeme podle těchto pravidel:

$0 - a = -a$	$-(-a) = a$	$(-1) \cdot a = -a$
$-(a + b) = -a - b$	$(-a) \cdot (-b) = ab$	$a - (-b) = a + b$
$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$	$a \cdot (-b) = -ab$	$a + (-b) = a - b$

0... neutrální prvek vzhledem k operaci sčítání

1... neutrální prvek vzhledem k operaci násobení

Racionální čísla

Používají se k vyjádření dílů, částí. Označení \mathbf{Q} , $\mathbf{Q} = \left\{ \dots \frac{1}{2}; -0, \bar{3}; 2,1; \dots \right\}$. Jsou to všechna čísla, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je číslo celé a q je číslo přirozené.

Zlomek $\frac{p}{q}$ je v **základním tvaru**, pokud p, q jsou nesoudělná čísla.

Pro každá tři racionální čísla a, b, c platí:

- 1.) Součet $a + b$ je racionální číslo
Součin $a \cdot b$ je racionální číslo
- 2.) Rozdíl $a - b$ je racionální číslo **(U)**
Podíl $a : b$, kde $b \neq 0$, je racionální číslo
- 3.) $a + b = b + a$ **(K)**
 $a \cdot b = b \cdot a$
- 4.) $a + (b + c) = (a + b) + c$ **(A)**
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- 5.) $0 + a = a$ **(N)**
 $1 \cdot a = a$
- 6.) $a(b + c) = ab + ac$ **(D)**

Obor racionálních čísel je uzavřený vzhledem ke sčítání, odčítání, násobení a dělení (s výjimkou dělení nulou).

Racionální čísla zapsaná zlomky $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ v základním tvaru porovnáваме na základě

srovnání součinů ps, qr :

$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, právě když $ps < qr$,

$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, právě když $ps = qr$,

$\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, právě když $ps > qr$.

Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ platí:

$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$	$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - rq}{qs}$
$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$	$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}, \text{ kde } r \neq 0$

Racionální čísla můžeme zapisovat ve tvaru

- Zlomku
- Desetinného čísla
- Nekonečného periodického desetinného rozvoje s vyznačenou periodou

Desetinným číslem se rozumí racionální číslo, které lze zapsat zlomkem $\frac{c}{10^n}$, kde c je celé číslo a n je přirozené číslo. Je to tedy *číslo s konečným desetinným rozvojem*.

Periodická čísla:

$$\frac{10}{33} = 0,303030 \dots = 0,\overline{30} \quad 30 \text{ perioda}$$

$$\frac{15}{22} = 0,6818181 \dots = 0,6\overline{81} \quad 6 \text{ předperioda; } 81 \text{ perioda}$$

Smíšené číslo je zápis pro čísla větší než 1 např. $1\frac{2}{3}$ (jedna celá a dvě třetiny), $5\frac{3}{7}, \dots$

Reálná čísla

Reálnými čísly nazýváme čísla, která jsou velikostmi úseček (při zvolené jednotkové úsečce), čísla k nim opačná a nulu.

Každé reálné číslo je na **číselné ose** znázorněno právě jedním bodem.

Každý bod **číselné osy** je obrazem právě jednoho reálného čísla.

Označení- R ; $R = Q \cup I$

I ... iracionální čísla

Iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p je číslo *celé* a q je číslo *přirozené*. Lze je charakterizovat typickou vlastností jejich zápisu v desítkové soustavě.

Iracionální čísla lze zapsat jenom takovým desetinným rozvojem, který je nekonečný a neperiodický.

Zaokrouhlování čísel:

Číslo zaokrouhlíme na místo daného řádu tak, že vynecháme všechny číslice, které jsou vpravo od číslice na místě daného řádu, a je-li první z vynechaných číslic

- a) *menší než 5*, pak všechny ponechané číslice se nemění,
- b) *rovna nebo větší než 5*, pak číslu tvořenému ponechanými číslicemi přičteme jednu jednotku nejmenšího ponechaného řádu.

Čísla zaokrouhlujeme na *místa určitého řádu* nebo na *dany počet platných číslic*.

Platné číslice daného reálného čísla jsou všechny číslice v zápisu tohoto čísla od první nenulové číslice zleva až po poslední zapsanou číslici vpravo. Např. čísla:

356; 700; 25,0; 1,23; 0,0562 mají tři platné číslice

28; 30; 8,4; 0,25; 0,00036 mají dvě platné číslice

3; 0,5; 0,007; 0,000008 mají jednu platnou číslici.

Pro každá tři reálná čísla a, b, c platí:

Jestliže $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a > c$.

Jestliže $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac > bc$.

Jestliže $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac < bc$.

Jestliže $a > b$ a c je libovolné reálné číslo, pak $a + c > b + c$.

Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d platí:

Jestliže $a > b$ a zároveň $c > d$, pak $a + c > b + d$.

V průběhu studia matematiky se setkáváme se zápisy:

\mathbf{N}_0 ... množina všech celých nezáporných čísel, tj. množina všech přirozených čísel sjednocena s množinou $\{0\}$

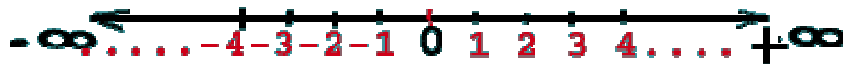
\mathbf{Z}^- ... množina všech celých záporných čísel, tj. množina $\{\dots, -3, -2, -1\}$

\mathbf{R}^+ ... množina všech kladných reálných čísel

\mathbf{R}_0^+ ... množina všech nezáporných reálných čísel, tj. množina všech kladných reálných čísel sjednocena s množinou $\{0\}$

Číselná osa

Číselná osa je přímka, na které zvolen počátek a jednotka.



Na číselnou osu zobrazujeme obrazy reálných čísel. Každému reálnému číslu odpovídá na číselné ose právě jeden bod a naopak.

Číselné obory 1

Varianta A

Příklad: Vypočítejte s využitím matematických zákonů a pravidel:

- a) $31 + 16 + 49 + 64$
- b) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4$
- c) $-9 - (-3) - (5 - 17)$
- d) $(7 - 3) \cdot 314 + (6 - 11) \cdot 314$

Řešení:

- a) $31 + 16 + 49 + 64 = (31 + 49) + (16 + 64) = 80 + 80 = 160$
- b) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4 = 10^3(2 + 3 \cdot 10) = 32000$
- c) $-9 - (-3) - (5 - 17) = -9 + 3 + 12 = 6$
- d) $(7 - 3) \cdot 314 + (6 - 11) \cdot 314 = 314(4 - 5) = -314$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte:

a) $8 - (-7) - (7 - 3)$

b) $-9 - (-3) - (5 - 17)$

c) $(14 - 9) \cdot (9 - 14)$

d) $(13 + 12) \cdot (12 - 13)$

2) Seřad'te daná čísla od nejmenšího k největšímu:

a) 6; -3; -6; 3

b) -10; 7; 0; -3; 2

3) Vypočítejte a výsledek zapište desetinným číslem:

a) $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{2}{5}$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right)$

4) Pro která čísla x je součin $x(x - 1)$ roven nule?

Výsledek řešení:

1.) a) 11, b) 6, c) -25, d) -25

2.) a) $-6 < -3 < 3 < 6$, b) $-10 < -3 < 0 < 2 < 7$

3.) a) 0,25, b) 2,5

4.) 0; 1

Číselné obory 1

Varianta B

Příklad: Uspořádejte vzestupně racionální čísla $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{32}$; 0,34.

Řešení:

a) **1. způsob-** daná čísla vyjádříme desetinnými rozvoji

$$\frac{1}{3} = 0, \bar{3}; 0, \bar{3} < 0,34 \dots \text{rozhoduje počet setin}$$

$$\frac{11}{32} > 0,343; 0,34 < \frac{11}{32} \dots \text{rozhoduje počet tisícín}$$

$$\text{Závěr: } \frac{1}{3} < 0,34 < \frac{11}{32}$$

b) **2. způsob-** daná čísla vyjádříme zlomky

$$\frac{1}{3}, \frac{11}{32}, 0,34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

Porovnáme $\frac{1}{3}$ a $\frac{17}{50}$:

$$1 \cdot 50 = 50, 3 \cdot 17 = 51; 50 < 51, \text{ to znamená, že } \frac{1}{3} < \frac{17}{50}$$

Porovnáme $\frac{17}{50}$ a $\frac{11}{32}$:

$$17 \cdot 32 = 544, 11 \cdot 50 = 550; 544 < 550, \text{ to znamená, že } \frac{17}{50} < \frac{11}{32}$$

$$\text{Závěr: } \frac{1}{3} < 0,34 < \frac{11}{32}$$

Některá racionální čísla (větší než jedna nebo menší než minus jedna) zapisujeme jako **smíšená čísla**. Například číslo $\frac{29}{13}$, které je zapsáno zlomkem v základním tvaru, můžeme zapsat jako smíšené číslo $2\frac{3}{13}$ (čteme: dvě a tři třináctiny, nikoli dvě krát tři třináctiny).

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1)

a) Zapište smíšená čísla $7\frac{3}{11}$ a $-5\frac{2}{7}$ jako zlomky.b) Zapište zlomky $\frac{25}{6}$ a $-\frac{58}{9}$ jako smíšená čísla.

2) Daná racionální čísla zapište zlomkem v základním tvaru:

a) $\frac{180}{252}$

b) $-\frac{108}{144}$

3) Uspořádejte daná racionální čísla od nejmenšího k největšímu:

a) $\frac{7}{12}; -\frac{4}{7}; \frac{41}{72}$

b) $\frac{5}{8}; 0; -\frac{2}{3}; \frac{9}{14}$

4) Uspořádejte daná racionální čísla od nejmenšího k největšímu:

a) $\frac{64}{180}; \frac{5}{14}; \frac{34}{98}$

b) $\frac{5}{18}; -\frac{3}{16}; -\frac{2}{11}; \frac{6}{23}$

Výsledek řešení:

1.) a) $\frac{80}{11}; -\frac{37}{7}$, b) $4\frac{1}{6}; -6\frac{4}{9}$

2.) a) $\frac{5}{7}$, b) $-\frac{3}{4}$

3.) a) $-\frac{4}{7} < \frac{41}{72} < \frac{7}{12}$, b) $-\frac{2}{3} < 0 < \frac{5}{8} < \frac{9}{14}$

4.) a) $\frac{34}{98} < \frac{64}{180} < \frac{5}{14}$, b) $-\frac{3}{16} < -\frac{2}{11} < \frac{6}{23} < \frac{5}{18}$

Číselné obory 1

Varianta C

Příklad: Rozhodněte, které z čísel π a $\sqrt{9,87}$ je větší.

Řešení:

Napišeme desetinná čísla, kterými nahradíme daná iracionální čísla.

$$\pi = 3,141592 \qquad \sqrt{9,87} \doteq 3,141656$$

Číslo $\sqrt{9,87}$ má větší počet desetitisícin než číslo π , je tedy větší.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Uspořádejte podle velikosti daná reálná čísla:

a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

2) Převráceným číslem k reálnému číslu a se nazývá reálné číslo \bar{a} , pro něž platí $a \cdot \bar{a} = 1$.
Rozhodněte, zda existuje ke každému reálnému číslu číslo převrácené. Určete převrácená čísla k číslům:

$$5; -3; \frac{3}{5}; 1; 0; -\sqrt{5}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0,3; 0,\bar{3}$$

3) Vypočtěte a výsledek zapište jako desetinné číslo:

a) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{18}\right) : \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{6}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \frac{5}{9} - \frac{1}{3}$

4) Vypočtěte co nejjednodušeji a výsledek vyjádřete desetinným číslem:

a)

$$\left[\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)\right] \cdot \frac{\frac{3}{8} - \frac{7}{12}}{\frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$$

b)

$$\frac{\frac{1}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{8} - \frac{11}{12}} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

Výsledek řešení:

1.) a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} > 1 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

2.) Existuje ke každému reálnému číslu s výjimkou nuly

$\frac{1}{5}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; 1$; neexistuje; $-\frac{1}{\sqrt{5}}; \sqrt{2}; \frac{10}{3}; 3$

3.) a) $-1,23$, b) $-0,241$

4.) a) $0, \overline{15}$, b) $6,4$

Číselné obory 2

Druhá odmocnina

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je takové nezáporné číslo x , pro které platí $x^2 = a$. K jeho označení užíváme symbol \sqrt{a} .

Věta:

Pro každá dvě nezáporná reálná čísla a, b platí:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \text{pro } b \neq 0$$

Druhá odmocnina je definována pouze z **nezáporného reálného čísla**. Jinak řečeno, druhé odmocniny ze záporných čísel (např. $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-3,26}$ apod.) nejsou definovány v oboru reálných čísel. Později tuto definici rozšíříme zavedením čísel komplexních.

Druhá odmocnina z nezáporného čísla je vždy **nezáporné číslo**, např. $\sqrt{4} = 2$, i když $2^2 = 4$, a rovněž $(-2)^2 = 4$. Symbol $\sqrt{4}$ musí být jednoznačný, tj. musí označovat právě jedno číslo. Stručně lze zapsat: pro každé $a \geq 0$ je $\sqrt{a} \geq 0$.

Třetí odmocnina

Třetí odmocnina z nezáporného reálného čísla a je takové nezáporné číslo x , pro něž platí $x^3 = a$. K jeho označení užíváme symbol $\sqrt[3]{a}$.

Věta:

Pro každá dvě nezáporná reálná čísla a, b platí:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \text{ pro } b \neq 0$$

Usměrňování zlomků:

Usměrnit zlomek znamená odstranit odmocniny ze jmenovatele zlomku.

Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnotu $|a|$ reálného čísla a definujeme takto:

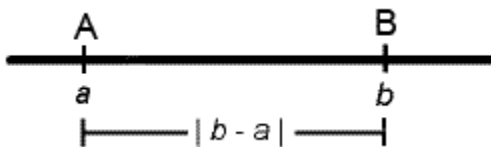
Je-li $a \geq 0$, pak $|a| = a$,

Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$.

Věta:

- 1.) Pro každé reálné číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$.
- 2.) **Absolutní hodnota** každého reálného čísla je rovna vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od počátku.
- 3.) Vzdálenost obrazů reálných čísel a, b na číselné ose je rovna $|a - b|$.
- 4.) Pro $\forall a, b \in \mathbf{R}$ platí $|a - b| = |b - a|$

Geometrická interpretace absolutní hodnoty



Číselné obory 2

Varianta A

Příklad: Vypočtěte:

a) $\sqrt{14400}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ d) $\sqrt[3]{8}$

e) $\sqrt[3]{1000}$ f) $\sqrt[3]{125000}$

Řešení:

a) $\sqrt{14400} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{100} = 12 \cdot 10 = 120$

b) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^5} = \sqrt{2^6} = \sqrt{64} = 8$

d) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

e) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

f) $\sqrt[3]{125000} = \sqrt[3]{50^3} = 50$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte z paměti druhé odmocniny z čísel:

a) $\sqrt{0,81}$

b) $\sqrt{0,04}$

c) $\sqrt{0,0009}$

2) Rozhodněte, zda platí následující rovnosti. Své rozhodnutí zdůvodněte:

a) $\sqrt{0} = 0$

b) $\sqrt{1} = -1$

c) $\sqrt{(-5)^2} = -5$

3) Rozhodněte, zda platí (své rozhodnutí zdůvodněte):

a) $\sqrt[3]{0} = 0$

b) $\sqrt[3]{8} = -2$

c) $\sqrt[3]{5^3} = 5$

4) Vypočítejte:

a) $\sqrt{0,0081}$

b) $\sqrt[3]{0,008}$

c) $\sqrt[3]{27}$

Výsledek řešení:

1.) a) 0,9, b) 0,2, c) 0,03

2.) a) platí, $0^2 = 0$ a 0 je nezáporné číslo, b) neplatí, c) neplatí. Druhá odmocnina je vždy nezáporné číslo.

3.) a) platí, $0^3 = 0$ a 0 je nezáporné číslo, b) neplatí, třetí odmocnina je vždy nezáporné číslo, c) platí, $5^3 = 5^3$ a 5 i 5^3 jsou nezáporná čísla

4.) a) 0,09, b) 0,2, c) 3

Číselné obory 2

Varianta B

Příklad: Usměrněte zlomky:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Řešení:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = 2(\sqrt{5} + \sqrt{2})$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{4}$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Usměrněte zlomky:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{50}}$

2) Upravte výrazy:

a) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

b) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

3) Usměrněte zlomky:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

b) $\frac{6}{3-\sqrt{3}}$

4) Usměrněte zlomky:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

b) $\frac{12}{\sqrt[3]{18}}$

Výsledek řešení:

1.) a) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$, b) $\frac{\sqrt[3]{20}}{10}$

2.) a) 4, b) 3

3.) a) $\sqrt{2} - 1$, b) $3 + \sqrt{3}$

4.) a) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$, b) $2\sqrt[3]{12}$

Číselné obory 2

Varianta C

Příklad: Na číselné ose znázorněte obrazy všech reálných čísel x , pro která platí:

a) $|x - 3| = 2$

b) $|x - 3| \leq 2$

c) $|x - 3| > 2$

d) $|x + 3| < 2$

Řešení:

Zápis $|x - 3| = 2$ znamená, že máme na číselné ose najít obrazy čísel x , pro něž je vzdálenost od obrazu čísla 3 rovna 2. (Tj. $3-2=1$, $3+2=5$)

a) $x \in \{1,5\}$

b) $x \in \langle 1,5 \rangle$

c) $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

d) $|x - (-3)|$; $x \in (-5, -1)$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte:

a) $|-4 + 6| - |3 - (-2)|$ b) $|-3 - 7| - |-5 - (-1)|$ c) $|-|4 - 9| - 2|$

2) Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x| = 5$ b) $|x| = 0$ c) $|x| = -7$

3) Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x| < 3$ b) $|x| \geq 1$ c) $|x| > 0$

4) Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x - 2| = 5$ b) $|x + 3| = 6$ c) $|x + 1| > \sqrt{2}$

Výsledek řešení:

1.) a) -3 , b) 6 , c) 7 2.) -5 ; 5 , b) 0 , c) taková čísla neexistují3.) a) úsečka určená body -3 a 3 bez těchto krajních bodů, b) všechna reálná čísla s výjimkou čísel ležících mezi čísly -1 a 1 (dvě polopřímky), c) všechna reálná čísla s výjimkou nuly4.) a) -3 ; 7 , b) -9 ; 3 , c) všechna reálná čísla s výjimkou čísel $-1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2}$ a všech čísel ležících mezi těmito čísly

Pravoúhlý trojúhelník

Pythagorova věta

Pravoúhlý trojúhelník je každý trojúhelník, který má jeden úhel pravý a zbývající dva ostré.

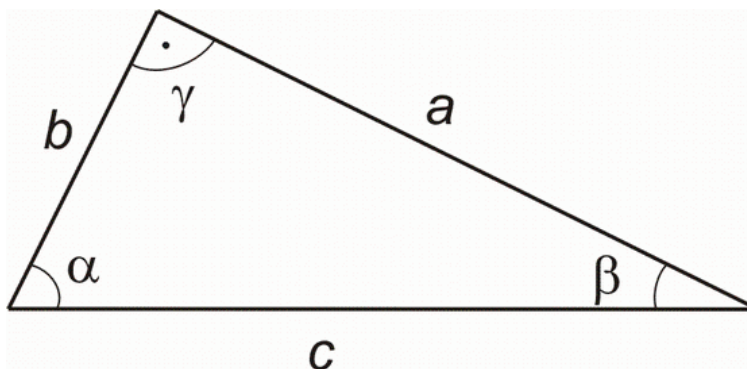
$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

a, b ... odvěsny

c ... přepona

γ ... pravý úhel



Pythagorova věta:

V každém pravoúhlém trojúhelníku platí

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

Kde c je délka přepony, a, b jsou délky jeho odvěsen.

Platí-li pro délky a, b, c stran trojúhelníku vztah $c^2 = a^2 + b^2$, je trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem proti straně c , která je tedy jeho přeponou, zbývající dvě strany jsou odvěsnami.

Goniometrické funkce pravého úhlu

Definice:

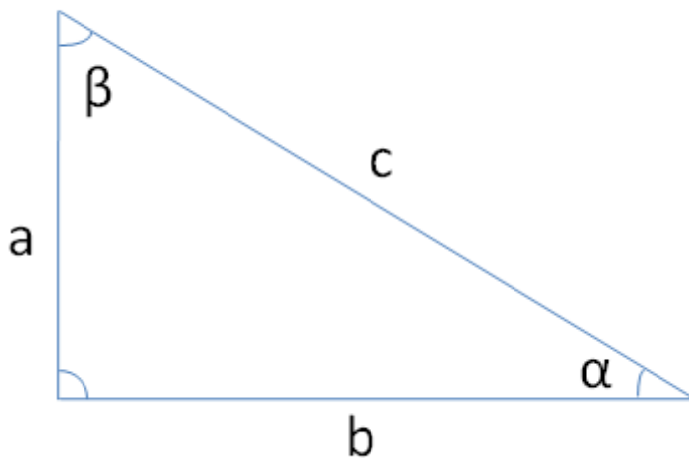
Sinus úhlu α je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

Kosinus úhlu α je poměr délky přilehlé odvěsny k úhlu α a délky přepony.

Tangens úhlu α je poměr délek protilehlé odvěsny k úhlu α a přilehlé odvěsny.

Kotangens úhlu α je poměr délek přilehlé odvěsny k úhlu α a protilehlé odvěsny.

– – – –



$$\sin \alpha = a / c$$

$$\sin \beta = b / c$$

$$\cos \alpha = b / c$$

$$\cos \beta = a / c$$

$$\tan \alpha = a / b$$

$$\tan \beta = b / a$$

Vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

a) $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta = \cos (90^\circ - \alpha)$, podobně

b) $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha)$

d) $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

f) $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

g) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$

h) $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

Některé hodnoty goniometrických funkcí:

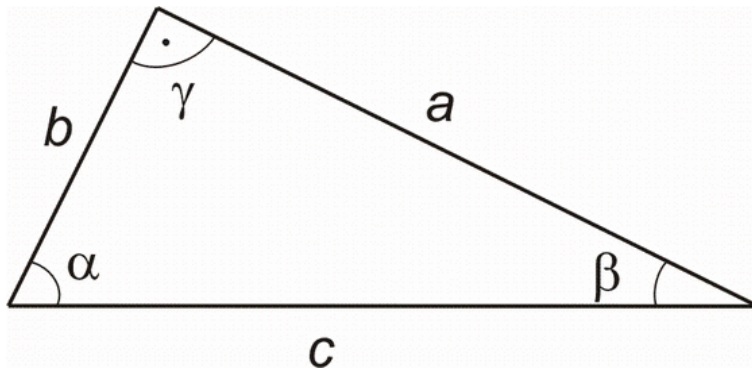
	30°	45°	60°
Sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Kosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangens	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Kotangens	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Pravoúhlý trojúhelník

Varianta A

Příklad: Vypočítejte délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky 4cm a 7cm. Trojúhelník sestrojte z daných údajů, změřte jeho přeponu a výsledek porovnejte se svým výpočtem.

Řešení:



Pro délku c přepony platí $c^2 = (16 + 49)cm^2 = 65cm^2$, takže $c = \sqrt{65}cm \doteq 8,06cm$. Délka přepony je přibližně 8,06cm. Narýsujeme si dvě kolmé polopřímky se společným počátkem, od něhož nanese na jednu polopřímku 4cm, na druhou 7cm. Koncové body určují spolu se společným bodem obou polopřímek pravoúhlý trojúhelník. Délka jeho přepony by se neměla při pečlivém rýsování a měření lišit od hodnoty 8,1cm o více než 1mm.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Žebřík délky 6m je opřen o zeď tak, že pata žebříku je od zdi vzdálena 2m. V jaké výšce nad zemí je druhý konec žebříku?

2) Vypočítejte délku druhé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, je-li dána délka jedné odvěsny a délka přepony:

a) $a = 9\text{cm}$, $c = 41\text{cm}$

b) $l = 35\text{cm}$, $m = 37\text{cm}$

3) Vypočítejte délku úhlopříčky obdélníku, který má délky stran:

a) $a = 22\text{cm}$, $b = 13\text{cm}$

b) $a = 15,2\text{cm}$, $b = 42,7\text{cm}$

4) Rovnoramenný trojúhelník KLM má ramena délky $k, l, k = l$, a základnu délky m ; výška k základně má délku v . Vypočtěte zbývající údaj, je-li dáno:

a) $m = 35\text{cm}$, $k = 20,3\text{cm}$

b) $l = 7,5\text{cm}$, $v = 4,8\text{cm}$

Výsledek řešení:

1.) $v = 4\sqrt{2}m$, tj. asi 5,66m

2) a) 40cm, b) 12cm

3.) a) 25,6cm, b) 45,3cm

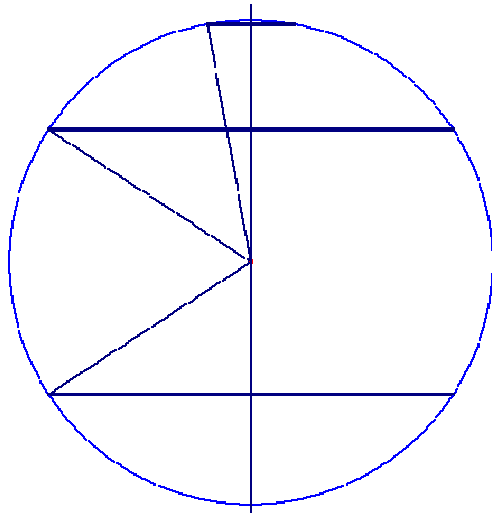
4.) a) 10,3cm, b) 11,5cm

Pravoúhlý trojúhelník

Varianta B

Příklad: V kružnici s poloměrem 3,5cm jsou sestrojeny dvě rovnoběžné tětivy, jejichž délky jsou 4,2cm a 6,4cm. Vypočítejte vzdálenost těchto tětiv.

Řešení:



$$r = 3,5\text{cm} \Rightarrow d = 7\text{cm}$$

$$d_1 = 4,2\text{cm}$$

$$d_2 = 6,4\text{cm}$$

$$a_1^2 = r^2 - \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 3,5^2 - 2,1^2$$

$$a_1 = 2,8\text{cm}$$

$$x = a_1 - a_2 = 2,8 - 1,42$$

$$\mathbf{x = 1,38\text{cm}}$$

$$a_2^2 = r^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 3,5^2 - 3,2^2$$

$$a_2 \doteq 1,42$$

Vzdálenost tětiv je **1,38cm** .

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte délku tělesové úhlopříčky hranolu, který má rozměry

$$a = 12,6\text{cm}, \quad b = 7,8\text{cm}, \quad c = 14,5\text{cm}.$$

2) Vypočítejte obsah štítu domu, který má tvar rovnoramenného trojúhelníku se základnou délky 12m a rameny délek 6,5m.

3) V trojúhelníku ABC je dáno $a = 10\text{cm}$, délka těžnice $t_a = 13\text{cm}$, $\gamma = 90^\circ$. Vypočítejte t_b .

4) Z kmene stromu, jehož nejmenší průměr je 25cm, se má zhotovit trám čtvercového průřezu. Vypočítejte délku strany největšího možného trámu s přesností na centimetry.

Výsledek řešení:

1.) 20,7cm

2.) 15m^2

3.) 11,7cm

4.) 17cm

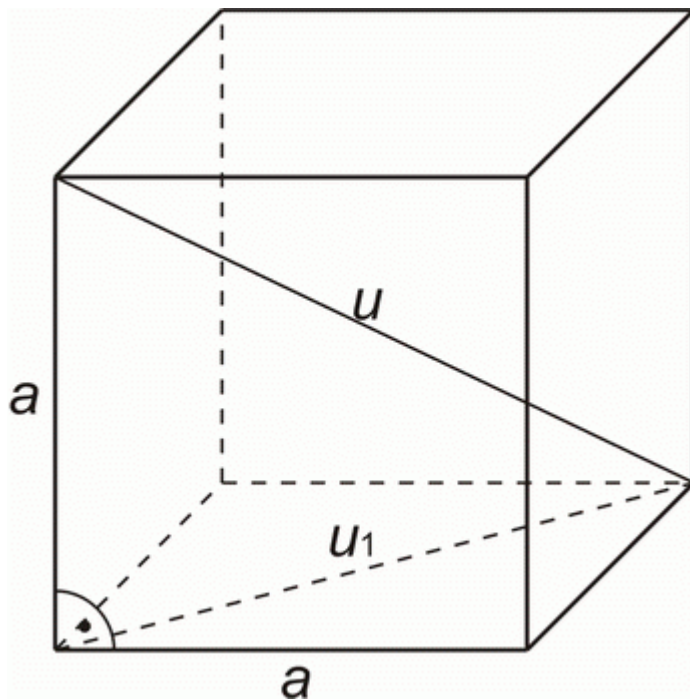
Pravoúhlý trojúhelník

Varianta C

Příklad: Určete velikost úhlu α , který svírá tělesová a stěnová úhlopříčka krychle.

Řešení:

Označíme-li a délku hrany krychle, je délka stěnové úhlopříčky $u_1 = a\sqrt{2}$, délka tělesové úhlopříčky je $u = \sqrt{u_1^2 + a^2} = a\sqrt{3}$. Z pravoúhlého trojúhelníku o stranách $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$ plyne, že $\sin \alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,5774$, takže $\alpha = 35^\circ 16'$.



Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) V pravouhlém trojúhelníku má přepona délku $c = 6\text{cm}$, jeden jeho ostrý úhel má velikost 20° . Určete délky odvěsen.

2) Odvěsny pravouhlého trojúhelníku mají délky 5cm a 12cm. Určete velikosti jeho ostrých úhlů.

3) Hrany kvádru mají délky 3cm, 4cm a 12cm. Určete velikosti úhlů, jež svírají stěnové úhlopříčky téže stěny, a velikosti úhlů, jež svírá tělesová úhlopříčka se stěnovými úhlopříčkami.

4) Rotační kužel má výšku $v = 6\text{cm}$, poloměr podstavy je $r = 5\text{cm}$. Jaký úhel svírají strany

a) s rovinou podstavy,

b) s osou kužele?

Co platí o součtu velikostí těchto dvou úhlů?

Výsledek řešení:

1.) $a = 2,0520\text{cm}$, $b = 5,6382\text{cm}$

2.) $\alpha \doteq 22^\circ 37'$, $\beta \doteq 67^\circ 23'$

3.) $73^\circ 44'$, $28^\circ 04'$, $36^\circ 52'$, $13^\circ 21'$, $17^\circ 55'$, $67^\circ 23'$

4.) $50^\circ 12'$, $39^\circ 48'$

Mocniny s přirozeným mocnitelem

Definice:

Pro každé reálné číslo a a každé přirozené číslo n je

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a,$$

kde v součinu na pravé straně je n činitelů.

Výraz a^n se nazývá **mocnina**, a je **základ mocniny**(mocněnec), n je **mocnitel**(exponent).

Z definice vyplývá, že

- pro každé reálné číslo a platí $a^1 = a$,
- pro každé přirozené číslo n platí $1^n = 1$ a $0^n = 0$.

Věta 1:

Pro každé $a \in R$ a pro každé $n \in N$ platí:

- je-li $a > 0$, pak $a^n > 0$,
- je-li $a < 0$, pak $a^{2n} > 0$,
- je-li $a < 0$, pak $a^{2n-1} < 0$.

Věta 2:

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro každá přirozená čísla r, s platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s}, \quad a \neq 0, r > s$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0$$

V matematice, přírodních a technických vědách často pracujeme s velkými čísly, která zpravidla zapisujeme pomocí mocnin se základem 10, tj. ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde

$1 \leq a < 10, n \in \mathbb{N}$. Exponent n čísla zapsaného ve tvaru $a \cdot 10^n$ určíme tak, že zjistíme řád první platné číslice zapisovaného čísla

Např. $15000 = 1,5 \cdot 10^4$; $7650000 = 7,65 \cdot 10^6$.

Mocniny s celým mocnitelem

Věta:

Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ platí $a^0 = 1$.

Pozn.: Věta o dělení mocnin se stejným základem platí pro $a \neq 0$, proto výraz 0^0 není definován.

Věta:

Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a pro každé celé číslo r platí $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Věta:

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro libovolná celá čísla r, s platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s}, \quad a \neq 0$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0$$

Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem**Varianta A****Příklad:** Vypočítejte:

a) 10^1 b) $(-2)^3$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ d) 0^5 e) 1^{10} f) $(-1)^{47}$

Řešení:

a) $10^1 = 10$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

d) $0^5 = 0$

e) $1^{10} = 1$

f) $(-1)^{47} = -1$, (mocnitel je liché číslo)

Příklad:[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Zaokrouhlete na dvě platné číslice a vyjádřete ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde

$$1 \leq a < 10, n \in \mathbb{N}:$$

a) 16372000

b) 455328

c) 71602

d) 2013

2) Vypočítejte:

a) $\frac{2^5 \cdot 2^7}{2^{10}}$

b) $\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^5 \cdot 3^2}$

c) $\frac{|2|^5 \cdot |(-5)^5|}{[(-2) \cdot (-5)]^3}$

3) Dané výrazy vyjádřete jako mocniny se základem 2 nebo 3 a bez použití kalkulačky vypočítejte:

a) $\frac{(2^{10} \cdot 3)^2}{2 \cdot 3^{13}} \cdot \left(\frac{81}{64}\right)^3$

b) $\frac{9^5 \cdot 2^7}{27^2 \cdot 96} \cdot \frac{36}{6^3}$

c) $\frac{8^4 \cdot 9^5}{72^3} : \frac{2 \cdot 3^6}{27}$

4) Vypočítejte:

a) $\frac{2(ab)^3}{3a^2b} \cdot \frac{(3a^3b^2)^2}{a^5b^3}$

b) $\frac{2x^5y^3}{(2x^2y)^2} : \left(\frac{xy}{2xy^2}\right)^3$

c) $\frac{7x^4y^7}{8x^3y} : \frac{(x^2y)^4}{(2x^3y^2)^3}$

1.) a) $1,6 \cdot 10^7$, b) $4,6 \cdot 10^5$, c) $7,2 \cdot 10^4$, d) $2,0 \cdot 10^3$

2.) a) 4, b) 9, c) 100

3.) a) 6, b) 18, c) 12

4.) a) $6a^2b^3$, b) $4xy^4$, c) $7x^2y^8$

Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem

Varianta B

Příklad: Za předpokladu, že a, b, c jsou nenulová reálná čísla, vypočítejte:

a)

$$(3a^7b^{-2}c^{-3}) \cdot (4a^{-6}b^2c^{-1})$$

b)

$$\left(\frac{1}{2}a^{-2}b^3c\right)^{-3} : (4a^4b^{-8}c^{-3})$$

c)

$$\left(\frac{ab^{-3}}{c^4}\right)^{-2}$$

d)

$$\frac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\frac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^{-2}$$

e)

$$\frac{0,000032}{10000} \cdot \frac{500000}{0,00008}$$

Řešení:

$$a) (3a^7b^{-2}c^{-3}) \cdot (4a^{-6}b^2c^{-1}) = 12ab^0c^{-4} = \frac{12a}{c^4}$$

$$b) \left(\frac{1}{2}a^{-2}b^3c\right)^{-3} : (4a^4b^{-8}c^{-3}) = (8a^6b^{-9}c^{-3}) : (4a^4b^{-8}c^{-3}) = 2a^2b^{-1}c^0 = \frac{2a^2}{b}$$

$$c) \left(\frac{ab^{-3}}{c^4}\right)^{-2} = \left(\frac{c^4}{ab^{-3}}\right)^2 = \frac{c^8}{a^2b^{-6}} = \frac{b^6c^8}{a^2}$$

$$d) \frac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\frac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^{-2} = \frac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\frac{a^2c^{-4}}{3^{-1}b^3}\right)^2 = \frac{3^2a^6b^{-5}}{c^{-3}} \cdot \frac{3^{-2}b^6}{a^4c^{-8}} = \frac{3^0a^2b}{c^{-11}} = a^2bc^{11}$$

$$e) \frac{0,000032}{10000} \cdot \frac{500000}{0,00008} = \frac{3,2 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^4} \cdot \frac{5 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^{-5}} = \frac{16 \cdot 10^0}{8 \cdot 10^{-1}} = 2 \cdot 10 = 20$$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte:

a) $2^{-3} - 4^{-2} - 5^{-2} + 20^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{20}\right)^{-2}$

2) Vypočítejte:

a) $(-2)^{-3} + (-0,2)^{-4} - 2^{-3} - 0,2^{-4}$

b) $(\sqrt{3})^{-2} - (-\sqrt{3})^{-2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

3) Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru:

a) $(\sqrt{5} - 2)^{-1}$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-2}$

4) Zjednodušte následující výrazy za předpokladu, že a, b, c, d jsou nenulová reálná čísla, a výsledek zapište pomocí mocnin s přirozeným mocnitelem:

a) $(7a^6b^{-3}c^{-2}d) \cdot (8a^{-3}b^{-5}c^3d^{-1})$

b) $(91a^5b^{-7}c^{-1}d) : (7a^3b^{-8}c^{-1}d^2)$

1.) a) $\frac{1}{40}$, b) 367

2.) a) $-\frac{1}{4}$, b) 0

3.) a) $2 + \sqrt{5}$, b) $5 + 2\sqrt{6}$

4.) a) $\frac{56a^3c}{b^8}$, b) $\frac{13a^2b}{d}$

Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem

Varianta C

Příklad: Za předpokladu, že a, b, c, x, y jsou nenulová reálná čísla, vypočítejte:

a)

$$\left[\frac{1}{(x+y)^{-2}} \right]^2 \cdot (x+y)^{-3}$$

b)

$$\left(\frac{a^{-3}b^{-7}c^0}{a^{-5}b^{-11}c^{13}} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{a^2b^{-3}c^{-4}}{a^4b^7c^0} \right)^{-2}$$

c)

$$\left(a + \frac{1}{b} \right)^{-2} \cdot \left(b - \frac{1}{a} \right)^{-3} \cdot \left(ab - \frac{1}{ab} \right)^2$$

d)

$$\left[\frac{(-x)^{-2n}}{(-x)^{-2n-1}} \right]^{-2} \cdot [(-x)^{2n+1}(-x)^{-2n+1}]^3$$

Řešení:

$$\text{a) } \left[\frac{1}{(x+y)^{-2}} \right]^2 \cdot (x+y)^{-3} = \frac{1}{(x+y)^{-4}} \cdot \frac{1}{(x+y)^3} = \frac{(x+y)^4}{(x+y)^3} = x+y; x \neq -y$$

$$\text{b) } \left(\frac{a^{-3}b^{-7}c^0}{a^{-5}b^{-11}c^{13}} \right)^{-4} \cdot \left(\frac{a^2b^{-3}c^{-4}}{a^4b^7c^0} \right)^{-2} = \frac{a^{12}b^{28}}{a^{20}b^{44}c^{-52}} \cdot \frac{a^{-4}b^6c^8}{a^{-8}b^{-14}} = \frac{c^{52}}{a^8b^{16}} \cdot \frac{c^8a^8b^{20}}{a^4} = \frac{c^{60}b^4}{a^4}$$

$$\text{c) } \left(a + \frac{1}{b} \right)^{-2} \cdot \left(b - \frac{1}{a} \right)^{-3} \cdot \left(ab - \frac{1}{ab} \right)^2 = \frac{1}{\left(a + \frac{1}{b} \right)^2} \cdot \frac{1}{\left(b - \frac{1}{a} \right)^3} \cdot \left(ab - \frac{1}{ab} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{ab+1}{b}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\frac{ab-1}{a}} \right)^3 \cdot \left(\frac{a^2b^2-1}{ab} \right)^2 = \frac{b^2}{(ab+1)^2} \cdot \frac{a^3}{(ab-1)^3} \cdot \frac{(a^2b^2-1)^2}{a^2b^2} =$$

$$= \frac{a}{ab-1}$$

$$\text{d) } \left[\frac{(-x)^{-2n}}{(-x)^{-2n-1}} \right]^{-2} \cdot [(-x)^{2n+1}(-x)^{-2n+1}]^3 = \frac{(-x)^{4n}}{(-x)^{4n+2}} \cdot [(-x)^2]^{-3} = (-x)^{-2} \cdot (-x)^{-6}$$

$$= (-x)^{-8} = \frac{1}{x^8}$$

Příklad:[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)**Příklady k procvičení:**

1) Zjednodušte následující výrazy za předpokladu, že a, b, c, d jsou nenulová reálná čísla, a výsledek zapište pomocí mocnin s přirozeným mocnitelem:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{5a^{-2}bc^3d^{-4}}{3a^{-3}b^3c^5d^{-7}} \cdot \frac{21a^5b^{-2}cd^2}{105a^5b^{-4}c^2d^3} \\ \text{b) } & \frac{7a^3b^{-2}c}{8a^2d^3} : \frac{28a^{-3}b^4d^{-5}}{64ab^6c^{-2}} \end{aligned}$$

2) Zjednodušte následující výrazy za předpokladu, že a, b, c, d jsou nenulová reálná čísla, a výsledek zapište pomocí mocnin s přirozeným mocnitelem:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\frac{4a^2b}{c^{-3}d^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2a^5b^{-2}}{c^{-4}d^3}\right)^{-2} \\ \text{b) } & 4n^2 \cdot 3(-n^3)(-2n^4) \end{aligned}$$

3) Vypočtěte:

$$\begin{aligned} \text{a) } & 4x^2(-3x)4x^4 \\ \text{b) } & 4(-x)^3y^2 \cdot 3(-y)^4(-y)^6 \end{aligned}$$

4) Vypočtěte co nejúsporněji: $\left[2a^5 \left(\frac{1}{a^3}\right)^2\right]^{-2}$

5) Upravte daný výraz tak, aby obsahoval pouze kladné exponenty, a pak určete, kdy má zlomek smysl: $\frac{2^{-2}m^{-1}n^{-3}}{2^{-3}m^0n^{-2}}$

$$\begin{aligned} 1.) & \text{ a) } \frac{ad^2}{3c^3}, \text{ b) } \frac{2a^5d^2}{c} \\ 2.) & \text{ a) } \frac{16b^7c}{a^4}, \text{ b) } 24n^9 \\ 3.) & \text{ a) } -48x^7, \text{ b) } -12x^3y^{12} \\ 4.) & \text{ a) } \frac{a^2}{4}; a \neq 0, \\ 5.) & \frac{2}{mn}; m, n \neq 0 \end{aligned}$$

Základní množinové pojmy

Definice množiny:

Skupina prvků, které mají společnou charakteristickou vlastnost.

Prvek množiny je dále nedělitelný prvek; např. $\frac{1}{2}$, pan Novák.

Označení množin- A, B, Q, Z, \dots

Prvky množin- a, b, c, x, y, \dots

$x \in A \dots x$ je prvkem množiny A

$y \notin B \dots y$ není prvkem množiny B

Prázdná množina- množina, která neobsahuje žádný prvek.

Např. studenti třídy 1.E na GJW.

Značíme: $\emptyset, \{\}$.

Každou množinu lze určit dvěma způsoby:

- a) Výčtem prvků- pouze u konečných množin

$$A \in \{1,2,3,4,5\}$$

- b) Určením charakteristické vlastnosti- u konečných i nekonečných množin

$$c \in \{x \in \mathbf{R}; -1 < x \leq 10\}$$

Definice:

Podmnožinou B množiny A nazveme každou takovou množinu B , jejíž všechny prvky jsou současně i prvky množiny A .

Zápis: $B \subset A (B \subseteq A)$.

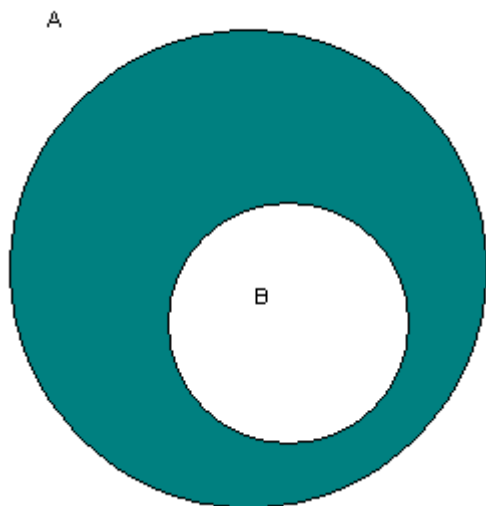
Definice:

Rovnost množin: Množiny A, B se sobě rovnají (píšeme $A=B$) právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a naopak, každý prvek množiny B je prvkem množiny A .

$A=B$ právě tehdy, když $A \subset B \wedge B \subset A$.

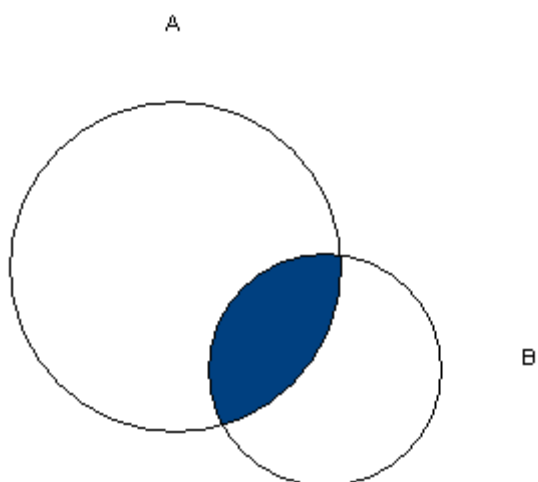
Definice: Necht' $B \subset A$.

Doplňkem množiny B v množině A (píšeme B'_A) je množina, která obsahuje takové prvky, které patří do množiny A , ale nepatří do množiny B .



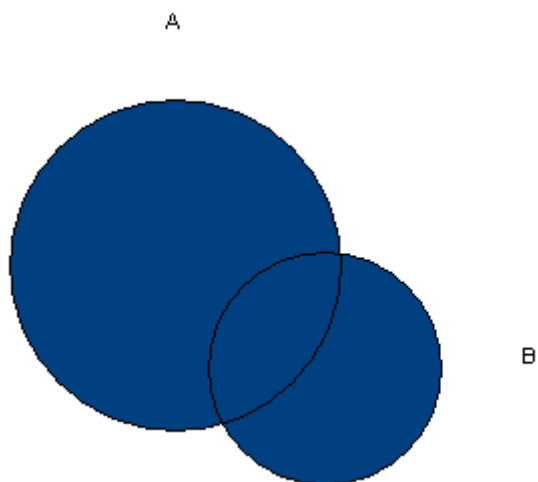
Definice:

Průnikem množin A a B nazýváme takovou množinu (značíme $A \cap B$), která obsahuje takové prvky, které patří současně do množiny A i B .

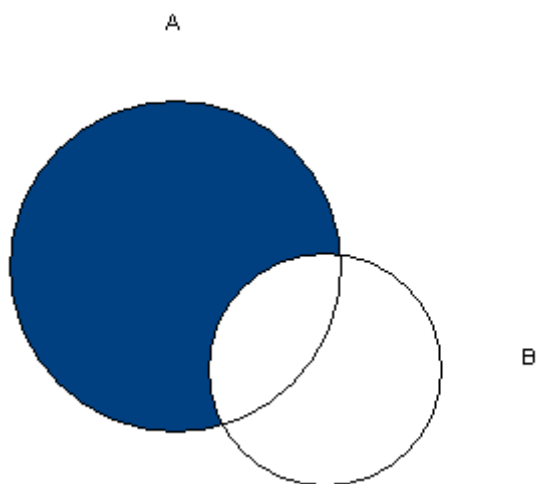


Definice:

Sjednocením množin A a B nazveme takovou množinu (značíme $A \cup B$), která obsahuje všechny prvky, které patří buď do množiny A nebo do množiny B (Může patřit i do obou současně).

**Definice:**





Rozdílem množin A a B (v daném pořadí) je taková množina (značíme $A - B$; $B - A$), která obsahuje ty prvky, které patří do množiny A , ale nepatří do množiny B .



Intervaly

Omezené intervaly jsou takové podmnožiny množiny všech reálných čísel, které lze na číselné ose znázornit úsečkou. Podle toho, zda k úsečce patří oba krajní body nebo jen jeden nebo žádný, rozdělujeme omezené intervaly na uzavřené, polouzavřené a otevřené.

Přehled omezených intervalů s krajními body a, b ($a < b$) je uveden v následující tabulce:

Zápis charakteristické vlastnosti	Zápis intervalu	Znázornění na reálné ose	Název intervalu
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$		Uzavřený interval
$a < x \leq b$	$(a, b]$		Polouzavřený interval (zleva otevřený a zprava uzavřený)
$a \leq x < b$	$[a, b)$		Polouzavřený interval (zleva uzavřený a zprava otevřený)
$a < x < b$	(a, b)		Otevřený interval

Zobrazení

Definice:

Zobrazení množiny A do množiny B je předpis, který každému prvku $a \in A$ jednoznačně přiřadí nějaký prvek $b \in B$.

Prvek a se nazývá **vzor** prvku b , prvek b je **obraz** prvku a . Označíme-li zobrazení φ , píšeme $b = \varphi(a)$. Množina A je definiční obor zobrazení φ , množina všech prvků tvaru $\varphi(a)$, kde $a \in A$, se značí $\varphi(A)$, a nazývá se obrazem množiny A v zobrazení φ . Podle definice je $\varphi(A) \subset B$.

Je-li $\varphi(A) = B$, říkáme, že φ je **zobrazením množiny A na množinu B** .

Zobrazením množiny A do množiny B , které přiřazuje různým prvkům množiny A různé prvky množiny B , se nazývá **prosté**.

Inverzní zobrazení:

Je-li f zobrazení množiny A na množinu B , existuje ke každému $b \in B$ aspoň jeden prvek $a \in A$ tak, že $f(a) = b$. Je-li f navíc prosté, existuje takové a právě jedno. Říkáme, že f je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny A na množinu B . Přiřadíme-li prvku b právě ten prvek a , pro který je $b = f(a)$, dostaneme zobrazení množiny B na množinu A . Toto zobrazení nazýváme **inverzní zobrazení** k zobrazení f a značíme f^{-1} .

Množiny a zobrazení

Varianta A

Příklad: Jsou dány množiny

$$A = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 0, 2\}$$

Určete:

- Doplňěk množiny B v A
- $A \cup B$
- $A \cap B$
- Všechny podmnožiny množiny B

Řešení:

- $B'_A = \{-2, 3\}$
- $A \cup B = A = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$
- $A \cap B = B = \{0, 1, 2\}$
- $\{\}, \{1\}, \{0\}, \{2\}, \{1, 0\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{1, 0, 2\}$

Pozn.: Pro libovolnou množinu A platí:

- 1.) $A \subset A$
- 2.) $\{\} \subset A$.
- 3.) Obsahuje-li množina n prvků, je počet všech jejích podmnožin určen číslem 2^n .

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Určete průnik a sjednocení množin:

a) $A = \{1,2,5,8\}, B = \{1,3,5,7\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{N}; x > 2\}, B = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > -3\}, B = \{x \in \mathbb{Z}; x > -5\}$

2) Najděte $A - B$ a $B - A$ pro množiny A, B určené v předchozím příkladu.

3) Určete doplněk množiny B v množině A , jestliže:

a) $A = \{-2; -0,5; 0; 1; 3\}, B = \{-0,5; 0; 3\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > 5\}, B = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq 7\}$

c) $A = \mathbb{R}, B = \{x \in \mathbb{R}; |x - 1| < 0\}$

4) Určete průnik a sjednocení množin A, B , jestliže:

a) $A = \{-2; 0; 5; 7\}, B = \{-3; -1; 0; 4; 7; 9\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z}; x < -5\}, B = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq -1\}$

1.) a) $A \cap B = \{1,5\}, A \cup B = \{1,2,3,5,7,8\}$

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{N}; 2 < x < 7\} = \{3,4,5,6\}; A \cup B = \mathbb{N}$

c) $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z}; x > -3\}; A \cup B = \{x \in \mathbb{Z}; x > -5\}$

2.) a) $A - B = \{2,8\}; B - A = \{3,7\}$

b) $A - B = \{x \in \mathbb{N}; x > 6\}; B - A = \{1,2\}$

c) $A - B = \emptyset; B - A = \{-4, -3\}$

3.) a) $\{-2,1\}$, b) $\{6\}$, c) \mathbb{R}

4.) a) $A \cap B = \{0,7\}; A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 9\}$,

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z}; x < -5\}; A \cup B = \{x \in \mathbb{Z}; x \leq -1\}$

Množiny a zobrazení

Varianta B

Příklad: Určete sjednocení a průnik intervalů:

- a) $\langle -1,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle$
- b) $\langle -1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle$
- c) $\langle -1,2 \rangle, (2,3)$
- d) $\langle -1,0 \rangle, (1, +\infty)$

Řešení:

Dané intervaly zobrazíme nad číselnou osou a na ní znázorníme jejich sjednocení a průnik:

- a) $\langle -1,2 \rangle \cup \langle 0,3 \rangle = \langle -1,3 \rangle$
 $\langle -1,2 \rangle \cap \langle 0,3 \rangle = \langle 0,2 \rangle$
- b) $\langle -1,2 \rangle \cup \langle 2,3 \rangle = \langle -1,3 \rangle$
 $\langle -1,2 \rangle \cap \langle 2,3 \rangle = \{2\}$
- c) $\langle -1,2 \rangle \cup (2,3) = \langle -1,3 \rangle$
 $\langle -1,2 \rangle \cap (2,3) = \emptyset$
- d) $\langle -1,0 \rangle \cup (1, +\infty) = \langle -1,0 \rangle \cup (1, +\infty)$
 $\langle -1,0 \rangle \cap (1, +\infty) = \emptyset$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Na číselné ose znázorněte a jako interval zapište tyto množiny:

- a) $\{x \in R; -2 \leq x \leq 3\}$
- b) $\{x \in R; -7 < x \leq -1\}$
- c) $\{x \in R; 5 \leq x < 9\}$

2) Na číselné ose znázorněte a jako interval zapište tyto množiny:

- a) $\{x \in R; -1 < x < 0\}$
- b) $\{x \in R; x > 3\}$
- c) $\{x \in R; x \leq -2\}$

3) Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

- a) $\{2\}$
- b) $\{x \in Z; x > 0\}$
- c) $\{x \in N; x < 8\}$

4) Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

- a) $\{x \in R; x \geq 3\}$
- b) $\{x \in Q; x < 0\}$
- c) $\{x \in R; 2 \leq x < 1\}$

- 1.) a) $\langle -2, 3 \rangle$, b) $\langle -7, -1 \rangle$, c) $\langle 5, 9 \rangle$
2.) a) $\langle -1, 0 \rangle$, b) $\langle 3, +\infty \rangle$, c) $\langle -\infty, -2 \rangle$
3.) a) není, b) není, c) není
4.) a) $\langle 3, +\infty \rangle$, b) není, c) není

Množiny a zobrazení

Varianta C

Příklad: Znázorněte na číselné ose dané množiny reálných čísel a zapište pomocí intervalů:

a) $\{x \in \mathbb{R}; |2 - x| < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}; |x + 2| < 5\}$

Řešení:

a) $|2 - x| < 5 \Leftrightarrow |x - 2| < 5 \Rightarrow x \in (2 - 5; 2 + 5)$

$$x \in (-3; 7)$$

b) $|x| \geq 2$

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

c) $|x + 2| < 5 \Leftrightarrow |x - (-2)| < 5 \Rightarrow x \in (-2 - 5; -2 + 5)$

$$x \in (-7; 3)$$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

- a) $\{x \in R; |x| \leq 1\}$
- b) $\{x \in R; |x| > 2\}$
- c) $\{x \in R; |x| < 3\}$

2) Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

- a) $\{x \in R; |x| \geq 0\}$
- b) $\{x \in R; |x - 2| \leq 5\}$
- c) $\{x \in R; |x + 2| < 5\}$

3) Určete sjednocení a průnik intervalů:

- a) $\langle -2; 1 \rangle; \langle 0; 3 \rangle$
- b) $\langle -2; 3 \rangle; \langle 3; 5 \rangle$
- c) $\langle -3; -1 \rangle; \langle -1; 4 \rangle$

4) Určete sjednocení a průnik intervalů:

- a) $(1; +\infty); (3; +\infty)$
- b) $(-\infty; -1); \langle -2; +\infty \rangle$
- c) $(-\infty; 2); \langle 2; +\infty \rangle$

1.) a) $\langle -1, 1 \rangle$, b) není, c) $\langle -3, 3 \rangle$

2.) a) $(-\infty, +\infty)$, b) $\langle -3, 7 \rangle$, c) $\langle -7, 3 \rangle$

3.) a) $\langle -2, 3 \rangle; \langle 0, 1 \rangle$, b) $\langle -2, 5 \rangle; \emptyset$, c) $\langle -3, -1 \rangle \cup \langle -1, 4 \rangle$

4.) a) $(1, +\infty); (3, +\infty)$, b) $(-\infty, +\infty); \langle -2, -1 \rangle$, c) $(-\infty, +\infty); \{2\}$

Výrazy

Výraz je zápis skládající se z čísel a písmen označujících proměnné, které jsou spojeny matematickými znaky (např. $+$, $-$, $\sqrt{\quad}$, \cdot).

Pro proměnné je třeba stanovit obory proměnných, což jsou množiny čísel, která můžeme dosazovat za proměnné tak, že má daný výraz smysl.

Hodnota výrazu je číslo, které dostaneme po dosazení za všechny proměnné z jejich oborů a provedení všech početních operací.

Algebraické výrazy jsou výrazy, jejichž každá proměnná má za svůj obor číselnou množinu.

Pozn.: Obvykle poznáme ze souvislostí, zda jde o algebraický výraz a slovo „algebraický“ vynecháváme.

Mnohočleny

Mnohočlen (polynom) s jednou proměnnou je výraz, který lze napsat ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou reálná čísla, n celé nezáporné číslo a x proměnná; je-li $a_n \neq 0$, tj. když koeficient u proměnné s největším exponentem je nenulový, jde o mnohočlen n –tého stupně. Čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se nazývají koeficienty mnohočlenu, jeho jednotliví sčítanci, tj. výrazy $a_x k^x$, kde $0 \leq k \leq n$, se nazývají členy mnohočlenu. Koeficient a_0 se nazývá **absolutní člen**, člen $a_1 x$ **lineární člen** a člen $a_2 x^2$ se nazývá **kvadratický člen** mnohočlenu. Podle počtu členů mnohočlenu mluvíme o jednočlenu, dvojčlenu, trojčlenu atd. Mnohočlen 1. Stupně (zapisuje se obvykle $ax + b$ místo $a_1 x + a_0$) se nazývá lineární, mnohočlen 2. Stupně (zapisuje se obvyčejně ve tvaru $ax^2 + bx + c$) se nazývá kvadratický, mnohočlen 3. stupně se nazývá kubický.

Opačný mnohočlen k danému mnohočlenu je mnohočlen, který má tytéž členy, ale s opačnými znaménky; např. dvojčlen $x - 2$ je opačný k dvojčlenu $-x + 2$, trojčlen $-3x^2 + 2x - 1$ je opačný k trojčlenu $3x^2 - 2x + 1$ apod.

Součtem obou mnohočlenů je nulový mnohočlen $(x - 2) + (-x + 2) = 0$.

Pozn.: $n = 0$

$a_0 \neq 0$... mnohočlen nultého stupně

$a_0 = 0$... nulový mnohočlen

Definice:

Říkáme, že:

- mnohočlen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ je uspořádán sestupně
- mnohočlen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ je uspořádán vzestupně

Věta: Pro libovolná $a, b \in R$ platí

$$1.) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$2.) (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$3.) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$4.) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$5.) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Definice:

Rozkladem mnohočlenu na součin rozumíme jeho vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které už se zpravidla nedají dále rozložit. Rozklad provádíme 2 způsoby:

- a) vytýkáním
- b) užitím vzorců

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ můžeme zapsat ve tvaru $a(x - x_1)(x - x_2)$; kde x_1, x_2 jsou řešením příslušné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Pozn.: Nemá-li kvadratická rovnice řešení, tak se trojčlen nedá rozložit na součin.

Mnohočleny

Varianta A

Příklad: Zjistěte, pro které hodnoty jednotlivých proměnných má každý z následujících výrazů smysl, a určete jeho hodnotu pro dané hodnoty proměnných:

a) $\frac{x}{x-3}; x = 2$

b) $\frac{\sqrt{y-3}}{x^2-4}; x = 1, y = 4$

c) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{y+1}(|z-2|-1)}; x = 0, y = 0, z = 0$

Řešení:

a) Výraz má smysl pro všechna $x \in R$, pro něž je $3 - x \neq 0$, tj. pro všechna $x \in R, x \neq 3$. Jeho hodnota pro $x = 2$ je $\frac{2}{3-2} = 2$.

b) Aby měl daný výraz smysl, musí platit $y - 3 \geq 0$ tj. $y \geq 3$ a zároveň $x \neq 2$ a $x \neq -2$.
Hodnota daného výrazu pro $x = 1, y = 4$ je $\frac{\sqrt{4-3}}{1^2-4} = -\frac{1}{3}$.

c) Aby měl daný výraz smysl, musí zároveň platit:

$$x^2 + 4 \geq 0, y + 1 > 0, |z - 2| - 1 \neq 0;$$

První z těchto podmínek je splněna pro každé $x \in R$, druhá pro všechny $y \in R, y > -1$ a třetí pro všechna $z \in R$, pro něž je $|z - 2| \neq 1$, tj. pro $z \neq 3$ a $z \neq 1$.

Hodnota daného výrazu pro $x = y = z = 0$ je $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}(|-2|-1)} = \frac{2}{2-1} = 2$.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Zjistěte, kdy má každý z následujících výrazů smysl, a určete jeho hodnotu pro dané hodnoty proměnných:

a) $\frac{\sqrt{x-1}}{(y-1)(y+2)}$, $x = 2$, $y = 2$

b) $1 + \frac{x}{\sqrt{x}}$, $x = 1$

2) Zjistěte, kdy má každý z následujících výrazů smysl, a určete jeho hodnotu pro dané hodnoty proměnných:

a) $\frac{\sqrt{1-x}}{x(x^2+3)}$, $x = -3$

b) $\sqrt{\frac{x-2}{|x-2|}} + \sqrt{x}$, $x = 3$

3) Určete součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel, jestliže:

a) nejmenší je rovno $4k$

b) největší je rovno $3x + 1$

4) Pomocí zvolených proměnných zapište:

a) druhou odmocninu ze součtu druhých odmocnin dvou reálných čísel;

b) druhou odmocninu podílu součtu druhých odmocnin dvou reálných čísel a druhé odmocniny součtu těchto čísel;

c) součet podílu druhých odmocnin dvou reálných čísel a druhé odmocniny podílu těchto čísel.

1.) a) $x \geq 1, y \neq 1, y \neq -2; \frac{1}{4}$, b) $x > 0; 2$

2.) a) $x \leq 1, x \neq 0; -\frac{1}{18}$, b) $x > 2, 1 + \sqrt{3}$,

3.) a), b)

4.) a) $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, b) $\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}}$, c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$

Mnohočleny

Varianta B

Příklad: Určete podíl $(21t^3 - 31t^2 + 39t - 6) : (7t - 1)$

Řešení:

Uspořádáme oba mnohočleny sestupně.

$$\begin{array}{r}
 (21t^3 - 31t^2 + 39t - 6) : (7t - 1) = 3t^2 - 4t + 5 \\
 \underline{-(21t^3 - 3t^2)} \\
 -28t^2 + 39t - 6 \\
 \underline{-(-28t^2 + 4t)} \\
 35t - 6 \\
 \underline{-(35t - 5)} \\
 -1
 \end{array}$$

Jednočlen -1 v posledním řádku je mnohočlen nultého stupně, tj. mnohočlen stupně nižšího, než je stupeň dělitele, takže v dělení dále nepokračujeme. Jednočlen -1 představuje zbytek; mnohočlenu $3t^2 - 4t + 5$ se říká neúplný podíl.

Dostali jsme tedy, že pro všechna $t \in R$, pro něž je $7t - 1 \neq 0$, platí:

$$(21t^3 - 31t^2 + 39t - 6) : (7t - 1) = 3t^2 - 4t + 5 - \frac{1}{7t - 1}$$

Je vidět, že v tomto případě podílem daných mnohočlenů není mnohočlen. O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou:

$$\left(3t^2 - 4t + 5 - \frac{1}{7t-1}\right) \cdot (7t - 1) = 21t^3 - 31t^2 + 39t - 6.$$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Určete podíl:

$$(2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2) : (2 - x + x^3 - x^4)$$

2) Určete podíl mnohočlenů:

a) $(3y^3 - y + 11) : (y^2 - 8y)$

b) $(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) : (x + 2)$

3) Určete podíl mnohočlenů:

a) $(a^7 + 2) : (a + 1)$

b) $(14t^5 + 4t^4 - t^3 + 2t^2 + 3t + 5) : (2t^2 - 1)$

4) Výraz $ab + c$ vyjádřete jako mnohočlen s proměnnou x , který je uspořádaný sestupně, je-li:

a) $a = x + 1, b = x^2 - 1, c = x^3 + 1$

b) $a = 2x - 1, b = 2x - 1, c = x$

1.) $-2x^3 + 3x^2 - 1$

2.) a) $3y + 24 + \frac{191y+11}{y^2-8y}$, b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

3.) a) $a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 + \frac{1}{a+1}$,

b) $7t^3 + 2t^2 + 3t + 2 + \frac{6t+7}{2t^2-1}$

4.) a) $2x^3 + x^2 - x$, b) $4x^2 - 3x + 1$

Mnohočleny

Varianta C

Příklad: Rozložte následující mnohočleny:

a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$

b) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$

c) Rozložte kvadratický trojčlen v součin lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty

$$x^2 + 10x + 24$$

d) Rozložte kvadratický trojčlen v součin lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty

$$x^2 - x - 6$$

Řešení: Způsob, kterým nalezneme požadovaný rozklad, je bezprostředně patrný z výpočtu:

$$\begin{aligned} \text{a) } x^5 + x^3 - x^2 - 1 &= x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^3 - 1) = \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\text{b) } a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc = (a + b)^2 - c(a + b) = (a + b)(a + b - c)$$

c) Pro celá čísla r, s , pro něž je $(x - r)(x - s) = x^2 + 10x + 24$, musí platit:

$rs = 24$ a $r + s = -10$. Je ihned vidět, že jsou to čísla -6 a -4 , takže dostáváme výsledek:

$$x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$$

Nepodaří-li se nám tato čísla určit z paměti, vypíšeme si všechny způsoby, jimiž lze číslo 24 vyjádřit jako součin dvou celých čísel, dostaneme tak

$$\begin{aligned} 24 &= 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = (-1)(-24) = (-2)(-12) = (-3)(-8) \\ &= (-4)(-6) \end{aligned}$$

Ze všech těchto čísel jedině čísla $-4, -6$ dají součet -10 .

d) Platí:

$$-6 = 1 \cdot (-6) = 2 \cdot (-3) = (-1) \cdot 6 = (-2) \cdot 3;$$

a protože je též $1 = -2 + 3$

dostaneme požadovaný rozklad:

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

Příklad:[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)**Příklady k procvičení:**

1) Rozložte mnohočleny:

a) $xr - yr - x^2 + 2xy - y^2$

b) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$

2) Rozložte mnohočleny:

a) $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$

b) $(x + y)^4 - x^4$

3) Rozložte kvadratické trojčleny:

a) $x^2 - 6x + 8$

b) $x^2 + 6x + 8$

c) $x^2 - 2x - 15$

d) $x^2 + x - 12$

4) Určete nejvhodnější společný násobek daných výrazů:

a) $x^2 + 8x + 16, 9x^2 - 144$

b) $x^2 - 7x + 10, x^2 - 25, x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

1.) a) $(x - y)(r - x + y)$, b) $-x(12a - 5x)$

2.) a) $12x(x - 2)$, b) $y(2x + y)(2x^2 + y^2 + 2xy)$

3.) a) $(x - 2)(x - 4)$, b) $(x + 2)(x + 4)$, c) $(x + 3)(x - 5)$,

d) $(x + 4)(x - 3)$

4.) a) $9(x^2 - 16)(x + 4)$, b) $(x - 2)^3(x^2 - 25)$

Lomené výrazy

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Lomené výrazy jsou výrazy zapsané ve tvaru zlomku.

Definice:

Krátit lomený výraz znamená dělit čitatele i jmenovatele stejným výrazem různým od nuly.

Rozšířit lomený výraz znamená násobit čitatele i jmenovatele stejným výrazem různým od nuly.

Krácení a rozšiřování lze zapsat symbolicky:

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0, V_3 \neq 0$ platí:

Krácení \rightarrow

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

Rozšiřování \leftarrow

Sčítání a násobení lomených výrazů

Definice:

Dva lomené výrazy násobíme tak, že násobíme čitatele čitatelem a jmenovatele jmenovatelem, předtím se snažíme co nejvíce zkrátit.

Sečíst dva lomené výrazy znamená upravit je na společného jmenovatele a sečíst čitatele.

Lze zapsat symbolicky:

Sčítání

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$,

$V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1V_4 + V_2V_3}{V_2V_4}$$

Násobení

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$,

$V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$$

Pozn.: Při násobení jednotlivé výrazy „neroznásobujeme“, naopak, snažíme se je vhodně rozložit a podle možnosti i krátit. Tato zásada platí ostatně obecně, nejen pro násobení.

Umocňování

Pro libovolné výrazy V_1, V_2 a libovolné přirozené číslo k a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, platí:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}$$

Dělení lomených výrazů

Definice:

Dělit lomeným výrazem znamená násobit výrazem k němu převráceným.

Lze zapsat symbolicky:

Dělení

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}$$

Složený lomený výraz

Složený lomený výraz je lomený výraz, který má v čitateli i jmenovateli zlomek.

Zjednodušení složeného lomeného výrazu

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

Lomené výrazy

Varianta A

Příklad: Krafte lomené výrazy:

a)

$$\frac{48a^2xy^2}{36a^2x^2y}$$

b)

$$\frac{9a^2(p^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)}{6a^5(p + 2)(x^2 - 1)}$$

c)

$$\frac{9p^2 + 1}{(3p + 1)(3p - 1)}$$

Řešení:

a) Daný výraz má smysl pro všechna $a \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$. Za těchto předpokladů platí:

$$\frac{48a^2xy^2}{36a^2x^2y} = \frac{4 \cdot 12a^2x \cdot y \cdot y}{3 \cdot 12a^2x \cdot x \cdot y} = \frac{4y}{3x}$$

Daný lomený výraz jsme krátili jednočlenem $12a^2xy$, což je společný dělitel mnohočlenů $48a^2xy^2, 36a^2x^2y$. Uvědomte si ještě, že rovnost mezi původním výrazem a výrazem, který jsme dostali krácením, platí pro ty hodnoty proměnných, pro něž mají smysl oba tyto výrazy, tj. pro $a \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$; nestačí jen požadavek $x \neq 0$, který je nutný k tomu, aby měl smysl upravený výraz.

b) Daný výraz má smysl pro všechna $a \neq 0, p \neq -2, x \neq 1, x \neq -1$. Za těchto předpokladů platí:

$$\begin{aligned} \frac{9a^2(p^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)}{6a^5(p + 2)(x^2 - 1)} &= \frac{3 \cdot 3a^2(p - 2)(p + 2)(x + 1)(x + 1)}{2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a^3(p + 2)(x - 1)(x + 1)} = \\ &= \frac{3(p - 2)(x + 1)}{2a^3(x - 1)} \end{aligned}$$

Daný zlomek jsme krátili výrazem $3a^2(p + 2)(x + 1)$, což je společný dělitel mnohočlenů $9a^2(p^2 - 4)(x + 1)^2, 6a^5(p + 2)(x^2 - 1)$.

c) Daný výraz je definován pro všechna $p \neq -\frac{1}{3}$ a $p \neq \frac{1}{3}$; nelze jej však krácením zjednodušit.

Příklad:[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)**Příklady k procvičení:**

1) Kračte lomené výrazy a uveďte, kdy má tato úprava smysl:

a) $\frac{3a^2-3ab}{3(a-b)^2}$

b) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

2) Kračte lomené výrazy a uveďte, kdy má tato úprava smysl:

a) $\frac{4-4t+t^2}{t^2-4}$

b) $\frac{20x^2-45y^2}{(2x+3y)^2}$

3) Zjednodušte krácením:

a) $\frac{r^3-1}{r^2-1}$

b) $\frac{3xy+9y-2x-6}{3xy-2x-9y+6}$

4) Vyjádřete daný zlomek tak, aby v jeho jmenovateli nebylo iracionální číslo:

a) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

1.) a) $\frac{a}{a-b}, a \neq b$, b) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}, x \neq y, x \neq -y$

2.) a) $\frac{t-2}{t+2}, t \neq \pm 2$, b) $\frac{5(2x-3y)}{2x+3y}, 2x \neq -3y$

3.) a) $\frac{r^2+r+1}{r+1}, r \neq \pm 1$, b) $\frac{x+3}{x-3}, x \neq 3, y \neq \frac{2}{3}$

4.) a) $-3(1 + \sqrt{2})$, b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

Lomené výrazy

Varianta B

Příklad: a) Sečtěte lomené výrazy

$$\frac{x}{y^2 - x^2} - \frac{y}{x - y}$$

a

$$\frac{a + b}{a} - \frac{a}{a - b} + \frac{b^2}{a^2 - ab}$$

b) Určete součin

$$\left(1 + \frac{a}{1 - a}\right) \frac{1 - a^2}{1 + b} \cdot \frac{1 - b^2}{a + a^2}$$

Řešení:

a) První příklad: Společným jmenovatelem je $y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2) = -(x - y)(x + y)$; je tedy

$$\begin{aligned} \frac{x}{y^2 - x^2} - \frac{y}{x - y} &= \frac{x}{-(x - y)(x + y)} - \frac{-(x + y)y}{-(x - y)(x + y)} = \\ &= \frac{x + (x + y)y}{-(x - y)(x + y)} = \frac{y^2 + xy + x}{(x + y)(y - x)}. \end{aligned}$$

Rovnost mezi původním a výsledným výrazem platí jen za předpokladu $x + y \neq 0$, $x - y \neq 0$.

Druhý příklad: Společný jmenovatel všech tří lomených výrazů je výraz $a^2 - ab = a(a - b)$; platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{a + b}{a} - \frac{a}{a - b} + \frac{b^2}{a^2 - ab} &= \frac{(a + b)(a - b)}{a(a - b)} - \frac{a^2}{a(a - b)} + \frac{b^2}{a(a - b)} = \\ &= \frac{a^2 - b^2 - a^2 + b^2}{a(a - b)} = 0; \end{aligned}$$

Tato rovnost platí pro všechna $a \neq 0$, $a \neq b$.

b) Postup je patrný z výpočtu:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) \frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{a+a^2} = \\ & = \frac{(1-a)+a}{1-a} \cdot \frac{(1-a)(1+a)}{1+b} \cdot \frac{(1-b)(1+b)}{a(1+a)} = \frac{1-b}{a} \end{aligned}$$

Což platí pro všechna $a \neq 1, a \neq 0, a \neq -1, b \neq -1$.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vypočtěte:

a) $\frac{2p+q}{p^2+pq} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q}$

b) $\frac{x-y}{xy} - \frac{z-y}{yz} + \frac{x+z}{xz}$

2) Vypočtěte:

a) $\frac{4}{3x-3y} - \frac{3x-4y}{2x^2-4xy+2y^2}$

b) $\frac{1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1} - \frac{4t}{t^2-1} - 1$

3) Proved'te:

a) $\left(\frac{3}{1+x} - 1\right)\left(\frac{3}{2-x} - 1\right)$

b) $\left(y + 1 + \frac{1}{2y-1}\right)\left(y - 1 + \frac{1}{2y+1}\right)$

4) Vypočtěte:

a) $\frac{3x^2+3xy+3y^2}{4x+4y} \cdot \frac{2x^2-2y^2}{9x^3-9y^3}$

b) $(p+q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$

1.) a) $\frac{2}{p}, p \neq 0, p \neq -q$, b) $\frac{2}{z}, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

2.) a) $\frac{4y-x}{6(x-y)^2}, x \neq y$, b) $\frac{3-5t}{t^2-1}, t \neq \pm 1$

3.) a) $1, x \neq -1, x \neq 2$, b) $y^2, y \neq \pm \frac{1}{2}$

4.) a) $\frac{1}{6}, x+y \neq 0, x-y \neq 0, x^2+xy+y^2 \neq 0$,

b) $pq, p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0$

Lomené výrazy

Varianta C

Příklad:

a) Určete

$$\frac{a^2 + ax}{x - x^2} : \frac{x^2 + ax}{a - ax}$$

b) Zjednodušte výraz

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$$

c) Vyjádřete ze vzorce d_2

$$v = \frac{(d_1 + d_2)v_1v_2}{d_1v_2 + d_2v_1}$$

$$a) \frac{a^2+ax}{x-x^2} : \frac{x^2+ax}{a-ax} = \frac{a(a+x)}{x(1-x)} \cdot \frac{a(1-x)}{x(x+y)} = \frac{a}{x} \cdot \frac{a}{x} = \left(\frac{a}{x}\right)^2$$

Což platí pro všechna $x \neq 0, x \neq 1, a \neq 0, x + a \neq 0$.

$$b) \frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = 1$$

Což platí pro všechna a, b , pro něž je $a + b \neq 0, a - b \neq 0$.

c) Proměnnou d_2 považujeme v rovnici

$$v = \frac{(d_1 + d_2)v_1v_2}{d_1v_2 + d_2v_1}$$

za neznámou, ostatní proměnné bereme jako konstanty. Vynásobením této rovnice výrazem $d_1v_2 + d_2v_1$ a úpravou pravé strany dostaneme

$$vd_1v_2 + vd_2v_1 = d_1v_1v_2 + d_2v_1v_2;$$

rovnici upravíme tak, aby výrazy s neznámou d_2 byly na levé straně a zbývající výrazy na pravé straně rovnice; po úpravě dostaneme

$$d_2v_1(v - v_2) = d_1v_2(v_1 - v),$$

odtud již snadno neznámou d_2 vyjádříme:

$$d_2 = \frac{d_1v_2(v_1 - v)}{v_1(v - v_2)}$$

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Určete:

a) $\frac{x^2+xy}{5x^2-5y^2} : \frac{x^2-xy}{3x^2-3y^2}$

b) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

2) Určete:

a) $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right)$

b) $\left(y - 2 + \frac{3}{y}\right) : \left(1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right)$

3) Zjednodušte složený zlomek:

a) $\frac{\left(\frac{x+y}{y} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2+y^2}{y^2+x^2} - \left(\frac{x+y}{y} + \frac{y}{x}\right)}$

4) Zjednodušte složený zlomek:

a) $\frac{\left(1 + \frac{z}{x+y} + \frac{z^2}{(x+y)^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{(x+y)^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^3}{(x+y)^3}\right)\left(1 + \frac{z}{x+y}\right)}$

1.) a) $\frac{3(x+y)}{5(x-y)}, x \neq y, x \neq -y, x \neq 0$, b) $\frac{b+a}{b-a}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$

2.) a) $\frac{x+1}{x-1}, x \neq 0, x \neq \pm 1$, b) $\frac{y(y^2-2y+3)}{y^2+y+1}, y \neq 0, y^2 + y + 1 \neq 0$

3.) a) $\frac{1}{xy}, xy \neq 0, x - y \neq 0$

4.) a) $1, x + y \neq 0, |x + y| \neq z$

Elementární teorie čísel

Zápisy přirozených čísel, násobek a dělitel čísla

Zápis přirozených čísel:

- a) Ciferný (zkrácený): 34125
 b) Rozvinutý: $3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Obecně: $abcd = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$

Definice:

Číslo a je **násobek** čísla b (číslo b je **dělitelem** čísla a), právě když existuje přirozené číslo k takové, že $a = kb$.

Zapisujeme b/a , čteme „ b “ dělí „ a “ nebo „ b “ je dělitelem „ a “.

Věta:

Pro každé $n \in N$ platí „1“ dělí „ n “.

Společným dělitelem čísel $a, b \in N$ nazveme takové číslo $c \in N$, pro které platí: $c/a \wedge c/b$.

Pozn.: Každá dvě čísla mají alespoň jednoho společného dělitele a tím je číslo 1.

Definice:

Čísla $a, b \in N$ nazveme nesoudělná právě když, jejich jediným společným dělitelem je číslo 1.

Pozn.: Každá dvě čísla $a, b \in N$, která nejsou nesoudělná nazveme soudělná. Této vlastnosti využíváme např. při krácení zlomků.

Věta:

Každé přirozené číslo n lze pomocí přirozeného čísla $b > 1$ vyjádřit jedním z výrazů $bk, bk + 1, bk + 2, \dots, bk + (b - 1)$, kde $k \in N_0$; stručněji $n = bk + z$, kde $k \in N_0$, $z \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$.

Zápis čísel pomocí násobků přirozených čísel a zbytků.

Např.

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$1 = 3 \cdot 0 + 1$$

$$1 = 4 \cdot 0 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$2 = 3 \cdot 0 + 2$$

$$2 = 4 \cdot 0 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$3 = 3 \cdot 1 + 0$$

$$3 = 4 \cdot 0 + 3$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 0$$

$$4 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 4 \cdot 1 + 1$$

Znaky dělitelnosti

Věta: Pro $\forall n \in \mathbb{N}$

- a) $2/n$ právě když je poslední cifra z množiny $\{0,2,4,6,8\}$
- b) $3/n$ právě když ciferný součet je dělitelný třemi

Pozn.: Navíc platí, že jaký zbytek dostaneme při dělení ciferného součtu, takový zbytek dostaneme při dělení původního čísla.

- c) $4/n$ právě když poslední dvojčíslí je dělitelné 4
- d) $5/n$ právě když poslední cifra je z množiny $\{0,5\}$
- e) $6/n$ právě když $2/n \wedge 3/n$
- f) $7/n$ právě když $7/S'$

Ciferný zápis: $a_n \dots a_9 a_8 a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$

$$S' = a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 - a_9 - 3a_{10} - 2a_{11} + \dots$$

Př.: $7/46\ 126\ 899\ ?$

$$\begin{aligned} S' &= 9 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8 - 6 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 6 + 3 \cdot 4 = 9 + 27 + 16 - 6 - 6 - 2 + 6 + 12 \\ &= 56 = 7 \cdot 8 \end{aligned}$$

Pozn.: Platí i pro zbytky.

- g) $8/n$ právě když poslední trojčíslí je dělitelné 8
- h) $9/n$ právě když je ciferný součet dělitelný 9
- i) $10/n$ právě když poslední cifra je 0
- j) $11/n$ právě když $11/S''$, kde $S'' = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \dots$

Př.: $11/16856,931?$

$$S'' = 1 - 3 + 9 - 6 + 5 - 8 + 6 - 1 = 3, \quad 11/3 \Rightarrow \text{není dělitelné } 11$$

$11/43,492,350?$

$$S'' = 0 - 5 + 3 - 2 + 9 - 4 + 3 - 4 = 0, \quad 11/0 \Rightarrow \text{je dělitelné } 11$$

- k) $20/n$ právě když poslední dvojčíslí je dělitelné 20
- l) $25/n$ právě když poslední dvojčíslí je dělitelné 25
- m) $50/n$ právě když poslední dvojčíslí je dělitelné 50
- n) $100/n$ právě když poslední dvě cifry jsou 0
- o) $125/n$ právě když poslední trojčíslí je dělitelné 125
- p) $12/n$ právě když $3/n \wedge 4/n$

Prvočísla a čísla složená

Definice:

Prvočíslem nazveme každé $n \in N$ takové, které je dělitelné pouze číslem 1 a číslem n .

Složeným číslem nazveme každé $n \in N$ takové, které má alespoň tři různé dělitele.

Věta:

Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p , pro které platí

$$p \leq \sqrt{n}.$$

Základní věta aritmetiky:

Každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$,

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ jsou prvočísla a r_1, r_2, \dots, r_k jsou přirozená čísla.

Pozn.: Prvočíselná dvojčata jsou prvočísla, mezi kterými leží jediné přirozené číslo.

Např.: 3 a 5, 5 a 7, 11 a 13

Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

Definice:

Největší společný dělitel čísel a, b, c je součin mocnin těch prvočísel, která se vyskytují současně ve všech prvočíselných rozkladech čísel a, b, c ; přitom exponent každého prvočísla je nejmenší exponent vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel a, b, c .

Označení $D(a, b, c)$.

Definice:

Nejmenší společný násobek čísel a, b, c je součin mocnin všech prvočísel, která se vyskytují aspoň v jednom prvočíselném rozkladu čísel a, b, c přitom exponent každého prvočísla je největší exponent vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel a, b, c .

Označení $n(a, b, c)$.

Elementární teorie čísel

Varianta A

Příklad: Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti.

Řešení:

Výraz $n^3 - n$ výtknutím a užitím vzorce pro rozdíl druhých mocnin rozložíme na součin:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Dostali jsme součin tří za sebou následujících přirozených čísel. Aspoň jedno z těchto čísel je dělitelné dvěma, právě jedno z nich je dělitelné třemi, proto jejich součin je dělitelný šesti.

Ne vždy se nám podaří rozložit výraz na součin několika za sebou následujících přirozených čísel. V takových případech zpravidla použijeme zápis přirozeného čísla ve tvaru $n = bk + z$, kde $k \in N_0, z \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Upravte dané zlomky na základní tvar:

a) $\frac{360}{504}$

b) $\frac{1188}{2484}$

c) $\frac{1080}{2700}$

2) Pomocí proměnné k , kde $k \in N_0$, vyjádřete:

- a) libovolné přirozené číslo, které je násobkem šesti
- b) libovolné přirozené číslo, které při dělení třemi dá zbytek 2
- c) libovolné liché přirozené číslo
- d) libovolné přirozené číslo, které při dělení osmi dá zbytek 4

3) Uveďte všechny zápisy, které využívají násobky šesti a slouží k vyjádření libovolného přirozeného čísla.

4) První z dvou čísel vyjádřete jako součet co největšího násobku druhého čísla a zbytku:

a) 11; 3

b) 105; 7

c) 75; 12

1.) a) $\frac{5}{7}$, b) $\frac{11}{23}$, c) $\frac{2}{5}$

2.) a) $6k$, b) $3k + 2$, c) $2k + 1$, d) $8k + 4$

3.) $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$, kde $k \in N_0$

4.) a) $11 = 3 \cdot 3 + 2$, b) $105 = 7 \cdot 15$, c) $75 = 12 \cdot 6 + 3$

Elementární teorie čísel

Varianta B

Příklad: Rozhodněte, zda čísla 1032 a 672534 jsou dělitelná třemi či devíti. Poté proveďte prvočíselný rozklad čísla 1032.

Řešení:

Ciferný součet čísla 1032 je číslo 6. Číslo 6 je dělitelné třemi, proto číslo 1032 je dělitelné třemi. Číslo 6 není dělitelné devíti, proto číslo 1032 není dělitelné devíti.

Ciferný součet čísla 672534 je 27, což je číslo dělitelné třemi i devíti. Proto číslo 672534 je dělitelné třemi i devíti.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Proved'te zápis prvočíselného rozkladu čísel:

a) 72

b) 5775

2) Proved'te zápis prvočíselného rozkladu čísel:

a) 210

b) 495

3) Upravte dané zlomky na základní tvar:

a) $\frac{91}{104}$

b) $\frac{1825}{3200}$

4) Upravte dané zlomky na základní tvar:

a) $\frac{696}{2088}$

b) $\frac{3600}{4062}$

1.) a) $2^3 \cdot 3^2$, b) $3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

2.) a) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, b) $3^2 \cdot 5$.

3.) a) $\frac{7}{8}$, b) $\frac{73}{128}$

4.) a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{600}{677}$

Elementární teorie čísel

Varianta C

Příklad: Určete největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek čísel 756 a 11760.

Řešení:

$$\begin{aligned}756 &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \\11760 &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \\D(756,11760) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \\n(756,11760) &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105840\end{aligned}$$

Součin $756 \cdot 11760 = 8890560$.

Součin $D(756,11760) \cdot n(756,11760) = 84 \cdot 105840 = 8890560$

V obou případech nám vyšel stejný výsledek. Je to náhoda, nebo pro všechna přirozená čísla a, b platí

$$a \cdot b = D(a, b) \cdot n(a, b) ?$$

Všimněme si pozorně prvočíselných rozkladů daných čísel, $D(756,11760)$ a $n(756,11760)$. Vyskytuje-li se mocnina prvočísla v obou prvočíselných rozkladech daných čísel, uplatníme vždy menší mocninu každého prvočísla v největším společném děliteli a větší mocninu každého prvočísla v nejmenším společném násobku. Vyskytuje-li se mocnina prvočísla jen v prvočíselném rozkladu jednoho čísla, uplatníme ji v nejmenším společném násobku. To platí pro libovolná dvě přirozená čísla. To znamená, že každá mocnina prvočísla z rozkladu dvou čísel a, b se vyskytuje v součinu $D(a, b) \cdot n(a, b)$.

Pozor, pro tři a více čísel obdobná věta neplatí!

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Vyjádřete dané zlomky v základním tvaru:

a) $\frac{576}{2016}$

b) $\frac{5544}{8568}$

2) Najděte nejmenší společný násobek čísel 6, 21, 28.

3) Najděte největšího společného dělitele čísel 36, 48, 60.

4) V krabici tvaru kvádrů jsou ve čtyřech vrstvách uloženy čtyři druhy krychlí. V první vrstvě jsou krychle s hranou délky 12cm. V každé následující vrstvě je délka hrany krychle o 2cm menší než délka hrany krychle v přecházející vrstvě. Za předpokladu, že mezi stěnami krabice a krychlemi i mezi krychlemi navzájem nejsou žádné mezery, vypočítejte

a) jaké jsou nejmenší možné vnitřní rozměry krabice

b) kolik krychlí jednotlivých druhů je v této nejmenší možné krabici

1.) a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{11}{17}$

2.) 84

3.) 12

4.) a) 120cm, 120cm, 36cm, b) 100, 144, 225, 400

Výroky

Výrok a jeho negace

Definice:

Výrok je tvrzení, o němž má smysl tvrdit, zda je nebo není pravdivé (nastává právě jedna z těchto možností).

Např.:

v_1 : Úhlopříčky čtverce jsou navzájem kolmé.

v_2 : Číslo 5 je liché.

v_3 : Praha je hlavní město Slovenska.

Označení: a, b, v, \dots nebo: A, B, V, \dots

Definice:

Negací výroku v rozumíme výrok ve tvaru „Není pravda, že v .“ Negaci značíme $v', \bar{v}, \text{non } v$.

Pozn. 1: Je-li v pravdivý, pak v' je nepravdivá.

Je-li v nepravdivý, pak v' je pravdivá.

Pozn. 2: Negace výroků lze tvořit i jiným způsobem.

- a) v : Trojúhelník ABC není ostroúhlý. (tzn. je pravouhlý nebo tupouhlý)
- b) v' : Trojúhelník ABC je ostroúhlý.

Pozn. 3: V negaci musí být obsaženy všechny ostatní možnosti, které mohou nastat.

Zvláštním způsobem tvoříme negace tvrzení ve tvaru: „alespoň“, „nejvýše“.

v : Množina M má alespoň k prvků.

v' : Množina M má nejvýše $k - 1$ prvků.

v : Množina M má nejvýše k prvků.

v' : Množina M má alespoň $k + 1$ prvků.

Kvantifikované výroky jsou takové výroky, u nichž blíže specifikujeme jejich platnost nebo neplatnost pro určitý počet prvků, podmínek.

Negace kvantifikovaných výroků:

- 1) **a** : Pro každý prvek x z množiny M platí, že má danou vlastnost.
 a' : Existuje aspoň jeden prvek x z množiny M , který danou vlastnost nemá.
- 2) **a** : Existuje aspoň jeden prvek x z množiny M , který má danou vlastnost.
 a' : Pro každý prvek x z množiny M platí, že nemají danou vlastnost.

Složené výroky

Definice:

Konjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne spojením těchto výroků spojkou **a**, resp. **a zároveň**; zapisujeme ji $a \wedge b$ a čteme: „ a a b “ resp. „ a a zároveň b “.

Definice:

Disjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne spojením těchto výroků spojkou **nebo**; zapisujeme ji $a \vee b$ a čteme: „ a nebo b “.

Definice:

Implikace je výrok typu „jestliže a , pak b “, kde a, b jsou libovolné výroky; výrok „jestliže a , pak b “ zapisujeme $a \rightarrow b$ a čteme: „jestliže a , pak b “ nebo „z a plyne b “ nebo „ a implikuje b “ nebo též „platí-li a , platí b “. V této implikaci se výrok a obvykle nazývá **předpoklad**, výrok b **závěr**.

Definice:

Ekvivalence dvou libovolných výroků a, b je konjunkce implikace $a \rightarrow b$ a obrácené implikace $b \rightarrow a$, tj. výrok $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$; zapisujeme ji $a \leftrightarrow b$ a čteme: „ a je ekvivalentní s b “, resp. „ a právě tehdy, když b “ nebo též „ a je nutná a postačující podmínka pro b “. Zápis $a \leftrightarrow b$ napovídá, že jde o implikace $a \rightarrow b$ a $b \rightarrow a$.

Tabulka pravdivostních hodnot:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Výrok je pravdivý - má hodnotu **1**.

Výrok je nepravdivý - má hodnotu **0**.

a	b	$a \rightarrow b$	b'	a'	$b' \rightarrow a'$	$(a \rightarrow b) \leftrightarrow (b' \rightarrow a')$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Z tabulky je vidět, že $(b' \rightarrow a') \leftrightarrow (a \rightarrow b)$.

Implikace $b' \rightarrow a'$ se nazývá obměněná implikace

Definiční podmínky pravdivosti základních složených výroků:

Složený výrok	Podmínky jeho pravdivosti
p'	Je pravdivý výrok, právě když p je nepravdivý
$p \wedge q$	Je pravdivý výrok, právě když výroky p, q jsou oba zároveň pravdivé
$p \vee q$	Je pravdivý výrok, právě když alespoň jeden z výroků p, q je pravdivý
$p \rightarrow q$	Je pravdivý výrok, právě když nenastává případ, že výrok p je pravdivý a zároveň výrok q je nepravdivý
$p \leftrightarrow q$	Je pravdivý výrok, právě když výroky p, q jsou oba zároveň pravdivé, anebo oba zároveň nepravdivé

Negace složených výroků:

Složený výrok	Jeho negace
$p \wedge q$	$(p \wedge q)' = p' \vee q'$
$p \vee q$	$(p \vee q)' = p' \wedge q'$
$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q)' = p \wedge q'$
$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q)' = (p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$

Důkazy matematických vět

Přímý důkaz implikace $p \rightarrow q$ spočívá v tom, že sestavíme řetězec pravdivých implikací $p \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, \dots, p_n \rightarrow q$ čili $p \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_n \rightarrow q$, z čehož plyne platnost dokazované implikace.

Nepřímý důkaz implikace $p \rightarrow q$ spočívá v přímém důkazu její obměny $q' \rightarrow p'$, která je s ní ekvivalentní.

Důkaz sporem výroku v (např. implikace $p \rightarrow q$) vychází z předpokladu vlastnosti jeho negace v' : sestavíme řetězec pravdivých implikací $v' \rightarrow v_1, v_1 \rightarrow v_2, \dots, v_n \rightarrow z$ čili $v' \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow z$, kde výrok z neplatí (říkáme, že jsme dospěli ke **sporu**), odtud vyplývá, že neplatí výrok v' , a tedy platí dokazovaný výrok v .

Výroky

Varianta A

Příklad: Negujte výroky a to bez použití záporu:

- v : Trojúhelník ABC je ostroúhlý.
- v : $|5 - 7| < |5| + |-7|$.
- v : Délka úhlopříčky jednotkového čtverce je číslo racionální.
- v : Přejde Petr nebo Pavel.
- v : Jestliže přijde Michal, přijde Jan.

Řešení:

- v' : Trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý.
- v' : $|5 - 7| \geq |5| + |-7|$.
- v' : Délka úhlopříčky jednotkového čtverce je číslo iracionální.
- v' : Petr nepřejde a Pavel nepřejde.
- v' : Michal přijde a Jan nepřejde.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Negujte výroky:

- a) Karel přijde právě tehdy, když Josef přijde.
- b) Přijde Anna a Hana.

2) Vyjádřete stručně pomocí složených výroků negace těchto výroků:

- a) Máme pivo a minerálky,
- b) Osvěžíme se čajem nebo kávou,
- c) Jestliže budu obědvat vepřové, budu pít pivo.

3) Vyjádřete stručně pomocí složených výroků negace těchto výroků:

- a) Nemám hlad a nemám žízeň,
- b) Bude-li ke koupí čerstvé ovoce, nekoupím kompot,
- c) Grapefruity koupím právě tehdy, nebudou-li citrony.

4) Negujte následující tvrzení:

- a) Žádný učený z nebe nespadl,
- b) Nic nového pod sluncem,
- c) Bez práce nejsou koláče.

- 1.) a) (Bud') Karel přijde a Josef nepřijde, nebo Karel nepřijde a Josef přijde. b) Anna nepřijde nebo Hana nepřijde.
- 2) a) Nemáme pivo nebo nemáme minerálky. b) Neosvěžíme se čajem a neosvěžíme se kávou. c) Budu obědvat vepřové nebudu pít pivo.
- 3.) a) Mám hlad nebo mám žízeň. b) Bude čerstvé ovoce a koupím kompot. c) Budou citrony a koupím grapefruity nebo nekoupím grapefruity a nebudou citrony.
- 4.) a) Aspoň jeden učený spadl z nebe. b) Pod sluncem je aspoň jedna věc nová. c) Aspoň jeden koláč je bez práce.

Výroky

Varianta B

Příklad: Určete pravdivostní hodnoty složeného výroku $(A \vee B)' \wedge (A' \rightarrow B)$ při všech možných pravdivostních hodnotách A, B .

Řešení:

A	B	A'	$A' \rightarrow B$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$(A \vee B)' \wedge (A' \rightarrow B)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0

První dva sloupce vyplníme obdobně jako definiční tabulku. Třetí sloupec získáme změnou pravdivostních hodnot v prvním sloupci. Čtvrtý sloupec vyplníme tak, že přečteme na každém řádku uspořádanou dvojici pravdivostních hodnot ze třetího a druhého sloupce- $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$, každé přiřadíme podle definiční tabulky jednu z hodnot 1, 0 a zapíšeme ji na příslušné místo do čtvrtého sloupce.

Pátý, šestý a sedmý sloupec vyplníme obdobnými postupy.

Daná formule $(A \vee B)' \wedge (A' \rightarrow B)$ nabývá pouze hodnoty „nepravda“. Formule

$[(A \vee B)' \wedge (A' \rightarrow B)]'$ nabývá zřejmě ve všech případech hodnoty „pravda“.

Výrokové formule, které nabývají při všech hodnotách svých proměnných pravdivostní hodnoty „pravda“, se nazývají TAUTOLOGIE.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Ověřte pomocí tabulek , zda jsou tautologiemi tyto výrokové formule:

a) $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

b) $A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

2) Ověřte pomocí tabulek , zda jsou tautologiemi tyto výrokové formule:

a) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

b) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

3) Ověřte pomocí tabulek , zda jsou tautologiemi tyto výrokové formule:

a) $[A \rightarrow (B \vee C)] \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)]$

b) $[A \rightarrow (B \wedge C)] \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)]$

4) Pomocí tabulky ověřte, že pro libovolné výroky a, b platí:

a) $(a \wedge b)' \leftrightarrow (a' \vee b')$

b) $(a \rightarrow b)' \leftrightarrow (a \wedge b')$

1.) a) tautologie, b) tautologie.

2.) a) tautologie, b) tautologie

3.) a) tautologie, b) tautologie

4.) a) platí, b) platí

Výroky

Varianta C

Příklad:

- Dokažte: pro každé $n \in N$; n je sudé $\rightarrow n^2$ je sudé.
- Dokažte: pro každé $n \in N$; n^2 je sudé $\rightarrow n$ je sudé.
- Dokažte: $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Řešení:

- Přímý důkaz provedeme sestavením řetězce obecných vět ve tvaru implikací:
 $\forall n \in N: n \text{ je sudé} \rightarrow \exists k \in N: n = 2k \rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2 \rightarrow n^2 \text{ je sudé.}$
- Nepřímý důkaz provedeme jako přímý důkaz obměny dokazované věty
 $\forall n \in N: (n \text{ je sudé})' \rightarrow (n^2 \text{ je sudé})'$ neboli
 $\forall n \in N: n \text{ je liché} \rightarrow n^2 \text{ je liché.}$
- Důkaz sporem: Vyjdeme z předpokladu platnosti negace dokazované věty: Reálné číslo $\sqrt{2}$ je racionální. Sestavíme řetězec implikací: $\sqrt{2}$ je kladné racionální číslo $\rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in N$ jsou nesoudělná čísla (definice),

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in N \rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ (úprava),}$$

$$p^2 = 2q^2 \rightarrow p, q \text{ jsou sudá, tj. soudělná čísla (věta).}$$

Tento závěr je však ve sporu s předpokladem, že čísla p, q jsou nesoudělná.

Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Příklady k procvičení:

1) Dokažte věty:

a) $\forall n \in N: 5|n \rightarrow 30|(n^3 - n)$

b) $\forall n \in N: 2 \nmid n \rightarrow 16|(n^4 - 1)$

$m|n$ značí m dělí n , tj. n je dělitelné m .

2) Dokažte věty:

a) $\forall n \in N: 5|(n^2 + 1) \rightarrow 5 \nmid n$,

b) $\forall n \in N: 3|(n^2 + 1) \rightarrow 6 \nmid n$

3) Dokažte věty:

a) $\forall n \in N: 3|n \rightarrow 3|n^2$

b) $\forall n \in N: 3|n^2 \rightarrow 3|n$

4) Dokažte, že číslo $\sqrt{3}$ je iracionální.

1.) a) vyjdeme z rozkladu $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$; dostáváme součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel, ten je však dělitelný čísly 2 a 3, a dále podle předpokladu n je dělitelné číslem 2. Celkem tedy číslo $n^3 - n$ je dělitelné číslem $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

b) $n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n^2 - 1)$, kde podle předpokladu je $n = 2k + 1$, $k \in N_0$, takže $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$ a $n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$, přičemž jedno z čísel $k, k + 1$ je jistě sudé. Odtud plyne dokazované tvrzení.

2.) a) přímý důkaz by vycházel z toho, že podle předpokladu $n^2 + 1 = 5k$, kde $k \in N$, takže $n^2 = 5k - 1$. Odtud ale neplyne nic o dělitelnosti čísla n číslem 5. Snadno však provedeme nepřímý důkaz dokazované věty, tj. přímý důkaz její obměny

$\forall n \in N: 5|n \rightarrow 5|(n^2 + 1)$. Podle předpokladu je pak totiž $n = 5k$, kde $k \in N$, a tedy $n^2 + 1 = (5k)^2 + 1 = 25k^2 + 1 = 5 \cdot 5k^2 + 1$, takže 5 nedělí $(n^2 + 1)$,

b) nepřímý důkaz věty provedeme obdobně jako v případě a)

3.) analogicky jako v příkladu 10

4.) Použijte se důkaz sporem.