MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Určování trojúhelníků analytickými výpočty

Brno 2005 Jiří Pecl

Na tomto místě bych rád poděkoval doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za vedení mé diplomové práce, cenné rady a podněty, které mi pomohly při zpracování zadaného tématu.

Prohlašuji, že diplomovou práci jsem zpracoval samostatně a že jsem použil pouze uvedenou literaturu.

Jiří Pecl

Obsah

Úvod

Důležitým a významným odvětvím matematiky vyučovaným na středních školách je analytická geometrie. V ní se studenti učí řešit geometrické úlohy algebraickými metodami a postupy. Analytická geometrie tak „demonstruje“ provázanost algebry s geometrií.

Existuje celá řada sbírek, ve kterých jsou studentům předkládány příklady z analytické geometrie k vyřešení, nebo již vyřešené. Cílem této diplomové práce je rozšířit tuto řadu o sbírku řešených příkladů z analytické geometrie v rovině. Přesněji o sbírku, ve které jsou metodami analytické geometrie řešeny úlohy o trojúhelníku. Ty jsou díky názornosti a také zkušenostem, které již studenti mají z planimetrie, vhodné k procvičení většiny látky analytické geometrie v rovině. Přesto je takových příkladů ve většině sbírek, s výjimkou sbírky Jindry Petákové [4] a učebnice analytické geometrie pro gymnázia [3], naprostý nedostatek, nechybí-li v nich vůbec. V zadání každé úlohy jsou vždy uvedeny prvky (těžnice, výšky, středy stran apod.), ze kterých se má trojúhelník „zkonstruovat“. V tomto případě zkonstruovat znamená vypočítat souřadnice vrcholů. Čtenáři je spolu s orientačním obrázkem a výsledkem nabídnut i podrobný postup řešení.

Celý text práce je rozčleněn do pěti kapitol. V první kapitole jsou shrnuty ty teoretické poznatky z analytické geometrie v rovině, které jsou v dalších kapitolách využity při řešení příkladů. Na konci této kapitoly je uvedeno označení, které je používáno. Zbylé čtyři kapitoly jsou již věnovány řešeným příkladům. Každá z těchto čtyř kapitol jich obsahuje deset. Jistě bychom vymysleli mnoho dalších příkladů, avšak počet stran, který má diplomová práce mít, to neumožňuje.

Kapitola 1

Teoretické poznatky a označení

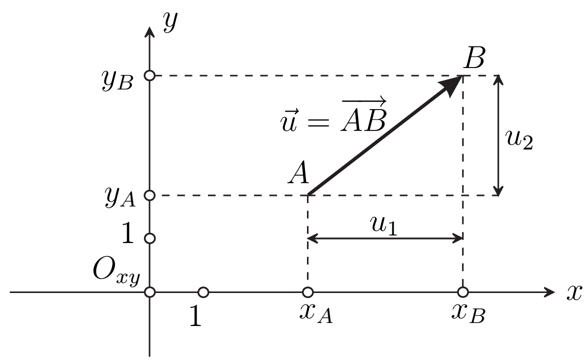
1.1 Základní pojmy

Abychom vůbec mohli algebraickými prostředky geometrické úlohy řešit, musíme nejdříve zavést tzv. **kartézskou soustavu souřadnic**:

1. zvolíme počátek O_{xy} souřadné soustavy
2. počátkem O_{xy} vedeme dvě na sebe kolmé přímky[1] - osy x, y
3. na obou osách zvolíme orientaci, tzn. určíme kladný a záporný směr
4. zvolíme jednotku, která bude na obou osách stejná

Každému bodu A jsou přiřazeny **souřadnice** - uspořádaná dvojice reálých čísel $[x_A, y_A]$.
Úsečku nazveme orientovanou, jestliže jejím krajním bodům přiřadíme pořadí, tzn. jeden její koncový bod označíme jako počáteční, druhý jako koncový. **Orientovaná úsečka** se znázorní tak, že její koncový bod opatříme šipkou (viz Obrázek 1.1).
Dvě rovnoběžné orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ nazveme souhlasně orientované, jestliže jejich koncové body B, D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC, v opačném případě

[1]Protože se jedná o sbírku příkladů z analytické geometrie v rovině, veškerá teorie je opakována pouze pro $\mathbb{E}^2$, tzn. dvojrozměrný eukleidovský prostor.



Obrázek 1.1

je nazveme nesouhlasně orientované.

Množinu všech souhlasně orientovaných úseček stejné délky nazýváme **vektor**. Vektory označujeme malými písmeny latinské abecedy se šipkou ($\vec{u}$, $\vec{v}$ apod.).

Nechť $A[x_A, y_A]$ je počáteční a $B[x_B, y_B]$ koncový bod vektoru $\vec{u}$. Číslo $u_1 = x_B - x_A$ se nazývá první, číslo $u_2 = y_B - y_A$ druhá **složka vektoru** $\vec{u}$ a píšeme $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Vektor $\vec{o} = (0, 0)$ se nazývá **nulový vektor**. Složky (u_1, u_2) vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ vyjadřují, že bod B je od bodu A vzdálen u_1 jednotek ve směru osy x a u_2 jednotek ve směru osy y. Z Pythagorovy věty je zřejmé, že pro **velikost vektoru** $\vec{u}$ platí $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ a pro velikost úsečky AB platí $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (viz Obrázek 1.1).

Pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ je vektor $\vec{v}$ k-násobkem vektoru $\vec{u}$, je-li $v_1 = k \cdot u_1$, $v_2 = k \cdot u_2$. Můžeme také psát $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Je-li $k = -1$, je $\vec{v} = -\vec{u}$ a $v_1 = -u_1$, $v_2 = -u_2$. Vektor $-\vec{u}$ se nazývá **opačný vektor** k vektoru $\vec{u}$.

Odchylka dvou nenulových vektorů $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ je konvexní úhel $\varphi = \sphericalangle BAC$. Je-li $\vec{u}$ nebo $\vec{v}$ nulový vektor, jejich odchylku nedefinujeme.

Dále se zavádí pojem **skalární součin** vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

nebo také

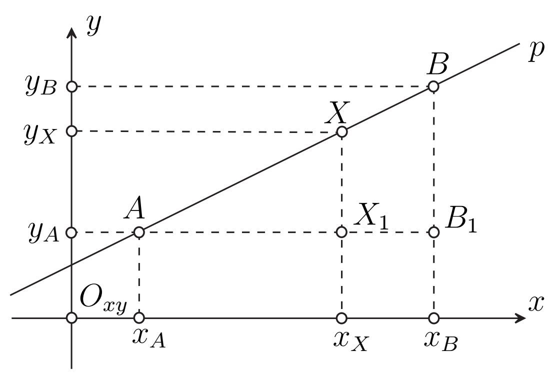
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi, \text{ kde } \varphi \text{ je odchylka vektorů } \vec{u},\ \vec{v}.$$

Úpravou druhého vztahu dostáváme v případě nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Protože $\cos\varphi = 0$ pro jediné $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, totiž $\varphi = \frac{\pi}{2}$, jsou $\vec{u}$, $\vec{v}$ kolmé, právě když $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

1.2 Parametrická rovnice přímky, polopřímky a úsečky



Obrázek 1.2

Mějme dány dva různé body $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$. Jak víme z planimetrie, existuje jediná přímka, označme ji např. p, jdoucí těmito dvěma body. Na přímce p zvolme libovolný bod X a označme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AX}$. Ze stejnolehlosti trojúhelníků AB_1B a AX_1X (viz Obrázek 1.2) plyne $\overrightarrow{AX} = t\cdot\overrightarrow{AB}$, pro některé $t \in \mathbb{R}$, takže $X - A = t\cdot\vec{u}$, odkud $X = A + t\cdot\vec{u}$. Vidíme tedy, že volbou vhodného parametru $t \in \mathbb{R}$ dostaneme libovolný bod na přímce p. Vyjádření $p : X = A + t\cdot\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$, se nazývá **parametrická rovnice přímky** p a vektor $\vec{u}$ se nazývá **směrový vektor přímky** p. Jestliže omezíme množinu pro výběr parametru t na interval $\langle 0, \infty)$ (resp. $(-\infty, 0\rangle)$), je $p : X = A + t\cdot\vec{u}$ **parametrická rovnice polopřímky** s počátečním bodem A obsahující (resp. neobsahující) bod B. Pokud $t \in \langle 0, 1\rangle$, je $p : X = A + t\cdot\vec{u}$ **parametrická rovnice úsečky** AB.

1.3 Obecná rovnice přímky

Z planimetrie víme, že v rovině existuje k dané přímce právě jedna kolmice jdoucí daným bodem. Označme tedy $\vec{n} = (a, b)$ **normálový vektor přímky** p, tj. vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky p a $P[x_P, y_P]$ bod na přímce p. Všechny body $X[x, y]$ přímky p tedy splňují rovnost

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0, \quad \text{tj.}$$

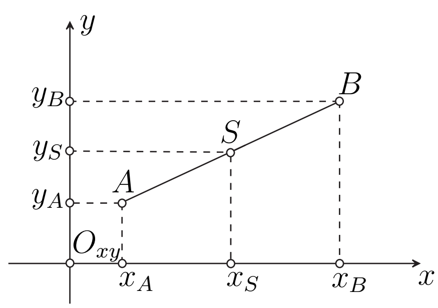
$$(a, b) \cdot (x - x_P, y - y_P) = 0$$

$$ax + by + (-ax_P - by_P) = 0$$

Označíme-li $-ax_P - by_P = c$, je výsledný tvar $ax + by + c = 0$. Vyjádření $p : ax + by + c = 0$ se nazývá **obecná rovnice přímky** p.

1.4 Polohové úlohy

- Označme $S[x_S, y_S]$ **střed úsečky** AB. Z obrázku 1.3 ihned plyne, že $x_S = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_S = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ a $S\left[\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right]$



Obrázek 1.3

- **Převedení parametrické rovnice přímky na obecnou a opačně**.

  Při převádění parametrické rovnice přímky $p : X = A + t \cdot \vec{u},\ t \in \mathbb{R}$ na obecnou rovnici

1. nalezneme normálový vektor $\vec{n} = (a, b)$ přímky p: je-li $\vec{u} = (u_1, u_2)$, je $(a, b) =$ $= (u_2, -u_1)$ (platí totiž $\vec{u} \cdot \vec{n} = u_1 u_2 + u_2(-u_1) = 0$)
2. dopočítáme absolutní člen c z obecné rovnice $p : ax+by+c = 0$, např. dosazením souřadnic bodu A: $c = -u_2 x_A + u_1 y_A$

Při převádění obecné rovnice přímky $p : ax + by + c = 0$ na parametrickou rovnici

1. nalezneme směrový vektor $\vec{u}$ přímky p: $\vec{u} = (b, -a)$
2. najdeme libovolný bod na přímce p: jednu jeho souřadnici zvolíme a druhou dopočítáme

- **Vzájemná poloha bodu a přímky.**

  Mějme parametrickou rovnici přímky $p : X = A + t \cdot \vec{u},\ t \in \mathbb{R}$, resp. její obecnou rovnici $p : ax + by + c = 0$. Bod $M[x_M, y_M]$ leží na přímce p, jestliže existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $M = A + t_0 \cdot \vec{u}$, resp. jestliže $ax_M + by_M + c = 0$. V opačném případě bod M na přímce p neleží.

- **Vzájemná poloha dvou přímek.**

  Mějme dány parametrické i obecné rovnice přímek p, q:

	parametrická rovnice	obecná rovnice
p	$X = P + t \cdot \vec{u},\ t \in \mathbb{R}$	$ax + by + c = 0$
q	$Y = Q + s \cdot \vec{v},\ s \in \mathbb{R}$	$dx + ey + f = 0$

V rovině vždy nastane jeden ze dvou případů:

– p, q jsou rovnoběžné - různé nebo splývající

– p, q jsou různoběžné

Přímky p, q jsou rovnoběžné, platí-li: $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $(a, b) \parallel (d, e)$, $\vec{u} \cdot (d, e) = 0$, resp. $(a, b) \cdot \vec{v} = 0$. K tomu, abychom byli schopni rozhodnout, zda jsou p, q **rovnoběžné přímky**, stačí ověřit jeden z těchto vztahů. Je-li $p \parallel q$ a jestliže navíc pro libovolný bod $M[x_M, y_M] \in p$ platí $M = Q + s_0 \cdot \vec{v}$ pro některé $s_0 \in \mathbb{R}$, resp. $dx_M + ey_M + f = 0$, jsou přímky p, q splývající (totožné).

Jsou-li p, q **různoběžné přímky**, pak pro jejich průsečík $M[x_M, y_M]$ platí:

$$M = P + t_0 \cdot \vec{u} = Q + s_0 \cdot \vec{v} \ \text{ pro některé } t_0, s_0 \in \mathbb{R}$$

resp.

$$ax_M + by_M + c = dx_M + ey_M + f = 0$$

Odtud plyne způsob, jakým se souřadnice $[x_M, y_M]$ bodu M spočítají:

- řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_M: \quad x_P + t \cdot u_1 &= x_Q + s \cdot v_1 \\ y_M: \quad y_P + t \cdot u_2 &= y_Q + s \cdot v_2 \end{aligned}$$

  (jsou-li p, q zadány parametricky)

- řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} ax_M + by_M + c &= 0 \\ dx_M + ey_M + f &= 0 \end{aligned}$$

  (jsou-li p, q zadány obecnými rovnicemi)

- dosazením parametrického vyjádření do obecné rovnice

$$d(x_P + t \cdot u_1) + e(y_P + t \cdot u_2)f = 0$$

  resp.

$$a(x_Q + s \cdot v_1) + b(y_Q + s \cdot v_2) + c = 0$$

  (je-li přímka p zadána parametrickou a přímka q obecnou rovnicí, resp. přímka p obecnou a přímka q parametrickou rovnicí)

1.5 Metrické úlohy

- **Vzdálenost bodu** $P[x_P, y_P]$ **od přímky** $p : ax + by + c = 0$ se vypočítá podle vzorce:

$$d(P,p) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- **Odchylka přímek.**

  Jsou-li p, q přímky se směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, resp. normálovými vektory $\vec{n}$, $\vec{m}$, je jejich odchylka číslo $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pro které:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \quad \text{resp. } \cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$$

- **Kolmost přímek.**

  Jsou-li $\vec{u}$, $\vec{v}$ směrové, resp. $\vec{n}$, $\vec{m}$ normálové vektory přímek p, q, platí:

$$p \perp q \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{m} = 0$$

1.6 Kružnice

Z planimetrie víme, že kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu (středu kružnice) stejnou vzdálenost.

Je-li tedy $X[x,y]$ bod na kružnici a $S[m,n]$ střed kružnice $k(S,r)$, platí:

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$$

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \qquad (*)$$

$$x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2ny + n^2 - r^2 = 0$$

Označíme-li $m^2 + n^2 - r^2 = p$, je:

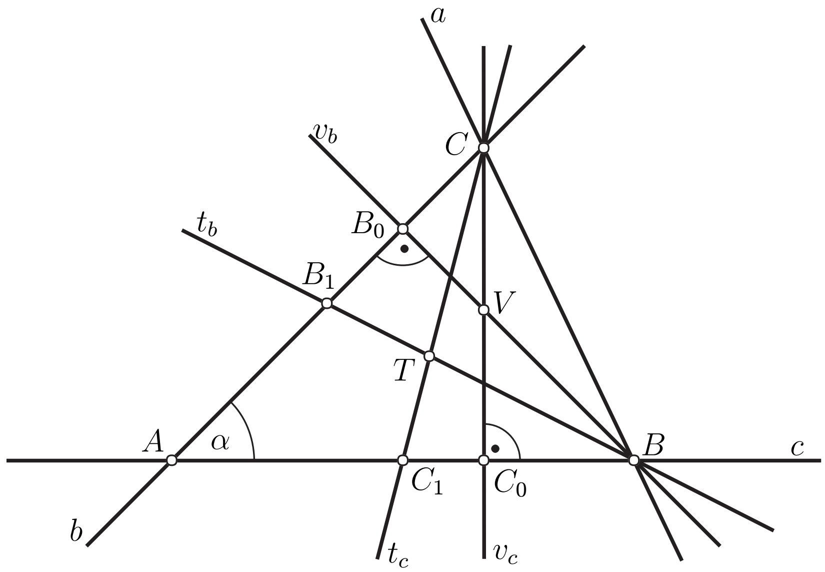
$$x^2 + y^2 - 2xm - 2yn + p = 0 \qquad (**)$$

Rovnice $(*)$ se nazývá **středová rovnice kružnice** k, resp. rovnice $(**)$ se nazývá **obecná rovnice kružnice** k.

1.7 Označení

V závěru kapitoly se ještě dohodneme na značení, které budeme používat.

- Souřadnice bodu P budeme značit $[x_P, y_P]$.
- Počátek souřadného systému budeme značit O_{xy}.



Obrázek 1.4

V trojúhelníku ABC budeme značit:

- a, b, c přímky, na kterých leží po řadě strany BC, AC, AB
- $|a|$, $|b|$, $|c|$ délky stran BC, AC, resp. AB
- α, β, γ po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, resp. C
- A_1, B_1, C_1 po řadě středy stran BC, AC, resp. AB
- t_a, t_b, t_c přímky, na kterých leží po řadě těžnice AA_1, BB_1, CC_1
- $|t_a|$, $|t_b|$, $|t_c|$ délky těžnic AA_1, BB_1, resp. CC_1

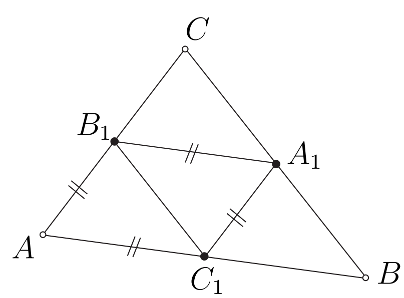
- A_0, B_0, C_0 paty výšek spuštěných po řadě z vrcholů A, B, C
- v_a, v_b, v_c přímky, na kterých leží po řadě výšky AA_0, BB_0, CC_0
- $|v_a|$, $|v_b|$, $|v_c|$ délky výšek AA_0, BB_0, resp. CC_0
- T těžiště
- V průsečík výšek
- O střed kružnice k_o trojúhelníku opsané a r její poloměr
- S střed kružnice k_v trojúhelníku vepsané a ρ její poloměr

Kapitola 2

Úlohy s těžnicemi a těžištěm

10 příkladů, v jejichž zadání figurují těžnice, těžiště nebo středy stran, je určeno na procvičení počítání vzdáleností bodů, středů úseček a průsečíků přímek.

■ **Příklad 1:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice středů stran $A_1[4,1]$, $B_1[-1,2]$, $C_1[1,-4]$.



Řešení: Z rovnoběžníku $AB_1A_1C_1$ máme $A = B_1 + \overrightarrow{A_1C_1} = B_1 + C_1 - A_1$, takže

$$\left.\begin{aligned} x_A &= x_{B_1} + x_{C_1} - x_{A_1} = -1 + 1 - 4 = -4 \\ y_A &= y_{B_1} + y_{C_1} - y_{A_1} = 2 - 4 - 1 = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A[-4,-3]$$

Podobně, z rovnoběžníku $BC_1B_1A_1$ máme $B = C_1 + \overrightarrow{B_1A_1} = C_1 + A_1 - B_1$, celkem tedy

$$\left.\begin{aligned} x_B &= x_{C_1} + x_{A_1} - x_{B_1} = 6 \\ y_B &= y_{C_1} + y_{A_1} - y_{B_1} = -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B[6,-5]$$

Konečně, z rovnoběžníku $CA_1C_1B_1$ máme $C = A_1 + \overrightarrow{C_1B_1} = A_1 + B_1 - C_1$, proto

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x_{A_1} + x_{B_1} - x_{C_1} = 2 \\ y_C &= y_{A_1} + y_{B_1} - y_{C_1} = 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[2,7]$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-4,-3],\ B[6,-5],\ C[2,7]}$

Jiné řešení: Body A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy úseček BC, AC, AB, proto:

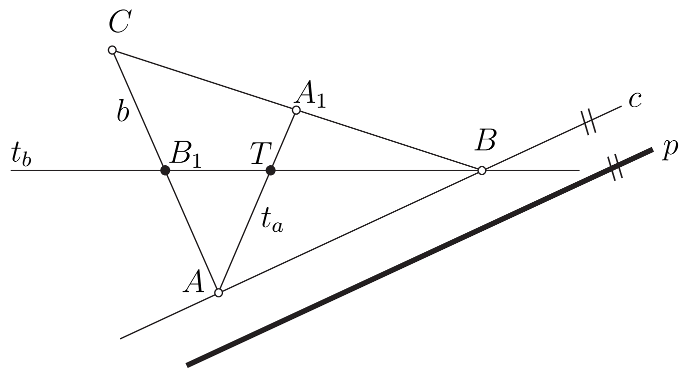
$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} \qquad y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2}$$
$$x_{B_1} = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_{B_1} = \frac{y_A + y_C}{2}$$
$$x_{C_1} = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_{C_1} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Po úpravě a dosazení dostáváme dvě soustavy tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{array}{lcl}
x_B + x_C = 8 & \text{resp.} & y_B + y_C = 2 \\
x_A + x_C = -2 & & y_A + y_C = 4 \\
\underline{x_A + x_B = 2} & & \underline{y_A + y_B = -8} \\
x_A - x_B = -10 & & y_A - y_B = 2 \\
\underline{x_A + x_B = 2} & & \underline{y_A + y_B = -8} \\
2x_A = -8 & & 2y_A = -6 \\
x_A = -4 & & y_A = -3 \\
x_B = 6 & & y_B = -5 \\
x_C = 2 & & y_C = 7
\end{array}$$

Proto $A[-4,-3]$, $B[6,-5]$, $C[2,7]$.

■ **Příklad 2:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[-2,3]$, bodu $B_1[-5,5]$ a víte-li, že $c \parallel p : 2x - 23y = 0$ a $|t_a| = \frac{3}{4}\,|b|$.



Řešení: Nejdříve pomocí bodů B_1 a T vypočítáme souřadnice vrcholu B:

$$B = T + 2\overrightarrow{B_1T} = [-2, 3] + 2(3, -2) = [4, -1]$$

Protože $B \in c \parallel p$, je $c: 2x - 23y - 31 = 0$. Podle zadání $|t_a| = \frac{3}{4}|b| = \frac{3}{4}|AC| = \frac{3}{2}|AB_1| \Rightarrow$ $\Rightarrow |AB_1| = \frac{2}{3}|t_a| = |AT|$. Z $A \in c$ plyne $2x_A - 23y_A - 31 = 0$, odkud $x_A = \dfrac{23y_A + 31}{2}$. A protože $|AB_1| = |AT|$, platí:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(-5 - \frac{23y_A + 31}{2}\right)^2 + (5 - y_A)^2} &= \sqrt{\left(-2 - \frac{23y_A + 31}{2}\right)^2 + (3 - y_A)^2} \\
\left(-\frac{23y_A + 41}{2}\right)^2 + (5 - y_A)^2 &= \left(-\frac{23y_A + 35}{2}\right)^2 + (3 - y_A)^2 \\
\frac{529y_A^2 + 1886y_A + 1681}{4} + 25 - 10y_A + y_A^2 &= \frac{529y_A^2 + 1610y_A + 1225}{4} + 9 - 6y_A + y_A^2 \\
\frac{276y_A + 456}{4} + 16 - 4y_A &= 0 \\
69y_A + 114 + 16 - 4y_A &= 0 \\
65y_A + 130 &= 0 \\
y_A &= -2 \ \Rightarrow x_A = \tfrac{-46+31}{2} = -\tfrac{15}{2} \text{ a } A\left[-\tfrac{15}{2}, -2\right]
\end{aligned}$$

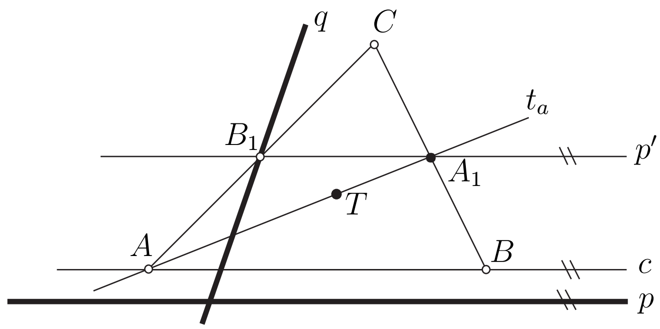
Bod B_1 je střed úsečky AC, proto:

$$\left.\begin{aligned}
x_{B_1} &= \frac{x_A + x_C}{2} \ \Rightarrow x_C = 2x_{B_1} - x_A = 2 \cdot (-5) + \tfrac{15}{2} = -\tfrac{5}{2} \\
y_{B_1} &= \frac{y_A + y_C}{2} \ \Rightarrow y_C = 2y_{B_1} - y_A = 2 \cdot 5 + 2 = 12
\end{aligned}\right\} \Rightarrow C\left[-\tfrac{5}{2}, 12\right]$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A\left[-\tfrac{15}{2}, -2\right],\ B[4, -1],\ C\left[-\tfrac{5}{2}, 12\right]}$

■ **Příklad 3:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice těžiště $T[1,3]$, bodu $A_1[3,4]$ a víte-li, že $B_1 \in q : X = [-5,1] + t(1,1)$, $t \in \mathbb{R}$, a $c \parallel p : x + 4y = 0$.



Řešení: Těžiště dělí těžnici trojúhelníku v poměru $2:1$, přitom větší část těžnice leží při vrcholu. Proto $A = T + 2\overrightarrow{A_1T} = [1,3] + 2(-2,-1) = [-3,1]$.
Střed B_1 strany AC leží na přímce q a z vlastností středních příček trojúhelníku plyne $A_1B_1 \parallel AB$, proto $A_1B_1 \subset p' \parallel p$, kde p' je přímka jdoucí bodem A_1, takže má obecnou rovnici $p' : x + 4y + k = 0$. Po dosazení souřadnic bodu A_1 do rovnice vyjde $k = -19$. Bodu $B_1[-5+t, 1+t] \in p'$ odpovídá ten parametr t, který splňuje podmínku $(-5+t) + 4(1+t) - 19 = 0$, takže $t = 4$ a $B_1[-1,5]$.
Nyní již $B = T + 2\overrightarrow{B_1T} = [1,3] + 2(2,-2) = [5,-1]$.
Bod B_1 je střed úsečky AC, takže:

$$\left.\begin{aligned} x_{B_1} &= \frac{x_A + x_C}{2} \;\Rightarrow x_C = 2x_{B_1} - x_A = 2\cdot(-1) + 3 = 1, \\ y_{B_1} &= \frac{y_A + y_C}{2} \;\Rightarrow y_C = 2y_{B_1} - y_A = 2\cdot 5 - 1 = 9. \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1,9]$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3,1],\ B[5,-1],\ C[1,9]}$

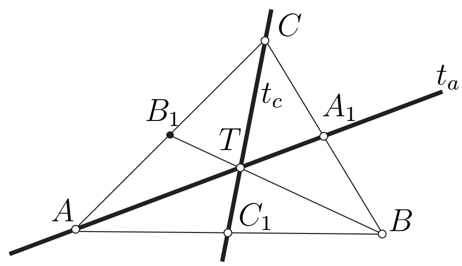
Jiné řešení: Souřadnice vrcholů A a B spočítáme stejně jako v předchozím řešení, avšak souřadnice vrcholu C vypočítáme takto: $T = C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = C + \frac{2}{3}(C_1 - C) = \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{3}C$, takže

$$x_T = \tfrac{2}{3}x_{C_1} + \tfrac{1}{3}x_C = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x_A + x_B}{2} + \tfrac{1}{3}x_C = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$
$$y_T = \tfrac{2}{3}y_{C_1} + \tfrac{1}{3}y_C = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{y_A + y_B}{2} + \tfrac{1}{3}y_C = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

odkud

$$\left.\begin{aligned} x_C &= 3x_T - x_A - x_B = 1 \\ y_C &= 3y_T - x_A - x_B = 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1,9]$$

■ **Příklad 4:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice bodu $B_1[1,6]$ a obecné rovnice přímek $t_a: 4x - 7y + 8 = 0$, $t_c: 8x + y - 44 = 0$.



Řešení: $T \in t_a \cap t_c$, proto:

$$\begin{aligned} 4x_T - 7y_T + 8 &= 0 \\ \underline{8x_T + \ \ y_T - 44} &\underline{= 0} \\ 15y_T - 60 &= 0 \\ y_T &= 4 \ \Rightarrow x_T = 5 \ \text{ a } \ T[5,4] \end{aligned}$$

Těžiště T rozděluje úsečku B_1B v poměru $1:2$, přitom $|BT| = 2\,|TB_1|$. Platí tedy:

$$B = B_1 + 3\overrightarrow{B_1T}, \text{ neboli } \ [x_B, y_B] = [1,6] + 3(4,-2) = [13,0]$$

Protože $A[x_A, y_A] \in t_a$, platí $4x_A - 7y_A + 8 = 0$, odkud $y_A = \dfrac{4x_A + 8}{7}$. Neznáme sice souřadnice bodu C_1, víme ale, že C_1 je střed úsečky AB, proto $x_{C_1} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{x_A + 13}{2}$, $y_{C_1} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{4x_A + 8}{14}$. Dále víme, že $C_1 \in t_c$, proto platí $8x_{C_1} + y_{C_1} - 44 = 0$, odkud $y_{C_1} = 44 - 8x_{C_1} = 44 - 8\dfrac{x_A + 13}{2}$. Porovnáním obou vyjádření y-ové souřadnice bodu C_1

dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{4x_A+8}{14} &= 44 - 8\frac{x_A+13}{2} \\
4x_A + 8 &= 14(-4x_A - 8) \\
x_A + 2 &= -14x_A - 28 \\
15x_A &= -30 \\
x_A &= -2 \ \Rightarrow y_A = 0 \ \text{ a } \ A[-2,0]
\end{aligned}$$

Zbývá vypočítat souřadnice vrcholu C. Bod B_1 je střed úsečky AC, proto:

$$\left.\begin{aligned}
x_{B_1} &= \frac{x_A + x_C}{2} \ \Rightarrow x_C = 2x_{B_1} - x_A = 2 + 2 = 4 \\
y_{B_1} &= \frac{y_A + y_C}{2} \ \Rightarrow y_C = 2y_{B_1} - y_A = 12
\end{aligned}\right\} \Rightarrow C[4,12]$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-2,0],\ B[13,0],\ C[4,12]}$

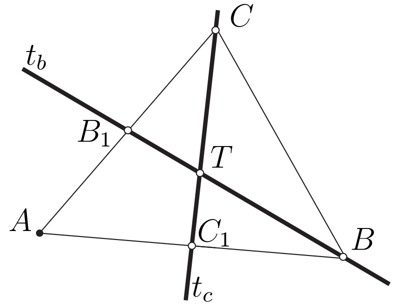
Jiné řešení: Nejprve vypočítáme souřadnice vrcholu B stejně jako v předchozím řešení. Pro výpočet souřadnic vrcholu A uvažme přímku $t_c' \parallel t_c$ takovou, že $A \in t_c'$. Pak $|t_c'B| = 2\,|t_cB|$ a přímka t_c' prochází bodem $T'[x_{T'}, y_{T'}]$, pro který platí $T' = B + 2\overrightarrow{BT}$. Je tedy $[x_{T'}, y_{T'}] = [13,0] + 2(-8,4) = [-3,8]$ a t_c' má obecnou rovnici $t_c' : 8x + y - 16 = 0$. Souřadnice $[x_A, y_A]$ vrcholu $A \in t_c' \cap t_a$ jsou tedy řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}
8x_A + \ \ y_A - 16 &= 0 \\
\underline{4x_A - 7y_A + \ \ 8} &\underline{= 0} \\
15y_A + \ \ 0 &= 0 \\
y_A &= 0 \ \Rightarrow x_A = -2 \ \text{ a } \ A[-2,0]
\end{aligned}$$

Ze vztahu $[x_T, y_T] = \left[\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right]$ [1] po úpravě dostáváme $[x_C, y_C] = [3x_T - x_A - x_B, 3y_T - y_A - y_B] = [4,12]$.

[1] Platí totiž $T = C + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = C + \frac{2}{3}(C_1 - C) = \frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{3}C$, takže $[x_T, y_T] = \left[\frac{2}{3}x_{C_1} + \frac{1}{3}x_C, \frac{2}{3}y_{C_1} + \frac{1}{3}y_C\right] = \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{x_A + x_B}{2} + \frac{1}{3}x_C, \frac{2}{3}\cdot\frac{y_A + y_B}{2} + \frac{1}{3}y_C\right] = \left[\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right]$.

■ **Příklad 5:** Vypočítejte souřadnice vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-5,-2]$ a obecné rovnice přímek $t_b : 2x+y-4=0$, $t_c : 2x-y=0$.



Řešení: $C_1 \in t_c$, proto $2x_{C_1} - y_{C_1} = 0$, odkud $y_{C_1} = 2x_{C_1}$. Dále je bod C_1 střed úsečky AB, proto $x_{C_1} = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, odkud $x_B = 2x_{C_1} - x_A = 2x_{C_1} + 5$, resp. $y_{C_1} = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, odkud $y_B = 2y_{C_1} - y_A = 4x_{C_1} + 2$. Víme také, že $B \in t_b$, proto $2x_B + y_B - 4 = 0$, odkud $y_B = 4 - 2x_B = 4 - 2(2x_{C_1} + 5) = -4x_{C_1} - 6$. Porovnáním obou vyjádření y-ové souřadnice vrcholu B dostáváme:

$$\begin{aligned} 4x_{C_1} + 2 &= -4x_{C_1} - 6 \\ 8x_{C_1} &= -8 \\ x_{C_1} &= -1 \;\Rightarrow y_{C_1} = 2(-1) = -2 \;\text{ a }\; C_1[-1,-2] \end{aligned}$$

Nyní již můžeme souřadnice vrcholu B dopočítat:

$$\left.\begin{aligned} x_B &= 2x_{C_1} + 5 = -2 + 5 = 3 \\ y_B &= -4x_{C_1} - 6 = 4 - 6 = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B[3,-2]$$

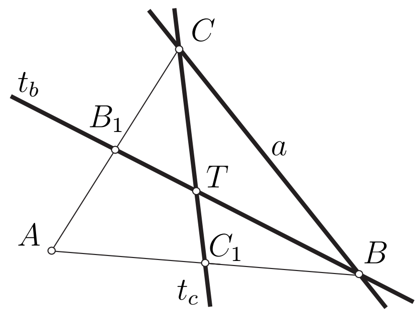
Vrchol C určíme z podmínky $C = C_1 + 3\overrightarrow{C_1T}$. Nejdříve ale z podmínky $T \in t_b \cap t_c$ vypočítáme souřadnice těžiště T:

$$\begin{aligned} 2x_T + y_T - 4 &= 0 \\ \underline{2x_T - y_T \qquad} &\underline{= 0} \\ 4x_T \qquad - 4 &= 0 \\ x_T &= 1 \;\Rightarrow y_T = 2 \;\text{ a }\; T[1,2] \end{aligned}$$

Je tedy $[x_C, y_C] = [x_{C_1}, y_{C_1}] + 3(x_T - x_{C_1}, y_T - y_{C_1}) = [-1, -2] + 3(2, 4) = [5, 10]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[3, -2],\ C[5, 10]}$

■ **Příklad 6:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $a : 2x + y - 10 = 0$, $t_b : x + 2y - 2 = 0$ a $t_c : x - y + 1 = 0$.



Řešení: $B \in a \cap t_b$, proto:

$$\begin{array}{r} 2x_B + y_B - 10 = 0 \\ x_B + 2y_B - 2 = 0 \\ \hline -3y_B - 6 = 0 \end{array}$$

$$y_B = -2 \Rightarrow x_B = 6 \text{ a } B[6, -2]$$

Podobně $C \in a \cap t_c$:

$$\begin{array}{r} 2x_C + y_C - 10 = 0 \\ x_C - y_C + 1 = 0 \\ \hline 3x_C \qquad - 9 = 0 \end{array}$$

$$x_C = 3 \Rightarrow y_C = 4 \text{ a } C[3, 4]$$

Souřadnice $[x_A, y_A]$ vrcholu A určíme z podmínky $A = T + 2\overrightarrow{A_1T}$. Nejdříve ale musíme spočítat souřadnice bodů A_1 a T. Bod A_1 je střed úsečky BC, proto $[x_{A_1}, y_{A_1}] =$

$= \left[\dfrac{x_B + x_C}{2}, \dfrac{y_B + y_C}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}, 1\right]$. $T[x_T, y_T] \in t_b \cap t_c$, proto:

$$\begin{aligned} x_T + 2y_T - 2 &= 0 \\ \underline{x_T - y_T + 1} &\underline{= 0} \\ 3y_T - 3 &= 0 \\ y_T &= 1 \ \Rightarrow x_T = 0 \ \text{ a } \ T[0,1] \end{aligned}$$

Nyní již $[x_A, y_A] = [x_T, y_T] + 2(x_T - x_{A_1}, y_T - y_{A_1}) = [0,1] + 2\left(-\frac{9}{2}, 0\right) = [-9, 1]$. □

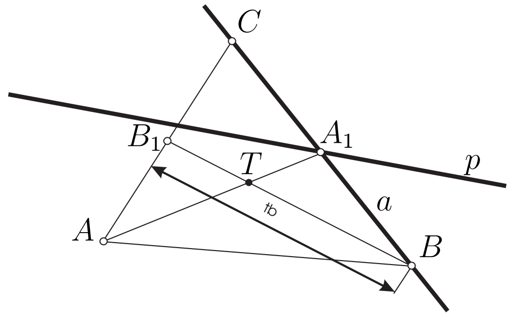
♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-9,1],\ B[6,-2],\ C[3,4]}$

Jiné řešení: Souřadnice vrcholů B a C spočítáme stejným způsobem, pro výpočet souřadnic $[x_A, y_A]$ vrcholu A však použijeme jiný postup. Z $B_1 \in t_b$ plyne $x_{B_1} + 2y_{B_1} - 2 = 0$, odkud $x_{B_1} = 2 - 2y_{B_1}$. Navíc je B_1 střed úsečky AC, takže $x_{B_1} = \dfrac{x_A + x_C}{2}$, odkud $x_A = 2x_{B_1} - x_C = 2(2 - 2y_{B_1}) - 3 = 1 - 4y_{B_1}$, resp. $y_{B_1} = \dfrac{y_A + y_C}{2}$, odkud $y_A = 2y_{B_1} - y_C = 2y_{B_1} - 4$ a celkem je $A[1 - 4y_{B_1}, 2y_{B_1} - 4]$.
Podobně z $C_1[x_{C_1}, y_{C_1}] \in t_c$ plyne $x_{C_1} - y_{C_1} + 1 = 0$, odkud $x_{C_1} = y_{C_1} - 1$. Navíc je bod C_1 střed úsečky AB, takže $x_{C_1} = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, odkud $x_A = 2x_{C_1} - x_B = 2(y_{C_1} - 1) - 6 = 2y_{C_1} - 8$, resp. $y_{C_1} = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, odkud $y_A = 2y_{C_1} - y_B = 2y_{C_1} + 2$ a celkem je $A[2y_{C_1} - 8, 2y_{C_1} + 2]$.
Porovnáním dvojího vyjádření souřadnic vrcholu A obdržíme:

$$\begin{aligned} x_A: &\quad -4y_{B_1} + 1 = 2y_{C_1} - 8 \\ y_A: &\quad \underline{2y_{B_1} - 4 = 2y_{C_1} + 2} \\ &\quad 6y_{B_1} - 5 = \phantom{2y_{C_1} +} 10 \\ &\quad y_{B_1} = \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Nyní již je $[x_A, y_A] = [1 - 4y_{B_1}, 2y_{B_1} - 4] = [-9, 1]$.

■ **Příklad 7:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[-2,0]$, obecnou rovnici přímky $a: 4x + 3y - 12 = 0$ a víte-li, že bod $A_1 \in p : y - 2 = 0$, $|t_b| = 6\sqrt{5}$, a $x_B > x_{A_1}$.



Řešení: Protože $A_1[x_{A_1}, 2] \in a$, je $4x_{A_1} + 6 - 12 = 0$, odkud $x_{A_1} = \frac{3}{2}$ a $A_1\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Souřadnice vrcholu A určíme z podmínky $A = T + 2\overrightarrow{A_1T} = T + 2(T - A_1) = 3T - 2A_1$. Je tedy $[x_A, y_A] = 3[-2, 0] - 2\left[\frac{3}{2}, 2\right] = [-9, -4]$.

Protože $B[x_B, y_B] \in a$, platí $4x_B + 3y_B - 12 = 0$ odkud $y_B = 4 - \frac{4}{3}x_B$. Dále z vlastnosti těžiště víme, že $|TB| = \frac{2}{3}|t_b|$, proto:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_B - x_T)^2 + (y_B - y_T)^2} =& \tfrac{2}{3} \cdot 6\sqrt{5} \\
\sqrt{(x_B + 2)^2 + \left(4 - \tfrac{4}{3}x_B\right)^2} =& 4\sqrt{5} \\
(x_B + 2)^2 + \left(4 - \tfrac{4}{3}x_B\right)^2 =& 80 \\
x_B^2 + 4x_B + 4 + 16 - \tfrac{32}{3}x_B + \tfrac{16}{9}x_B^2 - 80 =& 0 \\
\tfrac{25}{9}x_B^2 - \tfrac{20}{3}x_B - 60 =& 0 \\
\tfrac{25}{9}(x_B - 6)\left(x_B + \tfrac{18}{5}\right) =& 0
\end{aligned}$$

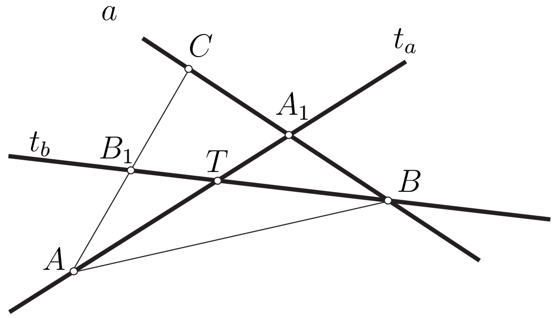
a podmínce ze zadání ($x_B > x_{A_1}$) vyhovuje pouze $x_B = 6$. Dále $y_B = 4 - \frac{4}{3}x_B = 4 - 8 = -4$ a $B[6, -4]$.

Bod A_1 je střed úsečky BC, proto $[x_{A_1}, y_{A_1}] = \left[\dfrac{x_B + x_C}{2}, \dfrac{y_B + y_C}{2}\right]$ a pro souřadnice $[x_C, y_C]$ vrcholu C tedy platí:

$$[x_C, y_C] = [2x_{A_1} - x_B, 2y_{A_1} - y_B] = [3 - 6, 4 + 4] = [-3, 8]. \qquad \square$$

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-9, -4],\ B[6, -4],\ C[-3, 8]}$

■ **Příklad 8:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $a : 2x + y - 8 = 0$, $t_a : x - 3y + 3 = 0$ a $t_b : 3x + 5y - 5 = 0$.



Řešení: $B \in a \cap t_b$, proto:

$$\begin{aligned} 2x_B + y_B - 8 &= 0 \\ \underline{3x_B + 5y_B - 5} &\underline{= 0} \\ -7x_B + 35 &= 0 \\ x_B = 5 \;\Rightarrow y_B &= -2 \;\text{ a }\; B[5, -2] \end{aligned}$$

Podobně, $A_1[x_{A_1}, y_{A_1}] \in a \cap t_a$, proto:

$$\begin{aligned} 2x_{A_1} + y_{A_1} - 8 &= 0 \\ \underline{x_{A_1} - 3y_{A_1} + 3} &\underline{= 0} \\ 7x_{A_1} \phantom{- 3y_{A_1}} - 21 &= 0 \\ x_{A_1} = 3 \;\Rightarrow y_{A_1} &= 2 \;\text{ a }\; A_1[3, 2] \end{aligned}$$

Těžiště $T[x_T, y_T] \in t_a \cap t_b$, jeho souřadnice tedy získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_T - 3y_T + 3 &= 0 \\ \underline{3x_T + 5y_T - 5} &\underline{= 0} \\ 14y_T - 14 &= 0 \\ y_T = 1 \;\Rightarrow x_T &= 0 \;\text{ a }\; T[0, 1] \end{aligned}$$

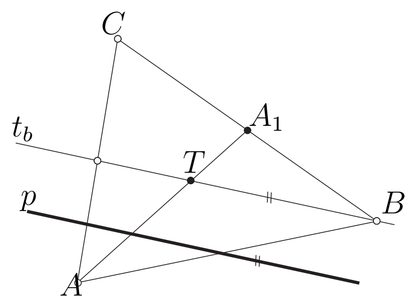
Souřadnice $[x_A, y_A]$ vrcholu A určíme z rovnosti $A = A_1 + 3\overrightarrow{A_1T} = A_1 + 3(T - A_1) =$ $= 3T - 2A_1$, takže $[x_A, y_A] = 3[0, 1] - 2[3, 2] = [-6, -1]$.

Protože je bod A_1 střed úsečky BC, je $x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2}$, $y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2}$ a pro souřadnice $[x_c, y_C]$ vrcholu C platí:

$$[x_C, y_C] = [2x_{A_1} - x_B, 2y_{A_1} - y_B] = [6 - 5, 4 + 2] = [1, 6]. \qquad \square$$

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-6,-1],\ B[5,-2],\ C[1,6]}$

■ **Příklad 9:** Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou BC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[3,4]$, bodu $A_1[5,5]$ a víte-li, že $t_b \parallel p : x+$ $+ 3y = 0$.



Řešení: Souřadnice vrcholu A určíme z podmínky $A = A_1 + 3\overrightarrow{A_1T} = A_1 + 3(T - A_1) =$ $= 3T - 2A_1$, takže je $[x_A, y_A] = 3[3,4] - 2[5,5] = [-1, 2]$.
Protože $t_b \parallel p : x + 3y = 0$, má přímka t_b obecnou rovnici $t_b : 3x + y + c = 0$. Koeficient c vypočítáme z podmínky $T \in t_b$: $3 + 3 \cdot 4 + c = 0$, proto $c = -15$ a $t_b : x + 3y - 15 = 0$.
Z $B \in t_b$ plyne $x_B + 3y_B - 15 = 0$, odkud $x_B = 15 - 3y_B$.
Věnujme se chvíli vrcholu C. Protože je bod A_1 střed úsečky BC, platí:

$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2}\text{, odkud } x_C = 2x_{A_1} - x_B = 10 - 15 + 3y_B = 3y_B - 5,$$
$$\text{resp. } y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2}\text{, odkud } y_C = 2y_{A_1} - y_B = 10 - y_B.$$

Jelikož je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou BC, platí $|AB| = |AC|$

$$|AB| = \sqrt{(15 - 3y_B + 1)^2 + (y_B - 2)^2} = \sqrt{(16 - 3y_B)^2 + (y_B - 2)^2}$$
$$|AC| = \sqrt{(3y_B - 5 + 1)^2 + (10 - y_B - 2)^2} = \sqrt{(3y_B - 4)^2 + (8 - y_B)^2}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\sqrt{(16-3y_B)^2+(y_B-2)^2} =& \sqrt{(3y_B-4)^2+(8-y_B)^2} \\
256-96y_B+9y_B^2+y_B^2-4y_B+4 =& 9y_B^2-24y_B+16+64-16y_B+y_B^2 \\
10y_B^2-100y_B+260 =& 10y_B^2-40y_B+80 \\
-60y_B =& -180 \\
y_B =& 3
\end{aligned}$$

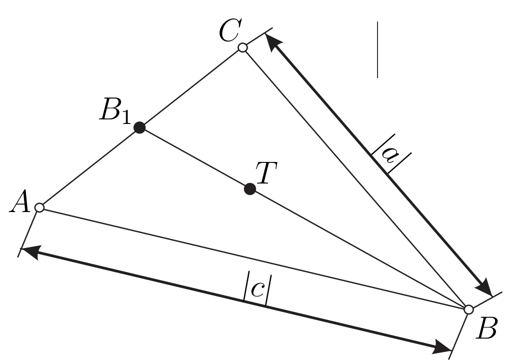
Nyní již snadno dopočítáme zbylé souřadnice:

$$\begin{aligned}
x_B =& \quad 15-3y_B = 15-9 = 6 \\
x_C =& \quad 3y_B-5 = 9-5 = 4 \\
y_C =& \quad 10-y_B = 10-3 = 7
\end{aligned}$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-1,2],\ B[6,3],\ C[4,7]}$

■ **Příklad 10:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice těžiště $T[1,2]$, bodu $B_1[-1,3]$, velikosti stran $|a| = 4\sqrt{5}$, $|c| = 2\sqrt{17}$ a víte-li, že $y_A \leq y_C$.



Řešení: Souřadnice vrcholu B určíme z podmínky $B = B_1 + 3\overrightarrow{B_1T} = B_1 + 3(T - B_1) =$
$= 3T - 2B_1$, takže $[x_B, y_B] = 3[1,2] - 2[-1,3] = [5,0]$.
Bod B_1 je střed úsečky AC, proto $x_{B_1} = \dfrac{x_A + x_C}{2}$, $y_{B_1} = \dfrac{y_A + y_C}{2}$. Odtud vyjádříme

souřadnice vrcholu A pomocí souřadnic vrcholu C:

$$[x_A, y_A] = [2x_{B_1} - x_C, 2y_{B_1} - y_C] = [-2 - x_C, 6 - y_C].$$

Dále víme, že $|c| = |AB| = 2\sqrt{17}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =& 2\sqrt{17} \\
(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 =& 68 \\
(5 + 2 + x_C)^2 + (-6 + y_C)^2 =& 68 \\
(7 + x_C)^2 =& 68 - (-6 + y_C)^2 \\
7 + x_C =& \pm\sqrt{68 - (-6 + y_C)^2} \\
x_C =& \pm\sqrt{68 - (-6 + y_C)^2} - 7
\end{aligned}$$

Víme také, že $|a| = |BC| = 4\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =& 4\sqrt{5} \\
(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 =& 80 \\
(x_C - 5)^2 + y_C^2 =& 80 \\
(x_C - 5)^2 =& 80 - y_C^2 \\
x_C - 5 =& \pm\sqrt{80 - y_C^2} \\
x_C =& \pm\sqrt{80 - y_C^2} + 5
\end{aligned}$$

Porovnáním těchto vyjádření souřadnice x_C dostáváme, že platí jedna z rovnic:

1. $\sqrt{68 - (-6 + y_C)^2} - 7 = \sqrt{80 - y_C^2} + 5$

2. $\sqrt{68 - (-6 + y_C)^2} - 7 = -\sqrt{80 - y_C^2} + 5$

3. $-\sqrt{68 - (-6 + y_C)^2} - 7 = \sqrt{80 - y_C^2} + 5$

4. $-\sqrt{68 - (-6 + y_C)^2} - 7 = -\sqrt{80 - y_C^2} + 5$

Ihned vidíme, že rovnice 3. nemá v $\mathbb{R}$ řešení. Úpravou v rovnici 4. dostáváme:

$-\sqrt{68-(-6+y_C)^2} = -\sqrt{80-y_C^2}+12$ a protože $\sqrt{80-y_C^2} < 9$, je

$0 > -\sqrt{68-(-6+y_C)^2} > -\sqrt{80-y_C^2}+12 > 0$, což je spor, tedy ani rovnice 4. nemá v $\mathbb{R}$ řešení.

Řešme nyní zbylé dvě rovnice, nejdříve rovnici 1.:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{68-(-6+y_C)^2}-7 =& \sqrt{80-y_C^2}+5 \\
\sqrt{68-y_C^2+12y_C-36} =& \sqrt{80-y_C^2}+12 \\
-y_C^2+12y_C+32 =& 80-y_C^2+24\sqrt{80-y_C^2}+144 \\
12y_C-192 =& 24\sqrt{80-y_C^2} \\
y_C-16 =& 2\sqrt{80-y_C^2} \\
y_C^2-32y_C+256 =& 320-4y_C^2 \\
5y_C^2-32y_C-64 =& 0 \\
5(y_C-8)\left(y_C+\tfrac{8}{5}\right) =& 0
\end{aligned}
$$

Při výpočtu jsme provedli neekvivalentní úpravu (bylo to až to druhé umocnění), a proto musíme provézt zkoušku:

$\mathrm{L}\left(-\frac{8}{5}\right) = \cdots = -\frac{19}{5}, \quad \mathrm{P}\left(-\frac{8}{5}\right) = \cdots = \frac{69}{5}$

$\mathrm{L}(8) = \cdots = 1, \quad \mathrm{P}(8) = \cdots = 9,$

takže ani rovnice 1. nemá v $\mathbb{R}$ řešení a zbývá rovnice 2.:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{68-(-6+y_C)^2}-7 =& -\sqrt{80-y_C^2}+5 \\
\sqrt{68-y_C^2+12y_C-36} =& -\sqrt{80-y_C^2}+12 \\
-y_C^2+12y_C+32 =& 80-y_C^2-24\sqrt{80-y_C^2}+144 \\
12y_C-192 =& -24\sqrt{80-y_C^2} \\
y_C-16 =& -2\sqrt{80-y_C^2} \\
y_C^2-32y_C+256 =& 320-4y_C^2
\end{aligned}
$$

Již víme, že kořeny této kvadratické rovnice jsou $y_C = 8$, $y_{C'} = -\frac{8}{5}$ a po provedení zkoušky je $\mathrm{L}(8) = 1$, $\mathrm{P}(8) = 1$, resp. $\mathrm{L}\left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{19}{5}$, $\mathrm{P}\left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{19}{5}$, a řešením jsou tedy oba kořeny. Avšak ze zadání je $y_A \le y_C$ a ze vztahu $[x_A, y_A] = [-2-x_C, 6-y_C]$ plyne: $y_A = 6-y_C \le y_C$, odkud $3 \le y_C$ a tuto podmínku splňuje pouze $y_C = 8$. Dopočítejme ještě zbylé souřadnice:

$$
\begin{aligned}
x_C = &\ -\sqrt{80 - y_C^2} + 5 = -\sqrt{80 - 64} + 5 = 1 \\
x_A = &\ -2 - x_C = -2 - 1 = -3 \\
y_A = &\ 6 - y_C = 6 - 8 = -2
\end{aligned}
\qquad \square
$$

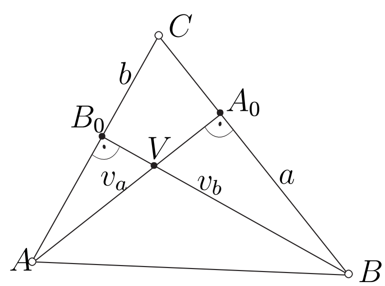
♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3, -2],\ B[5, 0],\ C[1, 8]}$

Kapitola 3

Úlohy s výškami a průsečíkem výšek

Tato kapitola obsahuje 10 příkladů, v jejichž zadání figuruje výška nebo průsečík výšek. Příklady v této kapitole jsou tedy určeny zejména na procvičení kolmosti přímek, skalárního součinu vektorů a vzdálenosti bodu od přímky.

■ **Příklad 1:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice bodů $V\left[\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $A_0[6,1]$, $B_0[2,3]$.



Řešení: Vrchol A určíme jako průsečík přímek b, v_a. $\overrightarrow{VB_0} = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \parallel (1,-1)$ je normálový vektor přímky b, ta navíc prochází bodem $B_0[2,3]$, proto $b: x - y + 1 = 0$. Přímka v_a je určena body A_0 a V, přitom $\overrightarrow{VA_0} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \parallel (3,1)$, takže $v_a: X = [6,1] + t(3,1),\ t \in \mathbb{R}$. Vrcholu $A \in v_a$ tedy vyhovuje ten parametr t, který splňuje podmínku $(6+3t) - (1+t) + + 1 = 0$, takže $t = -3$ a $A[-3,-2]$.

Vrchol B určíme jako průsečík přímek a, v_b. Stejným způsobem jakým jsme počítali souřadnice vrcholu A dojdeme k obecné rovnici přímky $a: 3x+y-19=0$ a parametrickému vyjádření přímky $v_b: X=[2,3]+s(1,-1),\ s\in\mathbb{R}$. Bodu $B\in v_b$ odpovídá ten parametr s, který splňuje podmínku $3(2+s)+3-s-19=0$, tedy $s=5$ a $B[7,-2]$.

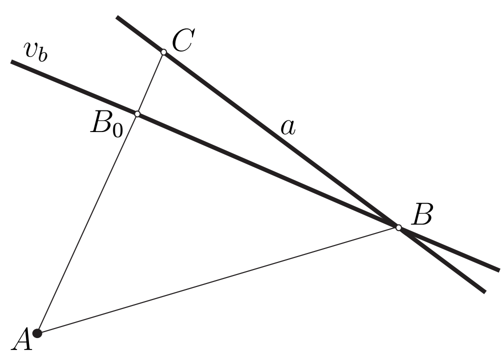
Souřadnice $[x_C, y_C]$ vrcholu $C\in a\cap b$ získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_C - y_C + \ \ 1 &= 0 \\ 3x_C + y_C - 19 &= 0 \\ \hline 4x_C \qquad - 18 &= 0 \\ x_C &= \tfrac{9}{2} \quad \Rightarrow y_C = \tfrac{11}{2} \ \text{ a } C\left[\tfrac{9}{2}, \tfrac{11}{2}\right] \end{aligned}$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3,-2],\ B[7,-2],\ C\left[\tfrac{9}{2}, \tfrac{11}{2}\right]}$

■ **Příklad 2:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-2,0]$ a obecné rovnice přímek $a: x+y-7=0$, $v_b: x+2y-8=0$.



Řešení: Vrchol B určíme jako průsečík přímek a, v_b. Jeho souřadnice získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} a\cap v_b: \quad x_B + \ \ y_B - 7 &= 0 \\ x_B + 2y_B - 8 &= 0 \\ \hline y_B - 1 &= 0 \\ y_B &= 1 \quad \Rightarrow x_B = 6 \text{ a } B[6,1] \end{aligned}$$

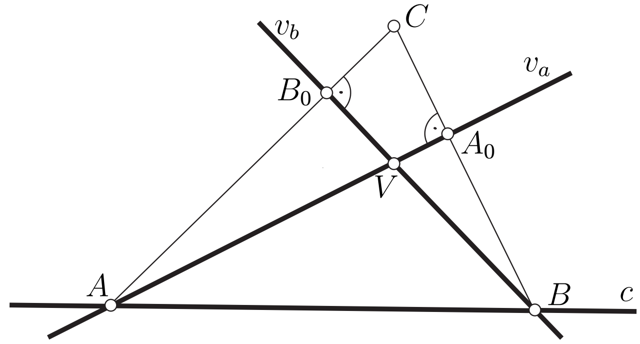
Vrchol C určíme jako průsečík přímky a s přímkou b. Přímka b prochází vrcholem A kolmo k přímce v_b, takže má směrový vektor $(1,2)$ a $b: X = [-2,0] + t(1,2) = [-2+t, 2t],\ t \in \mathbb{R}$. Vrcholu $C \in b$ tedy odpovídá ten parametr t, který splňuje podmínku $(-2+t)+2t-7=0$, takže $t=3$ a $C[1,6]$. $\square$

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[6,1],\ C[1,6]}$

Jiné řešení: Vrchol $B[6,1]$ určíme stejně jako v předchozím řešení, avšak vrchol $C[x_C, y_C]$ určíme z podmínek $C \in a$ a $\overrightarrow{AC} \perp v_b$. Platí $\overrightarrow{AC} = C - A = (x_C + 2, y_C)$, $v_b \parallel \overrightarrow{u}(2,-1)$.

$$C \in a: x_C + y_C - 7 = 0 \Rightarrow y_C = 7 - x_C$$
$$\overrightarrow{AC} \perp v_b: 0 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{u} = 2 \cdot (x_C + 2) - y_C = 2x_C + 4 - 7 + x_C = 3x_C - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_C = 1,\ y_C = 7 - 1 = 6 \text{ a } C[1,6].$$

■ **Příklad 3:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $c: y+2=0$, $v_a: x-3y-3=0$ a $v_b: x+y-5=0$.



Řešení: Vrchol A určíme jako průsečík přímek c, v_a, resp. vrchol B jako průsečík přímek c, v_b.

$$c \cap v_a: \qquad y_A + 2 = 0 \quad \Rightarrow y_A = -2$$
$$\underline{x_A - 3y_A - 3 = 0}$$
$$x_A = -3 \quad \text{a } A[-3,-2]$$

$$
\begin{aligned}
c \cap v_b: \qquad\qquad y_B + 2 &= 0 \quad \Rightarrow y_B = -2 \\
\underline{x_B + y_B - 5 = 0} & \\
x_B &= 7 \quad \text{a } B[7,-2]
\end{aligned}
$$

Zbylý vrchol C určíme jako průsečík přímek a, b. Přímka a prochází vrcholem B kolmo k přímce v_a, proto má parametrickou rovnici $a : X = B[7,-2] + t \cdot (1,-3),\ t \in \mathbb{R}$, podobně přímka b prochází vrcholem A kolmo k přímce v_b, takže má parametrickou rovnici $b : X = A[-3,-2] + s \cdot (1,1),\ s \in \mathbb{R}$

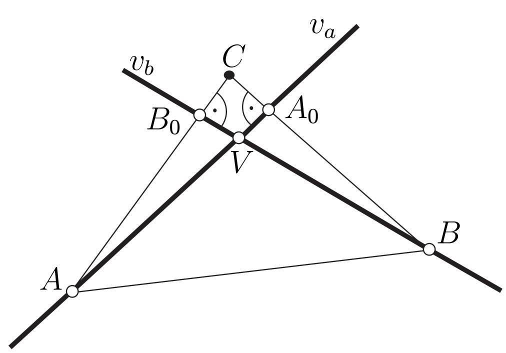
$$C[x_C, y_C] = [7+t, -2-3t] = [-3+s, -2+s], \text{ proto:}$$

$$
\begin{aligned}
x_C: &\quad 7 + \ t = -3 + s \\
y_C: &\quad \underline{-2 - 3t = -2 + s} \\
&\quad 9 + 4t = -1 \\
&\qquad t = -\tfrac{5}{2} \qquad \Rightarrow C[x_C, y_C] = \left[7 - \tfrac{5}{2}, -2 + \tfrac{15}{2}\right] = \left[\tfrac{9}{2}, \tfrac{11}{2}\right].
\end{aligned}
$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3,-2],\ B[7,-2],\ C\left[\tfrac{9}{2}, \tfrac{11}{2}\right]}$

■ **Příklad 4:** Vypočtěte souřadnice zbylých vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $C[3,6]$, parametrickou rovnici přímky $v_a : X = [-2,0] + t(2,1),\ t \in \mathbb{R}$ a obecnou rovnici přímky $v_b : x + y - 5 = 0$.



Řešení: Vrchol $A[x_A, y_A]$ leží na přímce v_a, proto $x_A = -2 + 2t$, $y_A = t$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$, navíc A leží na přímce b. Ta prochází vrcholem C a je kolmá k přímce v_b. Normálový vektor $(1,1)$ přímky v_b je směrový vektor přímky b, proto $x_A = 3+s$, $y_A = 6+s$ pro vhodné $s \in \mathbb{R}$. Celkem tedy:

$$\begin{aligned} x_A: \quad & -2+2t = 3+s \\ y_A: \quad & \underline{t = 6+s} \\ & -2+2(6+s) = 3+s \\ & s = -7 \qquad \Rightarrow A[x_A, y_A] = [3-7, 6-7] = [-4,-1] \end{aligned}$$

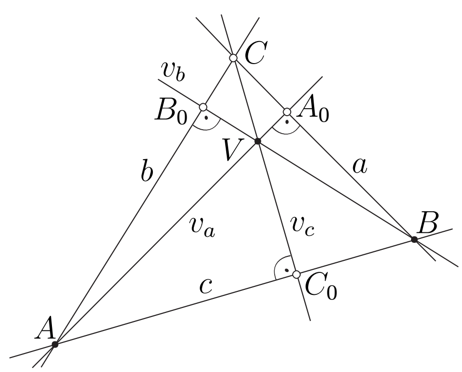
Vrchol B určíme podobně: $B \in v_b$, tedy $x_B + y_B - 5 = 0$, navíc B leží na přímce a procházející vrcholem C kolmo k přímce v_a. Normálový vektor přímky a je tedy $(2,1)$, a protože $C[3,6] \in a$, je $a: 2x + y - 12 = 0$. Souřadnice vrcholu B získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} v_b \cap a: \quad & x_B + y_B - 5 = 0 \\ & \underline{2x_B + y_B - 12 = 0} \\ & x_B \qquad - 7 = 0 \\ & x_B = 7 \quad \Rightarrow y_B = -2 \text{ a } B[7,-2]. \end{aligned}$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-4,-1],\ B[7,-2]}$

■ **Příklad 5:** Vypočítejte souřadnice zbylého vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $A[-3,0]$, $B[7,-5]$ a průsečíku výšek $V[0,2]$.



Řešení: Vrchol C určíme jako průsečík přímek a, b. Přímka a prochází vrcholem $B[7,-5]$

a její normálový vektor je $\overrightarrow{AV} = (3, 2)$, proto je $a : 3x+2y-11 = 0$. Přímka b prochází vrcholem $A[-3, 0]$ a její normálový vektor je $\overrightarrow{BV} = (-7, 7) \parallel (1, -1)$, proto je $b : x-y+3 = 0$. Souřadnice vrcholu C získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rl} a \cap b: & 3x_C + 2y_C - 11 = 0 \\ & \underline{\;\; x_C - \;\; y_C + \;\; 3 = 0} \\ & 5x_C \qquad\quad - \;\; 5 = 0 \\ & \qquad\quad x_C = 1 \quad \Rightarrow y_C = 4 \;\text{ a } C[1, 4]. \end{array}$$

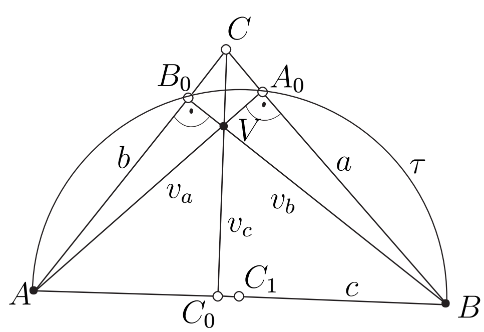
□

♠ **Výsledek:** $\boxed{C[1, 4]}$

Jiné řešení: Vrchol C můžeme určit také jako průsečík přímky v_c např. s přímkou b. Přímka v_c má normálový vektor $\overrightarrow{AB} = (10, -5) \parallel (2, -1)$ a prochází průsečíkem výšek $V[0, 2]$, proto je $v_c : 2x - y + 2 = 0$. Souřadnice vrcholu C pak získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rl} b \cap v_c: & x_C - y_C + 3 = 0 \\ & \underline{2x_C - y_C + 2 = 0} \\ & x_C \qquad - 1 = 0 \\ & \qquad x_C = 1 \quad \Rightarrow y_C = 4 \end{array}$$

■ **Příklad 6:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $c : x - 8y + 2 = 0$ a souřadnice pat výšek $A_0\left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $B_0[0, 4]$.



Řešení: Příklad vyřešíme metodou, která je spíše konstrukční: z bodů A_0, B_0 je úsečka AB

vidět pod úhlem 90°, proto A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem AB. Její střed S ($\equiv C_1$) určíme jako průsečík přímky c s osou o úsečky A_0B_0. Střed O úsečky A_0B_0 má souřadnice $\left[\dfrac{x_{A_0}+x_{B_0}}{2}, \dfrac{y_{A_0}+y_{B_0}}{2}\right] = \left[\frac{5}{4}, \frac{17}{4}\right]$, $\overrightarrow{A_0B_0} = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \parallel (5,1)$, takže je $o: 5x+y-\frac{21}{2}=0$. Nyní již souřadnice $[x_S, y_S]$ bodu S získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{array}{lrl}
o\cap c: & 5x_S + y_S - \frac{21}{2} = 0 & \\
 & \underline{x_S - 8y_S + 2 = 0} & \Rightarrow x_S = 8y_S - 2 \\
 & 5(8y_S-2) + y_S - \frac{21}{2} = 0 & \\
 & 41y_S - \frac{41}{2} = 0 & \\
 & y_S = \frac{1}{2} & \Rightarrow x_S = 2 \text{ a } S\left[2, \frac{1}{2}\right]
\end{array}$$

Poloměr r kružnice τ je $|SA_0| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+16} = \sqrt{\frac{65}{4}}$, a je tedy $\tau: (x-2)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}$. Nyní najdeme souřadnice $[x,y]$ průsečíků kružnice τ s přímkou c, což budou hledané vrcholy A a B. Protože $c: x = 8y-2$, po dosazení do středové rovnice kružnice τ dostaneme:

$$\begin{aligned}
(8y-2-2)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 &= \tfrac{65}{4}\\
64y^2 - 64y + 16 + y^2 - y + \tfrac{1}{4} &= \tfrac{65}{4}\\
65y^2 - 65y &= 0\\
y(y-1) &= 0
\end{aligned}$$

Odtud $y=0$ nebo $y=1$, čemuž odpovídá $x=-2$ resp. $x=6$. Hledané vrcholy jsou tedy $A[-2,0]$ a $B[6,1]$, resp. $A'[6,1]$ a $B'[-2,0]$.

Vrchol $C[x_C, y_C]$ určíme jako průsečík přímek a, b. Po dosazení souřadnic vrcholu B, resp. B' do rovnice přímky a a po úpravě je $a: x+y-7=0$, resp. $a': x-y+2=0$. Zbývá nám určit přímku b. Body $A, B_0 \in b$ a $\overrightarrow{AB_0} = (2,4)$, resp. $A', B_0 \in b'$ a $\overrightarrow{A'B_0} = (-6,3)$, takže $b: X = [-2,0] + t(2,4),\ t\in\mathbb{R}$, resp. $b': X = [6,1] + t'(-6,3),\ t'\in\mathbb{R}$.

$C \in a\cap b: \quad (-2+2t) + 4t - 7 = 0 \ \Rightarrow t = \frac{3}{2} \quad \text{a } C[1,6]$

$C' \in a'\cap b': \quad (6-6t') - (1+3t') + 2 = 0 \ \Rightarrow t' = \frac{7}{9} \quad \text{a } C'\left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right].$ □

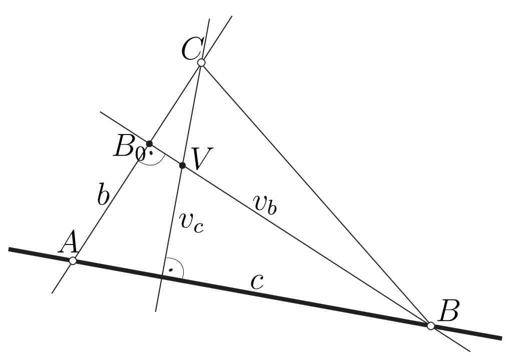
♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-2,0],\ B[6,1],\ C[1,6],\ \text{resp. } A'[6,1],\ B'[-2,0],\ C'\left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right]}$

Jiné řešení: Na přímce c zvolme libovolný bod, např. $X\left[2, \frac{1}{2}\right]$. Směrový vektor přímky c je $(8,1)$ a její parametrické vyjádření je $c : X = \left[2, \frac{1}{2}\right] + t(8,1), t \in \mathbb{R}$. Z $A, B \in c$ máme $A\left[2+8t_1, \frac{1}{2}+t_1\right]$, $B\left[2+8t_2, \frac{1}{2}+t_2\right]$. Dále $\overrightarrow{BA_0} \perp \overrightarrow{AA_0}$ a $\overrightarrow{AB_0} \perp \overrightarrow{BB_0}$ odkud $\overrightarrow{BA_0} \cdot \overrightarrow{AA_0} = 0 = \overrightarrow{AB_0} \cdot \overrightarrow{BB_0}$. Nejprve využijeme pouze rovnost obou skalárních součinů:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2} - 8t_2, 4 - t_2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} - 8t_1, 4 - t_1\right) &= \left(-2 - 8t_1, \tfrac{7}{2} - t_1\right) \cdot \left(-2 - 8t_2, \tfrac{7}{2} - t_2\right)\\ -8t_1 - 8t_2 + 65t_1t_2 + \tfrac{65}{4} &= \tfrac{25}{2}t_1 + \tfrac{25}{2}t_2 + 65t_1t_2 + \tfrac{65}{4}\\ \tfrac{41}{2}t_1 + \tfrac{41}{2}t_2 &= 0\\ t_2 &= -\,t_1\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice $\overrightarrow{AB_0} \cdot \overrightarrow{BB_0} = 0$ dostaneme po úpravě rovnici $-65t_1^2 + \frac{65}{4} = 0$, odkud $t_1 = \pm\frac{1}{2}$. Pro $t_1 = -\frac{1}{2}$ je $t_2 = \frac{1}{2}$, a tedy $A[-2,0]$, $B[6,1]$, resp. pro $t_1 = \frac{1}{2}$ je $t_2 = -\frac{1}{2}$ a $A'[6,1]$, $B'[-2,0]$. Souřadnice vrcholu C, resp. C' bychom opět spočítali jako v prvním řešení.

■ **Příklad 7:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $c : x + 2y = 0$ a souřadnice bodů $V[2,3]$ a $B_0[0,6]$.



Řešení: Body $B_0[0,6]$ a $V[2,3]$ leží na přímce v_b, její směrový vektor je proto $\overrightarrow{B_0V} = (2,-3)$ a $v_b : X = [0,6] + t(2,-3)$, $t \in \mathbb{R}$. Protože $B \in c \cap v_b$, jeho souřadnicím odpovídá ten parametr t, který splňuje podmínku $2t + 2(6-3t) = 0$. Řešením této rovnice je $t = 3$ a $B[0+6, 6-9] = [6,-3]$.

Vrchol $A \in b \cap c$, přitom přímka b prochází bodem B_0 kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je $b: 2x - 3y + 18 = 0$. Souřadnice vrcholu A získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} b \cap c: \quad 2x_A - 3y_A + 18 &= 0 \\ \underline{x_A + 2y_A \qquad\quad} &= 0 \\ -7y_A + 18 &= 0 \\ y_A = \tfrac{18}{7} \quad \Rightarrow x_A = -\tfrac{36}{7} \text{ a } A\left[-\tfrac{36}{7}, \tfrac{18}{7}\right] \end{aligned}$$

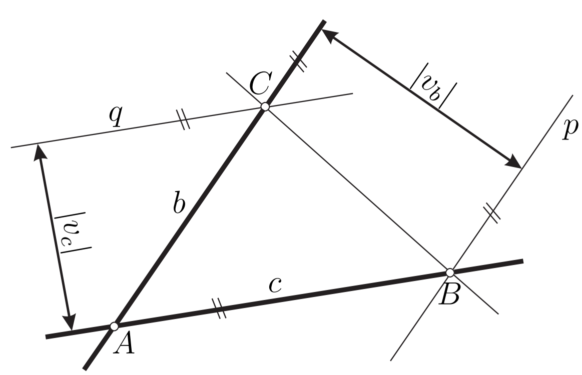
Pro výpočet souřadnic vrcholu $C \in b \cap v_c$ zbývá určit např. obecnou rovnici přímky v_c a vyřešit soustavu rovnic přímek b a v_c. Přímka v_c prochází bodem $V[2,3]$ kolmo k přímce c, její obecná rovnice je tedy $2x - y - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} b \cap v_c: \quad 2x_C - 3y_C + 18 &= 0 \\ \underline{2x_C - \ \ y_C - \ \ 1} &= 0 \\ -\ 2y_C + 19 &= 0 \\ y_C = \tfrac{19}{2} \quad \Rightarrow x_C = \tfrac{21}{4} \text{ a } C\left[\tfrac{19}{2}, \tfrac{21}{4}\right] \end{aligned}$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A\left[-\tfrac{36}{7}, \tfrac{18}{7}\right],\ B[6,-3],\ C\left[\tfrac{19}{2}, \tfrac{21}{4}\right]}$

■ **Příklad 8:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $b: x - y + 5 = 0$, $c: x + 2y + 2 = 0$ a velikosti výšek $|v_b| = 6\sqrt{2}$, $|v_c| = 3\sqrt{5}$. Ze všech možných řešení vyberte to, pro které jsou vzdálenosti vrcholů od počátku souřadné soustavy nejmenší.



Řešení: Vrchol A určíme jako průsečík přímek b, c:

$$\begin{array}{rl} b \cap c: & x_A - \ \ y_A + \ \ 5 = 0 \\ & \underline{x_A + 2y_A + \ \ 2 = 0} \\ & 3x_A \qquad\quad + 12 = 0 \\ & \qquad\qquad x_A = -4 \quad \Rightarrow y_A = 1 \text{ a } A[-4, 1] \end{array}$$

Podle vzorce pro vzdálenost bodu od přímky je $|v_b| = d(B, b) = \dfrac{|x - y + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 6\sqrt{2}$, kde $B[x, y]$. Po úpravě dostaneme $|x - y + 5| = 12$. Proto buď $B \in p : x - y - 7 = 0$, nebo $B \in p' : x - y + 17 = 0$.

V případě $B \in p$ pro souřadnice bodu B máme soustavu:

$$\begin{array}{rl} p \cap c: & x - \ \ y - \ \ 7 = 0 \\ & \underline{x + 2y + \ \ 2 = 0} \\ & 3x \qquad - 12 = 0 \\ & \qquad\quad x = 4 \quad \Rightarrow y = -3 \text{ a } B[4, -3] \end{array}$$

V případě $B \in p'$ dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rl} p' \cap c: & x - \ \ y + 17 = 0 \\ & \underline{x + 2y + \ \ 2 = 0} \\ & 3x \qquad + 36 = 0 \\ & \qquad\quad x = -12 \quad \Rightarrow y = 5 \text{ a } B'[-12, 5] \end{array}$$

Podobně $|v_c| = d(C, c) = \dfrac{|x + 2y + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 3\sqrt{5}$, kde $C[x, y]$, odkud $|x + 2y + 2| = 15$, a tedy buď $C \in q : x + 2y - 13 = 0$, nebo $C' \in q' : x + 2y + 17 = 0$.

V případě $C \in q$ máme:

$$\begin{array}{rl} q \cap b: & x + 2y - 13 = 0 \\ & \underline{x - y + \ \ 5 = 0} \\ & 3x \qquad - \ \ 3 = 0 \\ & \qquad\quad x = 1 \quad \Rightarrow y = 6 \text{ a } C[1, 6] \end{array}$$

V případě $C \in q'$ máme:

$$\begin{array}{rrl} q' \cap b: & x + 2y + 17 = 0 & \\ & x - \ \ y + \ \ 5 = 0 & \\ \hline & 3x \qquad + 27 = 0 & \\ & x = -9 & \Rightarrow y = -4 \text{ a } C'[-9,-4] \end{array}$$

Nyní z vrcholů B, B', resp. C, C' vybereme ty, které mají od počátku $P[0,0]$ menší vzdálenosti:

$$|PB| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5, \text{ resp. } |PB'| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

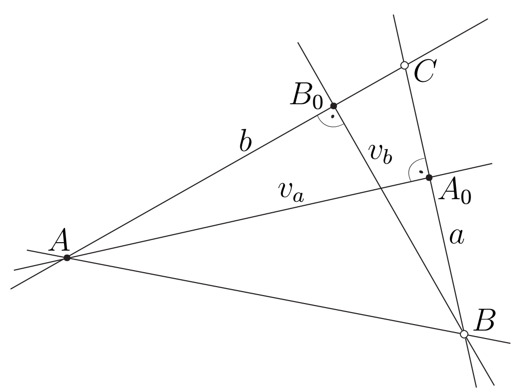
a od počátku P má tedy menší vzdálenost vrchol B.

$$|PC| = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}, \text{ resp. } |PC'| = \sqrt{(-9)^2 + (-4)^2} = \sqrt{97}$$

a od počátku P má tedy menší vzdálenost vrchol C. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-4,1],\ B[4,-3],\ C[1,6]}$

■ **Příklad 9:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-7,-5]$ a pat výšek $A_0\left[\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right]$ a $B_0\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.



Řešení: Vrchol B určíme jako průsečík přímek a, v_b, vrchol C jako průsečík přímek a a b. Normálový vektor přímky a procházející bodem $A_0\left[\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right]$ je $\overrightarrow{AA_0} = \left(\frac{42}{5}, \frac{36}{5}\right) \parallel (7,6)$, její obecná rovnice je proto $a : 7x + 6y - 23 = 0$.

Normálový vektor přímky v_b procházející bodem $B_0\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ je $\overrightarrow{AB_0} = \left(\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right) \parallel (3, 5)$, její obecná rovnice je proto $v_b : 3x + 5y - 5 = 0$.

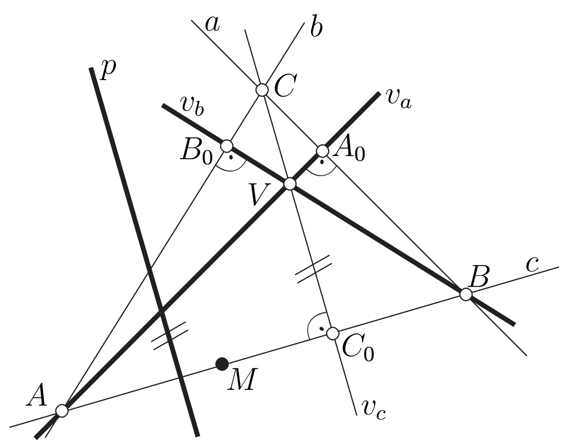
Souřadnice x_B, y_B vrcholu $B \in a \cap v_b$ tedy splňují soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 7x_B + 6y_B - 23 &= 0 \\ \underline{3x_B + 5y_B - 5} &\underline{{}= 0} \\ 17y_B + 34 &= 0 \\ y_B &= -2 \quad \Rightarrow x_B = 5 \text{ a } B[5, -2] \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření přímky b jdoucí body A, B_0 je $b : X = [-7, -5] + t(3, 5),\ t \in \mathbb{R}$, vrcholu $C \in a \cap b$ tedy odpovídá ten parametr t, který splňuje podmínku $7(-7 + 3t) + {}$ $+ 6(-5 + 5t) - 23 = 0$, odkud po úpravě $t = 2$ a $C[-1, 5]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[5, -2],\ C[-1, 5]}$

■ **Příklad 10:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $v_a : x - 2y + 1 = 0$, $v_b : x + y - 2 = 0$ a víte-li, že $v_c \parallel p : 3x - y = 0$ a že $M[3, -3] \in c$.[1]



[1]Poznamenejme, že trojúhelníků, jimž jsou dané tři přímky v_a, v_b, v_c výškami, je nekonečně mnoho. Všechny jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě V. Podmínce $M \in c$ však vyhovuje jediný.

Řešení: Z planimetrie víme, že je-li $c \perp v_c$ a $v_c \parallel p$, je také $c \perp p$. Přímka c, která prochází bodem $M[3, -3]$ kolmo k přímce $p : 3x - y = 0$, má obecnou rovnici $c : x + 3y + 6 = 0$. Vrchol A leží v průsečíku přímek v_a a c, proto:

$$
\begin{aligned}
v_a \cap c: \quad & x_A - 2y_A + 1 = 0 \\
& \underline{x_A + 3y_A + 6 = 0} \\
& 5y_A + 5 = 0 \\
& y_A = -1 \quad \Rightarrow x_A = -3 \text{ a } A[-3, -1]
\end{aligned}
$$

Vrchol B leží v průsečíku přímek v_b a c, proto:

$$
\begin{aligned}
v_b \cap c: \quad & x_B + y_B - 2 = 0 \\
& \underline{x_B + 3y_B + 6 = 0} \\
& 2y_B + 8 = 0 \\
& y_B = -4 \quad \Rightarrow x_B = 6 \text{ a } B[6, -4]
\end{aligned}
$$

Vrchol C leží v průsečíku přímek a a b, přitom přímka a prochází vrcholem B kolmo k přímce v_a, má tedy obecnou rovnici $a : 2x+y-8 = 0$, resp. přímka b prochází vrcholem A kolmo k přímce v_b a má tedy obecnou rovnici $b : x - y + 2 = 0$:

$$
\begin{aligned}
a \cap b: \quad & 2x_C + y_C - 8 = 0 \\
& \underline{x_C - y_C + 2 = 0} \\
& 3x_C \qquad - 6 = 0 \\
& x_C = 2 \quad \Rightarrow y_C = 4 \text{ a } C[2, 4]
\end{aligned}
$$

□

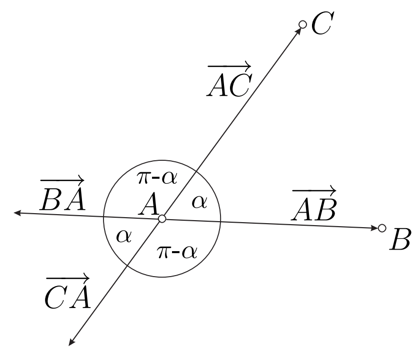
♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3, -1],\ B[6, -4],\ C[2, 4]}$

Kapitola 4

Úlohy s vnitřními úhly trojúhelníku

Tato kapitola obsahuje 10 příkladů, v jejichž zadání vystupují vnitřní úhly trojúhelníku, nebo se vlastností vnitřních úhlů trojúhelníků využívá při výpočtech. Tyto příklady jsou tedy určeny zejména na procvičení odchylek přímek a vektorů.

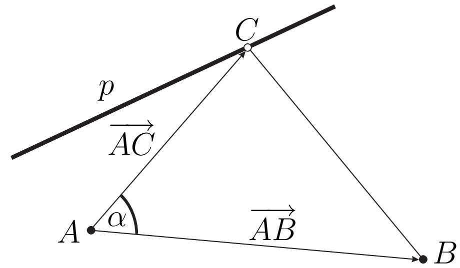
Musíme však být důsledni a velmi pečliví, zvláště při počítání odchylek vektorů. Chceme-li totiž např. vypočítat velikost úhlu $\alpha = |\sphericalangle BAC|$, musíme pracovat s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, nikoliv $\overrightarrow{BA}$, nebo $\overrightarrow{CA}$ (viz obrázek 4.1), neboť místo $\cos\alpha$ bychom mohli vyjádřit $\cos(\pi - \alpha)$ a spočítali bychom tak velikost úhlu $\pi - \alpha$.



Obrázek 4.1

Rovněž upozorňujeme na to, že mnohé rovnice budeme řešit umocněním; po takové neekvivalentní úpravě je v závěru řešení nutná zkouška.

■ **Příklad 1:** Vypočítejte souřadnice vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $A[0,0]$, $B[5,0]$, úhel $\alpha = 45°$ a víte-li, že $C \in p : x - 3y + 4 = 0$.



Řešení: Úhel $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 45°$, proto:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} &= \cos\alpha \\
\frac{(5,0) \cdot (x_C, y_C)}{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{5x_C}{5\sqrt{x_C^2 + y_C^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2x_C &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2} \\
4x_C^2 &= 2(x_C^2 + y_C^2) \\
x_C^2 &= y_C^2 \\
x_C &= \pm\, y_C
\end{aligned}$$

Protože $C \in p$, je $x_C - 3y_C + 4 = 0$, takže:

pro $x_C = y_C :\ y_C - 3y_C + 4 = 0 \ \Rightarrow y_C = 2,\ x_C = 2$ a $C[2,2]$

resp. pro $x_C = -y_C :\ -y_C - 3y_C + 4 = 0 \ \Rightarrow y_C = 1,\ x_C = -1$ a $C[-1,1]$.

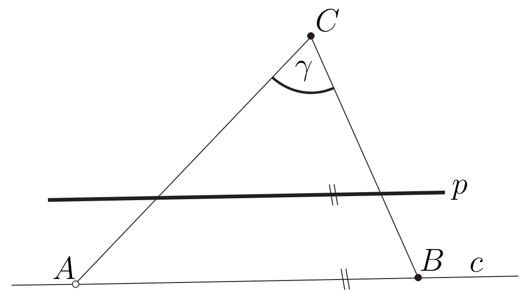
Jsou ale oba body řešením? Při řešení první rovnice jsme umocňovali, což byla v tomto případě neekvivalentní úprava a musíme tedy provést zkoušku:

$\mathrm{L}([2,2]) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{L}([-1,1]) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Požadavku $\alpha = 45°$ tedy vyhovuje pouze bod $C[2,2]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{C[2,2]}$

■ **Příklad 2:** Vypočítejte souřadnice vrcholu A trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $B[5,0]$, $C[0,5]$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\gamma \doteq 71°34'$) a víte-li, že $c \parallel p : x - 3y + 2 = 0$.



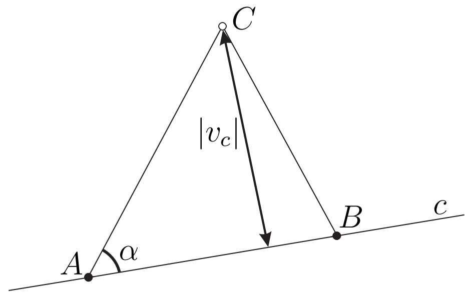
Řešení: Přímka c prochází vrcholem $B[5,0]$ rovnoběžně s přímkou $p : x - 3y + 2 = 0$, má proto obecnou rovnici $c : x - 3y - 5 = 0$. Vrchol A leží na přímce c, proto $x_A - 3y_A - 5 = 0$, odkud $x_A = 3y_A + 5$. Z dané hodnoty $\cos\gamma$ dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} &= \cos\gamma \\
\frac{(x_A, y_A - 5) \cdot (5, -5)}{\sqrt{x_A^2 + (y_A - 5)^2} \cdot \sqrt{25 + 25}} &= \frac{\sqrt{10}}{10} \\
\frac{(3y_A + 5, y_A - 5) \cdot (5, -5)}{\sqrt{(3y_A + 5)^2 + (y_A - 5)^2} \cdot 5\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{10}}{10} \\
10(10y_A + 50) &= 10\sqrt{5} \cdot \sqrt{10y_A^2 + 20y_A + 50} \\
100y_A^2 + 1000y_A + 2500 &= 5(10y_A^2 + 20y_A + 50) \\
50y_A^2 + 900y_A + 2250 &= 0 \\
y_A^2 + 18y_A + 45 &= 0 \\
(y_A + 3)(y_A + 15) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $y_A = -3$ je $x_A = -4$ a $A[-4,-3]$, resp. pro $y_A = -15$je $x_A = -40$ a $A'[-40,-15]$. Po provedení zkoušky je však $\mathrm{L}([-4,-3]) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, resp. $\mathrm{L}([-40,-15]) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ a vyhovuje tedy pouze $A[-4,-3]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-4,-3]}$

■ **Příklad 3:** Vypočítejte souřadnice vrcholu C trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholů $A[0,0]$, $B[3,0]$, úhel $\alpha = 60°$ a $|v_c| = 3\sqrt{3}$.



Řešení: Víme, že $|v_c|$ je vzdálenost vrcholu C od přímky c, a je tedy psát $\mathrm{d}(C,c) = 3\sqrt{3}$. K tomu, abychom mohli použít vzorec pro výpočet vzdálenosti vrcholu C od přímky c, potřebujeme najít obecnou rovnici přímky c. Protože oba vrcholy A, B leží na ose x, platí $c: y = 0$. Nyní již:

$$\begin{aligned}
\frac{|0 \cdot x_C + 1 \cdot y_C + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} &= 3\sqrt{3} \\
|y_C| &= 3\sqrt{3} \\
y_C &= \pm\, 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Z podmínky $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 60°$ a podle vzorce pro výpočet odchylky vektorů je:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} &= \cos\alpha \\
\frac{(3,0) \cdot (x_C, y_C)}{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{x_C^2 + y_C^2}} &= \frac{1}{2} \\
\frac{3x_C}{3\sqrt{x_C^2 + (\pm 3\sqrt{3})^2}} &= \frac{1}{2} \\
2x_C &= \sqrt{x_C^2 + 27} \\
4x_C^2 &= x_C^2 + 27 \\
3x_C^2 &= 27 \\
x_C &= \pm\, 3
\end{aligned}$$

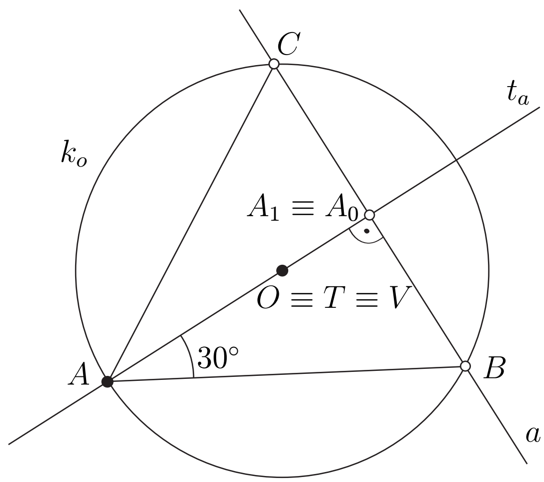
Při řešení rovnice jsme umocňovali, což byla v tomto případě neekvivalentní úprava, a musíme proto provést zkoušku (např. dosazením kořenů do třetího řádku):

$L(-3) = -\frac{1}{2}, \quad L(3) = \frac{1}{2}$

Řešením je tedy pouze $x_C = 3$. $\square$

♠ **Výsledek:** $\boxed{C\left[3, 3\sqrt{3}\right], \text{ resp.} C'\left[3, -3\sqrt{3}\right]}$

■ **Příklad 4:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C rovnostranného trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice vrcholu $A[-4, 0]$ a středu $O\left[0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ kružnice trojúhelníku opsané.



Řešení: Protože je trojúhelník ABC rovnostranný, platí $O \equiv T \equiv V$ ($\equiv S$, kde S je střed kružnice vepsané). Využijeme-li toho, že $O \equiv T$, je $A_1 = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AO}$ a $[x_{A_1}, y_{A_1}] = [-4, 0] + \frac{3}{2}\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \left[2, 2\sqrt{3}\right]$.

Z vlastností rovnostranného trojúhelníku plyne $A_1 = A_0$. Pak ovšem přímka a prochází bodem A_1 kolmo k přímce $t_a : X = [-4, 0] + t\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$ a její obecná rovnice je $a : 3x + \sqrt{3}y - 12 = 0$.

Z $B \in a$ plyne $3x_B + \sqrt{3}y_B - 12 = 0$, odkud $x_B = 4 - \frac{\sqrt{3}}{3}y_B$. Dále víme, že v rovnostranném trojúhelníku je $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ a protože $O \equiv S$, je $|\sphericalangle OAB| = 30°$ a platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AO}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} &= \cos 30° \\
\frac{\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cdot (x_B + 4, y_B)}{\sqrt{4^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} \cdot \sqrt{(x_B+4)^2 + y_B^2}} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\frac{\left(4, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(8 - \frac{\sqrt{3}}{3} y_B, y_B\right)}{\sqrt{16 + \frac{16}{3}} \cdot \sqrt{\left(8 - \frac{\sqrt{3}}{3} y_B\right)^2 + y_B^2}} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\frac{32 - \frac{4\sqrt{3}}{3} y_B + \frac{4\sqrt{3}}{3} y_B}{\sqrt{\frac{64}{3}} \cdot \sqrt{64 - \frac{16\sqrt{3}}{3} y_B + \frac{1}{3} y_B^2 + y_B^2}} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\frac{32}{\frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3} y_B^2 - \frac{16\sqrt{3}}{3} y_B + 64}} &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\
32 &= 4\sqrt{\tfrac{4}{3} y_B^2 - \tfrac{16\sqrt{3}}{3} y_B + 64} \\
\sqrt{\tfrac{4}{3} y_B^2 - \tfrac{16\sqrt{3}}{3} y_B + 64} &= 8 \\
\tfrac{4}{3} y_B^2 - \tfrac{16\sqrt{3}}{3} y_B + 64 &= 64 \\
\tfrac{4}{3} y_B^2 - \tfrac{16\sqrt{3}}{3} y_B &= 0 \\
y_B(y_B - 4\sqrt{3}) &= 0
\end{aligned}
$$

Pro $y_B = 0$ je $x_B = 4$ a $B[4,0]$, resp. pro $y_B = 4\sqrt{3}$ je $x_B = 0$ a $B'\left[0, 4\sqrt{3}\right]$.

Podobně $|\sphericalangle OAC| = \frac{\alpha}{2} = 30°$, což vede ke stejné rovnici a tedy i ke stejným kořenům.

Pro $B[4,0]$ je tedy $C\left[0, 4\sqrt{3}\right]$, resp. pro $B'\left[0, 4\sqrt{3}\right]$ je $C'[4,0]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[4,0],\ C\left[0,4\sqrt{3}\right],\ \text{resp. } B'\left[0,4\sqrt{3}\right],\ C'[4,0]}$

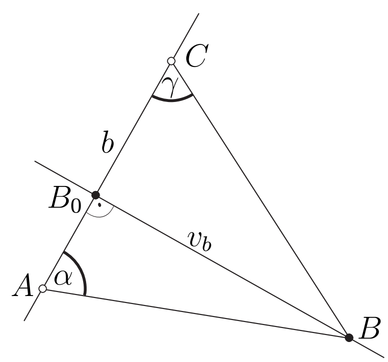
Jiné řešení: Přímku $a : 3x + \sqrt{3}y - 12 = 0$ určíme jako v předešlém řešení. Souřadnice vrcholu B, resp. C však získáme jiným způsobem. Protože je O střed kružnice opsané, je

$|OA| = |OB| = |OC|$ a pro souřadnice $[x, y]$ jak vrcholu B, tak i vrcholu C tedy platí:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(-4)^2 + \left(-\tfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2} =& \sqrt{x^2 + \left(y - \tfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\
\sqrt{16 + \tfrac{16}{3}} =& \sqrt{\left(4 - \tfrac{\sqrt{3}}{3}y\right)^2 + \left(y - \tfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\
\tfrac{8\sqrt{3}}{3} =& \sqrt{16 - \tfrac{8\sqrt{3}}{3}y + \tfrac{y^2}{3} + y^2 - \tfrac{8\sqrt{3}}{3}y + \tfrac{16}{3}} \\
\tfrac{64}{3} =& \tfrac{4}{3}y^2 - \tfrac{16\sqrt{3}}{3}y + \tfrac{64}{3} \\
y\left(y - 4\sqrt{3}\right) =& 0
\end{aligned}$$

Pro $y = 0$ je $x = 4$ a pro $y = 4\sqrt{3}$ je $x = 0$. Souřadnice vrcholů B a C tedy jsou $[4, 0]$ a $\left[0, 4\sqrt{3}\right]$ (v libovolném pořadí).

■ **Příklad 5:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, C trojúhelníku ABC, jestliže jsou dány souřadnice vrcholu $B[8, 1]$ a bodu $B_0[2, 4]$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ($\alpha \doteq 56°19'$) a úhel $\gamma = 45°$.



Řešení: Body B, B_0 leží na přímce v_b, proto je $\overrightarrow{BB_0} = (-6, 3) \parallel (2, -1)$ její směrový vektor. Hledané vrcholy A, C leží na přímce b, která prochází bodem $B_0[2, 4]$ kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je $b : 2x - y = 0$. Platí tedy $2x_A - y_A = 0$, odkud $y_A = 2x_A$, resp. $2x_C - y_C = 0$, odkud $y_C = 2x_C$.

Protože podle zadání $\alpha < 90°$, platí $|\sphericalangle BAB_0| = \alpha$:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_0}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_0}\right|} &= \cos\alpha \\
\frac{(8 - x_A, 1 - 2x_A) \cdot (2 - x_A, 4 - 2x_A)}{\sqrt{(8 - x_A)^2 + (1 - 2x_A)^2} \cdot \sqrt{(2 - x_A)^2 + (4 - 2x_A)^2}} &= \frac{2\sqrt{13}}{13} \\
\frac{5x_A^2 - 20x_A + 20}{\sqrt{5x_A^2 - 20x_A + 65} \cdot \sqrt{5x_A^2 - 20x_A + 20}} &= \frac{2\sqrt{13}}{13} \\
\frac{\sqrt{5(x_A^2 - 4x_A + 4)}}{\sqrt{5(x_A^2 - 4x_A + 13)}} &= \frac{2\sqrt{13}}{13} \\
13\sqrt{x_A^2 - 4x_A + 4} &= 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{x_A^2 - 4x_A + 13} \\
169x_A^2 - 676x_A + 676 &= 52x_A^2 - 208x_A + 676 \\
117x_A^2 - 468x_A &= 0 \\
x_A(x_A - 4) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $x_A = 0$ je $y_A = 0$ a $A[0, 0]$, resp. pro $x_A = 4$ je $y_A = 8$ a $A'[4, 8]$.

Díky tomu, že $\gamma < 90°$, platí $|\sphericalangle BCB_0| = \gamma$, takže:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB_0}}{\left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB_0}\right|} &= \cos\gamma \\
\frac{(8 - x_C, 1 - 2x_C) \cdot (2 - x_C, 4 - 2x_C)}{\sqrt{(8 - x_C)^2 + (1 - 2x_C)^2} \cdot \sqrt{(2 - x_C)^2 + (4 - 2x_C)^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\vdots \\
\frac{\sqrt{5(x_C^2 - 4x_C + 4)}}{\sqrt{5(x_C^2 - 4x_C + 13)}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2\sqrt{x_C^2 - 4x_C + 4} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_C^2 - 4x_C + 13} \\
4x_C^2 - 16x_C + 16 &= 2x_C^2 - 8x_C + 26 \\
2x_C^2 - 8x_C - 10 &= 0 \\
(x_C - 5)(x_C + 1) &= 0
\end{aligned}$$

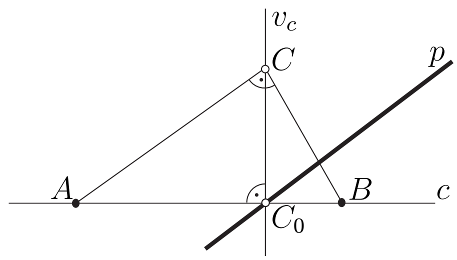
Pro $x_C = 5$ je $y_C = 10$ a $C[5, 10]$, resp. pro $x_C = -1$ je $y_C = -2$ a $C'[-1, -2]$.

Na první pohled by se zdálo, že řešením jsou vrcholy čtyř trojúhelníků: ABC, ABC', $A'BC$

a $A'BC'$. Ovšem protože $\alpha < \frac{\pi}{2}$ a $\gamma < \frac{\pi}{2}$, je pata výšky spuštěná z vrcholu B (bod B_0) vnitřní bod úsečky AC. Je-li tedy $A[0,0]$, je B_0 vnitřní bod úsečky AC pro $C[5,10]$, resp. je-li $A[4,8]$, je B_0 vnitřní bod úsečky AC pro $C[1,2]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[0,0],\ C[5,10],\ \text{resp. } A'[4,8],\ C'[1,2]}$

■ **Příklad 6:** Vypočítejte souřadnice vrcholu C pravoúhlého trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů $A[-11,-7]$ a $B[9,3]$ a obecnou rovnici přímky $p : 2x - y - 12 = 0$, na níž leží pata výšky C_0.



Řešení: Bod C_0 leží v průsečíku přímek c, p. Přímka c prochází vrcholy A, B, má tedy parametrickou rovnici $c : X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$, přitom $\overrightarrow{AB} = (20,10)$, takže je $c : X = A[-11,-7] + t \cdot (20,10)$.[1] Protože je trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB, musí být C_0 vnitřní bod úsečky AB a odpovídá mu parametr $t \in (0,1)$ takový, že:

$$\begin{aligned} 2(-11 + 20t) - (-7 + 10t) - 12 &= 0 \\ -22 + 40t + 7 - 10t - 12 &= 0 \\ 30t - 27 &= 0 \\ t &= \tfrac{9}{10} \end{aligned}$$

Je tedy $C_0[-11 + 20 \cdot \frac{9}{10}, -7 + 10 \cdot \frac{9}{10}] = [7,2]$.
Hledaný vrchol C leží na přímce v_c, která prochází bodem C_0 kolmo k přímce c, takže má

[1] Vektor $\overrightarrow{AB}$ jsme nechali v nezkráceném tvaru, abychom mohli ověřit, zda je bod C_0 vnitřním bodem úsečky AB.

obecnou rovnici $v_c : 2x + y - 16 = 0$ a platí $y_C = 16 - 2x_C$. Úhel $\gamma = 90°$, proto:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \\
(-11 - x_C, -7 - y_C) \cdot (9 - x_C, 3 - y_C) &= 0 \\
(-11 - x_C, -23 + 2x_C) \cdot (9 - x_C, -13 + 2x_C) &= 0 \\
-99 + 2x_C + x_C^2 + 299 - 72x_C + 4x_C^2 &= 0 \\
5x_C^2 - 70x_C + 200 &= 0 \\
x_C^2 - 14x_C + 40 &= 0 \\
(x_C - 4)(x_C - 10) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $x_C = 4$ je $y_C = 8$ a $C[4, 8]$, resp. pro $x_C = 10$ je $y_C = -4$ a $C'[10, -4]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{C[4, 8], \text{ resp. } C'[10, -4]}$

Jiné řešení: Souřadnice bodu $C_0[7, 2]$ a obecnou rovnici přímky $v_c : 2x + y - 16 = 0$ spočítáme stejně jako v předchozím řešení. Vrchol $C \in v_c$, proto $y_C = 16 - 2x_C$. Souřadnice vrcholu C můžeme vypočítat podle Eukleidovy věty o výšce. Platí totiž:

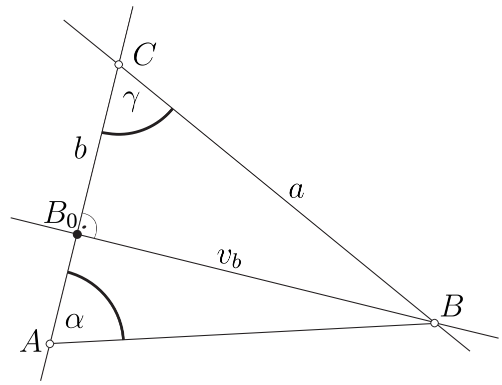
$$|AC_0| \cdot |C_0B| = |C_0C|^2$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(7+11)^2 + (2+7)^2} \cdot \sqrt{(9-7)^2 + (3-2)^2} &= (x_C - 7)^2 + (y_C - 2)^2 \\
\sqrt{405} \cdot \sqrt{5} &= (x_C - 7)^2 + (14 - 2x_C)^2 \\
\sqrt{2025} &= x_C^2 - 14x_C + 49 + 196 - 56x_C + 4x_C^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5x_C^2 - 70x_C + 200 &= 0 \\
x_C^2 - 14x_C + 40 &= 0 \\
(x_C - 4)(x_C - 10) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $x_C = 4$ je $y_C = 8$ a $C[4, 8]$, resp. pro $x_C = 10$ je $y_C = -4$ a $C'[10, -4]$.

■ **Příklad 7:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecnou rovnici přímky $a: 3x + y - 17 = 0$, souřadnice paty výšky $B_0[0, 5]$, víte-li, že $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\alpha \doteq 71°34'$), $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\gamma \doteq 63°26'$) a že $y_C \geq y_{B_0}$.



Řešení: Vrchol C leží na přímce a, platí tedy $3x_C + y_C - 17 = 0$, odkud $y_C = 17 - 3x_C$. Směrový vektor přímky a je $\vec{u} = (1, -3)$ a směrový vektor přímky b je $\overrightarrow{CB_0} = (-x_C, 5 - y_C) = (-x_C, 3x_C - 12)$. Dále víme, že $\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$, proto:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\vec{u}\cdot\overrightarrow{CB_0}\right|}{|\vec{u}|\cdot\left|\overrightarrow{CB_0}\right|} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\\
\frac{|(1,-3)\cdot(-x_C, 3x_C-12)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-x_C)^2+(3x_C-12)^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\\
\frac{|-x_C - 9x_C + 36|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{x_C^2+9x_C^2-72x_C+144}} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\\
5\cdot|-10x_C+36| &= 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{10x_C^2-72x_C+144}\\
100x_C^2 - 720x_C + 1296 &= 20x_C^2 - 144x_C + 288\\
80x_C^2 - 576x_C + 1008 &= 0\\
5x_C^2 - 36x_C + 63 &= 0\\
(5x_C - 21)(x_C - 3) &= 0
\end{aligned}$$

Odtud $x_C = \frac{21}{5}$ nebo $x_C = 3$, čemuž odpovídá $y_C = \frac{22}{5}$, resp. $y_C = 8$. Podle zadání je ale $y_C \geq y_{B_0} = 5$, proto $y_C = 8$ a $C[3, 8]$.

Vrchol B určíme jako průsečík přímek a, v_b. Přímka v_b prochází bodem $B_0[0, 5]$ kolmo k přímce b se směrovým vektorem $\overrightarrow{CB_0} = (-x_C, 3x_C - 12) = (-3, -3) \parallel (1, 1)$, a má tedy obecnou rovnici $v_b : x + y - 5 = 0$ a souřadnice vrcholu B získáme řešením soustavy rovnic:

$$
\begin{array}{rl}
a \cap v_b : \qquad & 3x_B + y_B - 17 = 0 \\
& \underline{\ \ x_B + y_B - \ \ 5 = 0} \\
& 2x_B \qquad\ \ - 12 = 0 \\
& \qquad\qquad x_B = 6 \quad \Rightarrow y_B = -1 \text{ a } B[6, -1]
\end{array}
$$

$A \in b : X = C[3, 8] + t(1, 1),\ t \in \mathbb{R}$, a proto je $A[3 + t, 8 + t]$ pro vhodné $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Dále víme, že $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, platí tedy:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} &= \frac{\sqrt{10}}{10} \\
\frac{(3 - t, -9 - t) \cdot (-t, -t)}{\sqrt{(3 - t)^2 + (-9 - t)^2} \cdot \sqrt{(-t)^2 + (-t)^2}} &= \frac{\sqrt{10}}{10} \\
\frac{-3t + t^2 + 9t + t^2}{\sqrt{9 - 6t + t^2 + 81 + 18t + t^2} \cdot \sqrt{2t^2}} &= \frac{\sqrt{10}}{10} \\
\frac{2t(t + 3)}{\sqrt{2(t^2 + 6t + 45)} \cdot |t| \cdot \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad (t \neq 0, \text{ jinak by bylo } A = C) \\
\pm 10(t + 3) &= \sqrt{10} \cdot \sqrt{t^2 + 6t + 45} \\
100(t^2 + 6t + 9) &= 10(t^2 + 6t + 45) \\
90t^2 + 540t + 450 &= 0 \\
t^2 + 6t + 5 &= 0 \\
(t + 5)(t + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Během řešení jsme provedli neekvivalentní úpravu a musíme tedy provést zkoušku:

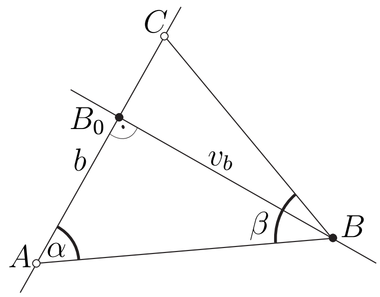
$\mathrm{L}(-5) = -20, \quad \mathrm{P}(-5) = 20, \quad$ resp. $\quad \mathrm{L}(-1) = 20, \quad \mathrm{P}(-1) = 20$

Vidíme tedy, že řešením dané rovnice je pouze $t = -1$, takže je $A[2, 7]$.

Nakonec je třeba zkouškou ověřit, zda je skalární součin $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ kladný: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$ $= (-1, -1) \cdot (3, -9) = -3 + 9 = 6$ a výsledek tedy skutečně odpovídá zadání. $\square$

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[2, 7],\ B[6, -1],\ C[3, 8]}$

■ **Příklad 8:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, C trojúhelníku ABC, ve kterém znáte souřadnice vrcholu $B[6,3]$, bodu $B_0[0,6]$, velikost vnitřního úhlu $\alpha = 45°$ a $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\beta \doteq 63°26'$).



Řešení: Body B, B_0 leží na přímce v_b, proto $\overrightarrow{BB_0} = (-6,3) \parallel (2,-1)$ je její směrový vektor. Hledané vrcholy A, C leží na přímce b, která prochází bodem $B_0[0,6]$ kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je $b: 2x-y+6=0$. Platí tedy $2x_A-y_A+6=0$, odkud $y_A = 2x_A + 6$, resp. $2x_C - y_C + 6 = 0$, odkud $y_C = 2x_C + 6$.

Dále víme, že $\alpha = |\sphericalangle BAB_0| = 45°$, proto:

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB_0}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_0}\right|} = \cos\alpha$$

$$\frac{(6-x_A, 3-y_A)\cdot(-x_A, 6-y_A)}{\sqrt{(6-x_A)^2+(3-y_A)^2}\cdot\sqrt{(-x_A)^2+(6-y_A)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{(6-x_A, 3-2x_A-6)\cdot(-x_A, 6-2x_A-6)}{\sqrt{(6-x_A)^2+(3-2x_A-6)^2}\cdot\sqrt{(-x_A)^2+(6-2x_A-6)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5x_A^2}{\sqrt{5x_A^2+45}\cdot\sqrt{5x_A^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x_A^2}}{\sqrt{x_A^2+9}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\,|x_A| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{x_A^2+9}$$

$$4x_A^2 = 2x_A^2 + 18$$

$$x_A^2 = 9$$

$$x_A = \pm 3$$

Pro $x_A = 3$ je $y_A = 12$ a $A[3, 12]$, resp. pro $x_A = -3$ je $y_A = 0$ a $A'[-3, 0]$.

Víme také, že $\beta = |\sphericalangle ABC|$, odkud pro $A[3, 12]$ je:

$$
\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} &= \cos\beta \\
\frac{(-3, 9) \cdot (x_C - 6, y_C - 3)}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2} \cdot \sqrt{(x_C - 6)^2 + (y_C - 3)^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
\frac{(-3, 9) \cdot (x_C - 6, 2x_C + 6 - 3)}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{(x_C - 6)^2 + (2x_C + 6 - 3)^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
\frac{15x_C + 45}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{(x_C - 6)^2 + (2x_C + 3)^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
5 \cdot 15(x_C + 3) &= 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{x_C^2 - 12x_C + 36 + 4x_C^2 + 12x_C + 9} \\
25(x_C^2 + 6x_C + 9) &= 2(5x_C^2 + 45) \\
15x_C^2 + 150x_C + 135 &= 0 \\
x_C^2 + 10x_C + 9 &= 0 \\
(x_C + 1)(x_C + 9) &= 0
\end{aligned}
$$

resp. pro $A'[-3, 0]$:

$$
\begin{aligned}
\frac{(-9, -3) \cdot (x_C - 6, y_C - 3)}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2} \cdot \sqrt{(x_C - 6)^2 + (y_C - 3)^2}} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\
&\vdots \\
(x_C - 9)(x_C - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

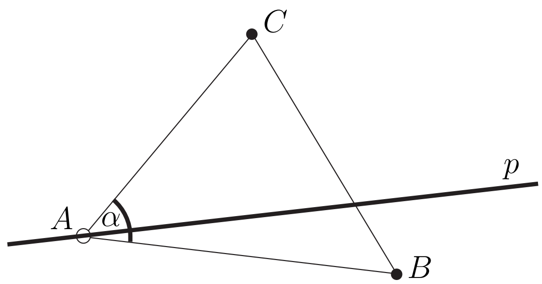
V obou případech udělejme zkoušku:

$$
\begin{array}{cc}
\mathrm{L}(-1) = \frac{\sqrt{5}}{5} & \mathrm{L}(-9) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\
\mathrm{L}(1) = \frac{\sqrt{5}}{5} & \mathrm{L}(9) = -\frac{\sqrt{5}}{5}
\end{array}
$$

Vidíme tedy, že pro $A[3, 12]$ je $x_C = -1$, odkud $y_C = 4$ a $C[-1, 4]$, resp. pro $A'[-3, 0]$ je $x_C = 1$, odkud $y_C = 8$ a $C'[1, 8]$. $\square$

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[3, 12],\ C[-1, 4],\ \text{resp. } A'[-3, 0],\ C'[1, 8]}$

■ **Příklad 9:** V trojúhelníku ABC jsou dány souřadnice vrcholů $B[6,1]$, $C[1,6]$ a velikost vnitřního úhlu $\alpha = 45°$. Vypočítejte souřadnice vrcholu A, víte-li, že $A \in p : 3x - y + 3 = 0$. Ze všech řešení vyberte to, pro které je vzdálenost počátku O_{xy} od přímky c minimální.



Řešení: Protože $A[x_A, y_A] \in p$, platí $3x_A - y_A + 3 = 0$, odkud $y_A = 3x_A + 3$. Dále víme, že $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 45°$, proto:

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} &= \cos\alpha \\
\frac{(6 - x_A, 1 - y_A) \cdot (1 - x_A, 6 - y_A)}{\sqrt{(6 - x_A)^2 + (1 - y_A)^2} \cdot \sqrt{(1 - x_A)^2 + (6 - y_A)^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{(6 - x_A, -2 - 3x_A) \cdot (1 - x_A, 3 - 3x_A)}{\sqrt{(6 - x_A)^2 + (-2 - 3x_A)^2} \cdot \sqrt{(1 - x_A)^2 + (3 - 3x_A)^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{10x_A^2 - 10x_A}{\sqrt{10x_A^2 + 40} \cdot \sqrt{10x_A^2 - 20x_A + 10}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\frac{x_A^2 - x_A}{\sqrt{x_A^4 - 2x_A^3 + 5x_A^2 - 8x_A + 4}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
2(x_A^2 - x_A) &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x_A^4 - 2x_A^3 + 5x_A^2 - 8x_A + 4} \\
4(x_A^4 - 2x_A^3 + x_A^2) &= 4(x_A^4 - 2x_A^3 + 5x_A^2 - 8x_A + 4) \\
2x_A^4 - 4x_A^3 - 6x_A^2 + 16x_A - 8 &= 0 \\
x_A^4 - 2x_A^3 - 3x_A^2 + 8x_A - 4 &= 0 \\
(x_A - 1)\left(x_A^3 - x_A^2 - 4x_A + 4\right) &= 0 \\
(x_A - 1)^2\left(x_A^2 - 4\right) &= 0 \\
(x_A - 1)^2 (x_A - 2)(x_A + 2) &= 0
\end{aligned}$$

Po provedení zkoušky je $\mathrm{L}(1) = 0$, $\mathrm{L}(-2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{L}(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a řešením dané rovnice jsou tedy pouze kořeny $x_A = -2$, resp. $x'_A = 2$.

Pro $x_A = -2$ je $y_A = -3$ a $A[-2, -3]$, pro $x'_A = 2$ je $y'_A = 9$ a $A'[2, 9]$.

Nyní ještě musíme vybrat ten vrchol A, pro který je $d(O_{xy}, c)$ minimální.

Vrcholy A,B leží na přímce c, její směrový vektor je tedy $\overrightarrow{AB} = (8, 4) \parallel (2, 1)$, resp. $\overrightarrow{A'C} = (4, -8) \parallel (1, -2)$ a její obecná rovnice $c : x - 2y - 4 = 0$, resp. $c' : 2x + y - 13 = 0$.

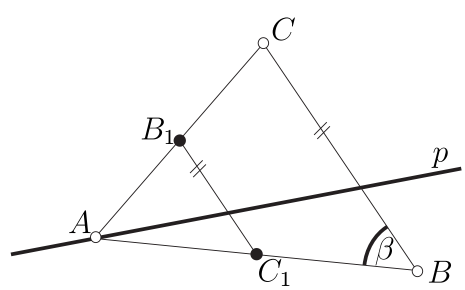
$d(O_{xy}, c) = \dfrac{|0 - 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$d(O_{xy}, c') = \dfrac{|0 - 2 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{5}}$

$\frac{4}{\sqrt{5}} < \frac{13}{\sqrt{5}}$, takže zadání vyhovuje $A[-2, -3]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-2, -3]}$

■ **Příklad 10:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte souřadnice středů stran $B_1[0, 3]$ a $C_1[1, 0]$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ($\beta \doteq 53°07'$) a víte-li, že $A \in p : x - y + 3 = 0$.



Řešení: Protože $A[x_A, y_A] \in p$, platí $x_A - y_A + 3 = 0$, odkud $x_A = y_A - 3$.

Víme, že $B_1C_1 \parallel CB$, a že tedy $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle B_1C_1A| = \beta$. Pak ovšem:

$$\frac{\overrightarrow{C_1B_1} \cdot \overrightarrow{C_1A}}{\left|\overrightarrow{C_1B_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C_1A}\right|} = \cos\beta$$

$$\frac{(-1, 3) \cdot (x_A - 1, y_A)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(x_A - 1)^2 + y_A^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{(-1, 3) \cdot (y_A - 4, y_A)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(y_A - 4)^2 + y_A^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{-y_A+4+3y_A}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{y_A^2-8y_A+16+y_A^2}} &= \frac{3}{5}\\
\frac{4+2y_A}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2y_A^2-8y_A+16}} &= \frac{3}{5}\\
\frac{4+2y_A}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{y_A^2-4y_A+8}} &= \frac{3}{5}\\
\frac{4+2y_A}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{y_A^2-4y_A+8}} &= \frac{3}{5}\\
10+5y_A &= 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{y_A^2-4y_A+8}\\
100+100y_A+25y_A^2 &= 45y_A^2-180y_A+360\\
20y_A^2-280y_A+260 &= 0\\
y_A^2-14y_A+13 &= 0\\
(y_A-1)(y_A-13) &= 0
\end{aligned}$$

Po provedení zkoušky je $\mathrm{L}(1)=\frac{3}{5}$, resp. $\mathrm{L}(13)=\frac{3}{5}$. Oba kořeny jsou řešením dané rovnice, takže pro $y_A=1$ je $x_A=-2$ a $A[-2,1]$, resp. pro $y_{A'}=13$ je $x_{A'}=10$ a $A'[10,13]$.

Dále, protože C_1 je střed úsečky AB, platí:

$B=A+2\overrightarrow{AC_1}$ a $[x_B,y_B]=[-2,1]+2(3,-1)=[4,-1]$, resp.

$B'=A'+2\overrightarrow{A'C_1}$ a $[x_{B'},y_{B'}]=[10,13]+2(-9,-13)=[-8,-13]$.

Podobně, protože B_1 je střed úsečky AC, platí:

$C=A+2\overrightarrow{AB_1}$ a $[x_C,y_C]=[-2,1]+2(2,2)=[2,5]$, resp.

$C'=A'+2\overrightarrow{A'B_1}$ a $[x_{C'},y_{C'}]=[10,13]+2(-10,-10)=[-10,-7]$. $\square$

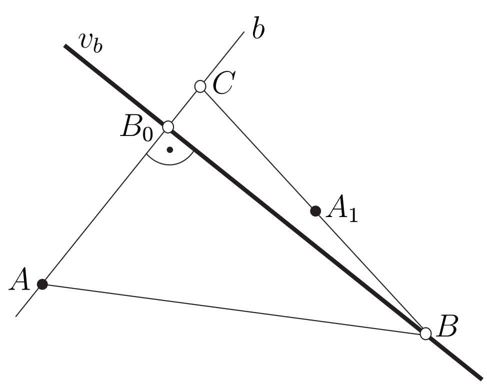
♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-2,1],\ B[4,-1],\ C[2,5],\ \text{resp. } A'[10,13],\ B'[-8,-13],\ C'[-10,-7]}$

Kapitola 5

Další úlohy

V této kapitole jsou řešeny příklady, v jejichž zadání se objevují současně údaje o těžnicích, středech stran a těžišti na straně jedné a údaje o výškách, jejich patách a průsečíku na straně druhé.

■ **Příklad 1:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[2, 7]$, bod $A_1[1, 3]$ a obecnou rovnici přímky $v_b : 3x - 2y + 11 = 0$.



Řešení: Z $B \in v_b$ plyne $3x_B - 2y_B + 11 = 0$, odkud $y_B = \dfrac{3x_B + 11}{2}$. Vrchol C leží na přímce b procházející vrcholem A kolmo k přímce v_b, takže její obecná rovnice je $b : 2x + 3y - 25 = 0$. Souřadnice $[x_C, y_C]$ vrcholu C tedy splňují rovnost $2x_C + 3y_C - 25 = 0$, odkud $x_C = \dfrac{25 - 3y_C}{2}$. Bod A_1 je střed úsečky BC a platí tedy:

$$x_{A_1} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_B + \frac{25-3y_C}{2}}{2}, \quad y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{\frac{3x_B+11}{2} + y_C}{2}$$

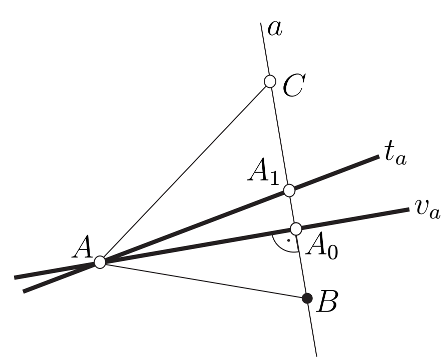
Po úpravě a dosazení již můžeme řešit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_B - 3y_C + 21 &= 0 \\ \underline{3x_B + 2y_C - 1} &\underline{= 0} \\ 13x_B \qquad\quad + 39 &= 0 \\ x_B = -3 \ &\Rightarrow y_C = 5 \end{aligned}$$

Je tedy $y_B = \dfrac{3x_B + 11}{2} = 1$, resp. $x_C = \dfrac{25 - 3y_C}{2} = 5$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[-3,1],\ C[5,5]}$

■ **Příklad 2:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů A, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $B\left[\frac{5}{2}, 0\right]$ a obecné rovnice přímek $v_a : x - 2y = 0$ a $t_a : 6x - 7y + 5 = 0$.



Řešení: Vrchol A leží v průsečíku přímek v_a a t_a, proto:

$$\begin{aligned} x_A - 2y_A \qquad &= 0 \\ \underline{6x_A - 7y_A + 5} &\underline{= 0} \\ 5y_A + 5 &= 0 \\ y_A = -1 \ &\Rightarrow x_A = -2 \text{ a } A[-2,-1] \end{aligned}$$

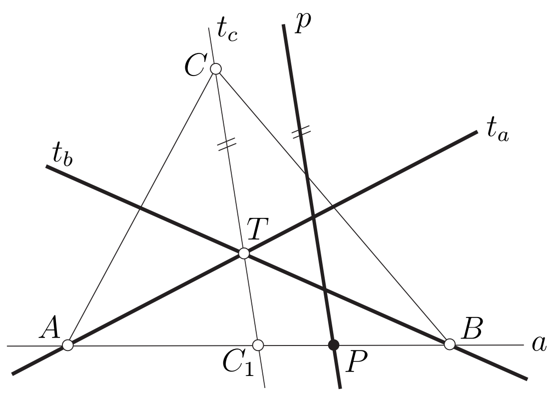
Přímka a, na níž leží vrchol C, prochází vrcholem B kolmo k přímce v_a, její obecná rovnice je tedy $a : 2x + y - 5 = 0$. Víme dále, že bod $A_1 \in a \cap t_a$ je střed úsečky BC, a že tedy $[x_{A_1}, y_{A_1}] = \left[\dfrac{x_B + x_C}{2}, \dfrac{y_B + y_C}{2}\right]$, odkud $[x_C, y_C] = [2x_{A_1} - x_B, 2y_{A_1} - y_B]$. Nejdříve však musíme vypočítat souřadnice bodu A_1:

$$\begin{aligned} a \cap t_a : \quad & 2x_{A_1} + y_{A_1} - 5 = 0 \\ & \underline{6x_{A_1} - 7y_{A_1} + 5 = 0} \\ & -10y_{A_1} + 20 = 0 \\ & y_{A_1} = 2 \quad \Rightarrow x_{A_1} = \tfrac{3}{2} \text{ a } A_1\left[\tfrac{3}{2}, 2\right] \end{aligned}$$

Nyní již $[x_C, y_C] = [2x_{A_1} - x_B, 2y_{A_1} - y_B] = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-2,-1],\ C\left[\frac{1}{2}, 4\right]}$

■ **Příklad 3:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte obecné rovnice přímek $t_a : x - y - 2 = 0$, $t_b : x + 2y + 1 = 0$ a víte-li, že $t_c \parallel p : x + 1 = 0$, a že přímka p protne přímku c v bodě $P\left[?, -\frac{9}{2}\right]$.



Řešení: Nejprve určíme těžiště T jako průsečík přímek t_a a t_b:

$$\begin{aligned} T \in t_a \cap t_b : \quad & x_T - y_T - 2 = 0 \\ & \underline{x_T + 2y_T + 1 = 0} \\ & 3x_T \qquad - 3 = 0 \\ & x_T = 1 \quad \Rightarrow y_T = -1 \text{ a } T[1, -1] \end{aligned}$$

Tečna t_c prochází bodem T rovnoběžně s přímkou p, má tedy obecnou rovnici $t_c : x-1 = 0$.[1] Z $P \in p$ plyne $x_P = -1$ a $P\left[-1, -\frac{9}{2}\right]$. Dále $A \in t_a$, proto $x_A - y_A - 2 = 0$, odkud $x_A = y_A + 2$, resp. $B \in t_b$, proto $x_B + 2y_B + 1 = 0$, odkud $x_B = -1 - 2y_B$. Přímka t_c protne úsečku AB v jejím středu C_1, pro jehož souřadnice platí:

$$1 = x_{C_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{y_A + 2 - 2y_B - 1}{2}, \text{ odkud } y_A = 2y_B + 1 \text{ a } x_A = y_A + 2 = 2y_B + 3$$

Směrový vektor přímky c je $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (-2y_B - 1 - 2y_B - 3, y_B - 2y_B - 1) = (-4y_B - 4, -y_B - 1) = (-y_B - 1) \cdot (4, 1) \parallel (4, 1)$ a obecná rovnice přímky c procházející bodem P je $c : x - 4y - 17 = 0$.

$$\begin{aligned} A \in t_a \cap c: \quad & x_A - y_A - 2 = 0 \\ & x_A - 4y_A - 17 = 0 \\ \hline & 3y_A + 15 = 0 \\ & y_A = -5 \quad \Rightarrow x_A = -3 \text{ a } A[-3, -5] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \in t_b \cap c: \quad & x_B + 2y_B + 1 = 0 \\ & x_B - 4y_B - 17 = 0 \\ \hline & 6y_B + 18 = 0 \\ & y_B = -3 \quad \Rightarrow x_B = 5 \text{ a } B[5, -3] \end{aligned}$$

Souřadnice $[x_C, y_C]$ vrcholu C spočítáme např. z vlastnosti těžiště:

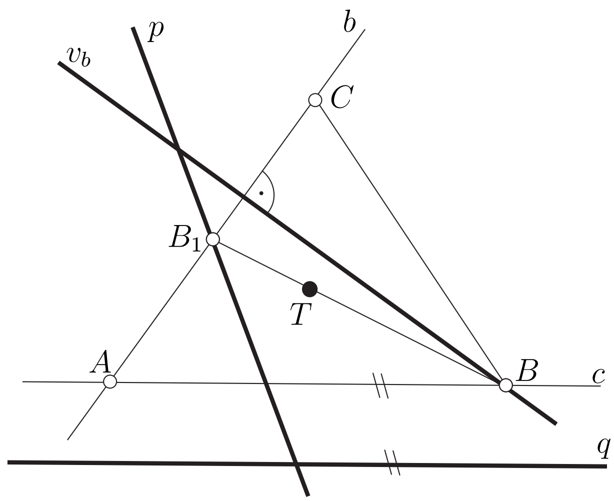
$$\left.\begin{aligned} x_T &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_T &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_C &= 3x_T - x_A - x_B = 1 \\ y_C &= 3y_T - y_A - y_B = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C[1, 5]$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3, -5],\ B[5, -3],\ C[1, 5]}$

■ **Příklad 4:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte těžiště $T[1, 3]$, přímky $v_b : x + 2y - 3 = 0$, $p : x - y + 6 = 0$ a $q : x + 4y - 9 = 0$ a víte-li, že $B_1 \in p$ a že $c \parallel q$.

[1] Trojúhelníků, jimž jsou dané přímky t_a, t_b, t_c těžnicemi, je nekonečně mnoho. Všechny jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v bodě T. Podmínce $P \in c$ však vyhovuje jediný.



Řešení: Z $B_1 \in p$ plyne $x_{B_1} - y_{B_1} + 6 = 0$, odkud $x_{B_1} = y_{B_1} - 6$. Podobně z $B \in v_b$ plyne $x_B + 2y_B - 3 = 0$, odkud $x_B = 3 - 2y_B$. Dále je $T = B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = B + \frac{2}{3}(B_1 - B) = \frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{3}B$, odkud $[x_T, y_T] = \left[\frac{2}{3}x_{B_1} + \frac{1}{3}x_B, \frac{2}{3}y_{B_1} + \frac{1}{3}y_B\right]$. Po dosazení a rozepsání je:

$$\begin{array}{ll} x_T: & \frac{2}{3}(y_{B_1} - 6) + \frac{1}{3}(3 - 2y_B) = 1 \\ y_T: & \frac{2}{3}y_{B_1} + \frac{1}{3}y_B = 3 \\ \hline & 2y_{B_1} - 2y_B = 12 \\ & 2y_{B_1} + y_B = 9 \\ \hline & 3y_B = -3 \\ & y_B = -1 \ \Rightarrow y_{B_1} = 5 \end{array}$$

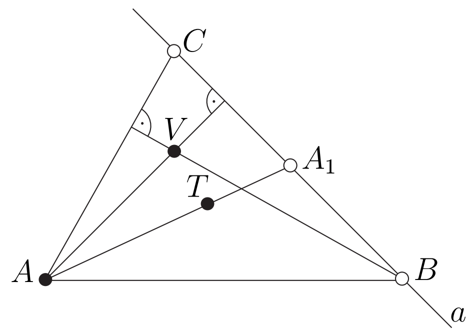
Nyní již $x_B = 3 - 2y_B = 5$ a $B[5, -1]$, resp. $x_{B_1} = y_{B_1} - 6 = -1$ a $B_1[-1, 5]$.

Zbylé vrcholy A a C leží na přímce b, která prochází bodem B_1 kolmo k přímce v_b, takže její parametrická rovnice je $b: X = B_1[-1, 5] + t \cdot (1, 2),\ t \in \mathbb{R}$. Protože je B_1 střed úsečky AC, je $A[-1 + t_0, 5 + 2t_0]$ a $C[-1 - t_0, 5 - 2t_0]$ pro některé $t_0 \in \mathbb{R}$.

Přímka c prochází vrcholem B rovnoběžně s přímkou q, takže její obecná rovnice je $c: x + 4y - 1 = 0$. Protože vrchol A leží také na přímce c, musí parametr t_0 splňovat rovnost $(-1 + t_0) + 4(5 + 2t_0) - 1 = 0$, odkud $t_0 = -2$, a proto je $A[-3, 1]$ a $C[1, 9]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3, 1],\ B[5, -1],\ C[1, 9]}$

■ **Příklad 5:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C trojúhelníku ABC, jestliže znáte vrchol $A[-3,3]$, průsečík výšek $V[3,3]$ a těžiště $T[5,5]$.



Řešení: Nejprve z bodů A, T určíme střed A_1 strany BC:

$$A_1 = A + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{AT} = [-3,3] + \tfrac{3}{2}(8,2) = [9,6]$$

Přímka a prochází bodem A_1 a její normálový vektor je $\overrightarrow{AV} = (6,0) \parallel (1,0)$. Je tedy $a: X = [9,6] + t \cdot (0,1),\ t \in \mathbb{R}$.

Protože je A_1 střed strany BC, platí $B[9, 6+t_0]$, $C[9, 6-t_0]$ pro některé $t_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

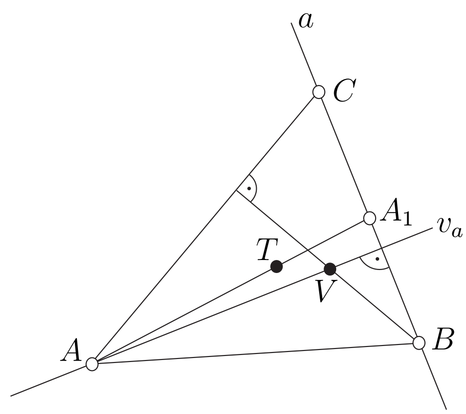
Z podmínky $\overrightarrow{BV} \perp \overrightarrow{AC}$ dostaneme:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\
(-6, -3-t_0) \cdot (12, 3-t_0) &= 0 \\
-72 - 9 + t_0^2 &= 0 \\
t_0^2 &= 81 \\
t_0 &= \pm 9
\end{aligned}$$

Pro $t_0 = 9$ je $B[9,15]$ a $C[9,-3]$, resp. pro $t_0 = -9$ je $B'[9,-3]$ a $C'[9,15]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[9,15],\ C[9,-3],\ \text{resp. } B'[9,-3],\ C'[9,15]}$

■ **Příklad 6:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte těžiště $T[1,-1]$, průsečík výšek $V[-1,-3]$ a přímku $a: x - 2y + 3 = 0$.



Řešení: Vrchol A leží na přímce v_a, která prochází daným bodem V kolmo k dané přímce a, proto má obecnou rovnici $v_a: 2x + y + 5 = 0$. Pro souřadnice $[x_A, y_A]$ vrcholu A tedy platí $2x_A + y_A + 5 = 0$, odkud $y_A = -2x_A - 5$.

Bod A_1 leží na přímce a, proto $x_{A_1} - 2y_{A_1} + 3 = 0$, odkud $x_{A_1} = 2y_{A_1} - 3$.

Z rovností $A_1 = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AT} = A + \frac{3}{2}(T - A) = \frac{3}{2}T - \frac{1}{2}A$ plyne:

$$\begin{aligned} x_{A_1} = &\ \tfrac{3}{2}x_T - \tfrac{1}{2}x_A = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_A \\ y_{A_1} = &\ \tfrac{3}{2}y_T - \tfrac{1}{2}y_A = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(-2x_A - 5) \end{aligned}$$

Odtud po úpravě a dosazení za x_{A_1} dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_A + 4y_{A_1} &= 9 \\ \underline{-2x_A + 2y_{A_1}} &\underline{= 2} \\ 10y_{A_1} &= 20 \\ y_{A_1} &= 2 \ \Rightarrow x_A = 1 \end{aligned}$$

Dále $x_{A_1} = 2y_{A_1} - 3 = 1$ a $A_1[1, 2]$, resp. $y_A = -2x_A - 5 = -7$ a $A[1, -7]$.

Protože A_1 je střed strany BC, platí:

$$\left.\begin{aligned} x_{A_1} &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_{A_1} &= \frac{y_B + y_C}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_B &= 2x_{A_1} - x_C = 2 - x_C \\ y_B &= 2y_{A_1} - y_C = 4 - y_C \end{aligned}$$

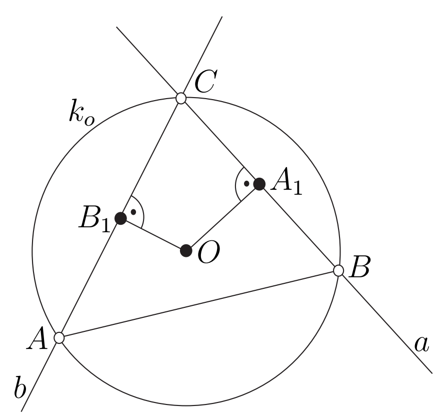
Dále z $B, C \in a$ plyne $x_B - 2y_B + 3 = 0$, odkud $x_B = 2y_B - 3 = 5 - 2y_C$, resp. $x_C - 2y_C + 3 = 0$, odkud $x_C = 2y_C - 3$. Platí také $\overrightarrow{BV} \perp \overrightarrow{AC}$, proto:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0\\
(-1 - x_B, -3 - y_B) \cdot (x_C - 1, y_C + 7) &= 0\\
(-6 + 2y_C, -7 + y_C) \cdot (2y_C - 4, y_C + 7) &= 0\\
24 - 20y_C + 4y_C^2 - 49 + y_C^2 &= 0\\
5y_C^2 - 20y_C - 25 &= 0\\
y_C^2 - 4y_C - 5 &= 0\\
(y_C - 5)(y_C + 1) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $y_C = 5$ je $x_C = 2y_C - 3 = 7$ a $C[7, 5]$, $x_B = 5 - 2y_C = -5$, $y_B = 4 - y_C = -1$ a $B[-5, -1]$, resp. pro $y_C = -1$ je $x_C = -5$ a $C'[-5, -1]$, $x_B = 7$, $y_B = 5$ a $B'[7, 5]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[1, -7],\ B[-5, -1],\ C[7, 5],\ \text{resp. } A[1, -7],\ B'[7, 5],\ C'[-5, -1]}$

■ **Příklad 7:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, znáte-li body $A_1[7, 6]$, $B_1[-2, 3]$ a střed kružnice opsané $O[2, 1]$.



Řešení: Střed O kružnice opsané leží v průsečíku os stran AB, AC, BC.
Vektor $\overrightarrow{OA_1} = (5, 5) \parallel (1, 1)$ je normálový vektor přímky a, na níž leží strana BC a která prochází bodem A_1, její obecná rovnice je tedy $a : x + y - 13 = 0$.

Podobně, vektor $\overrightarrow{OB_1} = (-4, 2) \parallel (2, -1)$ je normálový vektor přímky b, která navíc prochází bodem B_1, a má tedy obecnou rovnici $b: 2x - y + 7 = 0$.

$$
\begin{array}{lrcl}
C \in a \cap b: & x_C + y_C - 13 = 0 & & \\
& \underline{2x_C - y_C + \ \ 7 = 0} & & \\
& 3x_C \qquad\ - \ \ 6 = 0 & & \\
& x_C = 2 & \Rightarrow & y_C = 11 \text{ a } C[2, 11]
\end{array}
$$

Bod B_1 je střed strany AC, proto:

$$
\left.\begin{array}{l}
x_{B_1} = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\
y_{B_1} = \dfrac{y_A + y_C}{2}
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad
\left.\begin{array}{l}
x_A = 2x_{B_1} - x_C = -6 \\
y_A = 2y_{B_1} - y_C = -5
\end{array}\right\} \Rightarrow A[-6, -5]
$$

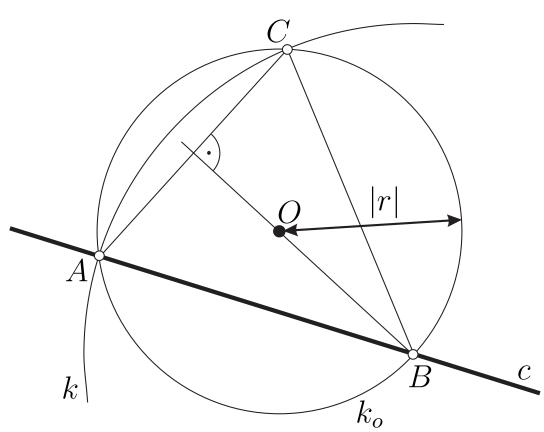
Podobně, bod A_1 je střed strany BC, proto:

$$
\left.\begin{array}{l}
x_{A_1} = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\
y_{A_1} = \dfrac{y_B + y_C}{2}
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad
\left.\begin{array}{l}
x_B = 2x_{A_1} - x_C = 12 \\
y_B = 2y_{A_1} - y_C = 1
\end{array}\right\} \Rightarrow B[12, 1]
$$

□

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-6, -5],\ B[12, 1],\ C[2, 11]}$

■ **Příklad 8:** Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AC, jestliže znáte přímku $c: 2x - 3y - 27 = 0$, kružnici $k_o(O, r)$ opsanou trojúhelníku, kde $O[2, 1]$ a $r = 13$, a víte-li, že $x_A \leq x_B$.



Řešení: Středová rovnice kružnice k_o je $k_o : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 169$.

Z $A, B \in c$ plyne $2x_A - 3y_A - 27 = 0$, odkud $y_A = \frac{2}{3}x_A - 9$, resp. $2x_B - 3y_B - 27 = 0$, odkud $y_B = \frac{2}{3}x_B - 9$. Oba vrcholy také leží na kružnici k_o:

$$\begin{aligned}
(x_A-2)^2 + (y_A-1)^2 &= 169\\
(x_A-2)^2 + \left(\tfrac{2}{3}x_A - 10\right)^2 &= 169\\
x_A^2 - 4x_A + 4 + \tfrac{4}{9}x_A^2 - \tfrac{40}{3}x_A + 100 &= 169\\
\tfrac{13}{9}x_A^2 - \tfrac{52}{3}x_A - 65 &= 0\\
x_A^2 - 12x_A - 45 &= 0\\
(x_A+3)(x_A-15) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $x_A = -3$ je $y_A = -11$ a $A[-3,-11]$. Druhý průsečík $k_o \cap c$ musí být vrchol B, proto $x_B = 15$, $y_B = 1$ a $B[15,1]$.

Pro $x_A = 15$ je $y_A = 1$ a $A'[15,1]$, $x_B = -3$, $y_B = -11$ a $B'[-3,-11]$.

Podmínce $x_A \leq x_B$ však vyhovuje pouze $A[-3,-11]$ a $B[15,1]$.

Protože je $\triangle ABC$ rovnoramenný se základnou AC, je $|BA| = |BC|$ a vrcholy A, C leží na kružnici k se středem ve vrcholu B a o poloměru $|BA| = \sqrt{18^2+12^2} = \sqrt{468}$. Středová rovnice kružnice k je tedy:

$$k : (x-15)^2 + (y-1)^2 = 468$$

Protože $C \in k$ a současně $C \in k_0$, souřadnice vrcholu C získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}
k \cap k_0 : \qquad (x-15)^2 + (y-1)^2 &= 468\\
\underline{(x-2)^2 + (y-1)^2} &\underline{{}= 169}\\
(x-15)^2 - (x-2)^2 &= 299\\
x^2 - 30x + 225 - x^2 + 4x - 4 &= 299\\
-26x &= 78\\
x &= -3 \Rightarrow y_1 = 13,\ y_2 = -11
\end{aligned}$$

Protože je ale $A[-3,-11]$, musí být $C[-3,13]$. □

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-3,-11],\ B[15,1],\ C[-3,13]}$

Jiné řešení: Souřadnice vrcholů A, B spočítáme stejným způsobem jako v předešlém řešení.

Protože je $\triangle ABC$ rovnoramenný se základnou AC, je $B_0 \equiv B_1$, proto i $v_b \equiv t_b \equiv o_{AC}$, kde o_{AC} je osa úsečky AC. Přímka v_b tudíž prochází středem O kružnice k_o a přímka b prochází vrcholem A kolmo k vektoru $\overrightarrow{BO} = (-13, 0) \parallel (1, 0)$, takže je $b : x + 3 = 0$.

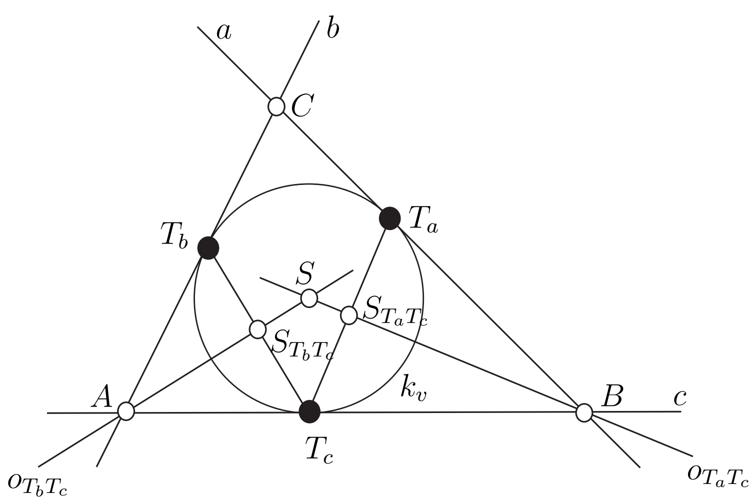
$$\begin{aligned} C \in b \cap k_o : \qquad (x_C - 2)^2 + (y_C - 1)^2 &= 169 \\ (-3 - 2)^2 + (y_C - 1)^2 &= 169 \\ (y_C - 1)^2 &= 144 \\ |y_C - 1| &= 12 \end{aligned}$$

Pro $y_C < 1$ je $-y_C + 1 = 12$, odkud $y_C = -11$ a $C[-3, -11]$.

Pro $y_C \geq 1$ je $-y_C - 1 = 12$, odkud $y_C = 13$ a $C[-3, 13]$.

Protože je však $A[-3, -11]$, musí být $C[-3, 13]$.

■ **Příklad 9:** Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC, jestliže znáte body dotyku přímek a, b, c s kružnicí k_v trojúhelníku vepsanou: $T_a[6, 4]$, $T_b[-1, 5]$, $T_c[2, -4]$.



Řešení: Protože je k_v kružnice vepsaná trojúhelníku ABC, jsou přímky a, b, c její tečny s body dotyku T_a, T_b, T_c a $\overrightarrow{T_aS}$, $\overrightarrow{T_bS}$, $\overrightarrow{T_cS}$ jsou jejich normálové vektory, označíme-li S

střed kružnice k_v. Protože body T_a, T_b, T_c leží na kružnici k_v, je tato kružnice trojúhelníku $T_aT_bT_c$ opsaná. Její střed S tedy leží v průsečíku os úseček T_aT_b, T_bT_c, T_aT_c.

$S_{T_aT_c} = \left[\dfrac{T_a + T_c}{2}\right] = [4, 0]$, $\overrightarrow{T_aT_c} = (-4, -8) \parallel (1, 2)$, takže obecná rovnice osy úsečky T_aT_c je $o_{T_aT_c} : x + 2y - 4 = 0$.

$S_{T_bT_c} = \left[\dfrac{T_b + T_c}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\overrightarrow{T_bT_c} = (3, -9) \parallel (1, -3)$, takže obecná rovnice osy úsečky T_bT_c je $o_{T_bT_c} : x - 3y + 1 = 0$.

$$
\begin{aligned}
S \in o_{T_aT_c} \cap o_{T_bT_c} : \qquad & x_S + 2y_S - 4 = 0 \\
& \underline{x_S - 3y_S + 1 = 0} \\
& 5y_S - 5 = 0 \\
& y_S = 1 \quad \Rightarrow x_S = 2 \text{ a } S[2, 1]
\end{aligned}
$$

Nyní již máme:

$\overrightarrow{ST_a} = (4, 3)$, $T_a \in a$, takže je $a : 4x + 3y - 36 = 0$

$\overrightarrow{ST_b} = (-3, 4) \parallel (3, -4)$, $T_b \in b$, takže je $b : 3x - 4y + 23 = 0$

$\overrightarrow{ST_c} = (0, -5) \parallel (0, 1)$, $T_c \in c$, takže je $c : y + 4 = 0$

$$
\begin{aligned}
A \in b \cap c : \qquad & 3x_A - 4y_A + 23 = 0 \\
& \underline{\qquad\quad y_A + \ \ 4 = 0} \\
& y_A = -4 \quad \Rightarrow x_A = -13 \text{ a } A[-13, -4]
\end{aligned}
$$

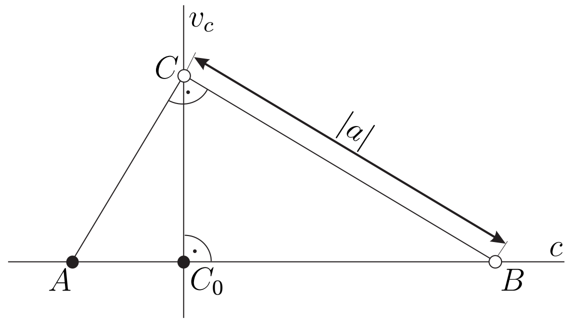
$$
\begin{aligned}
B \in a \cap c : \qquad & 4x_B + 3y_B - 36 = 0 \\
& \underline{\qquad\quad y_B + \ \ 4 = 0} \\
& y_B = -4 \quad \Rightarrow x_B = 12 \text{ a } B[12, -4]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C \in a \cap b : \qquad & 4x_C + 3y_C - 36 = 0 \\
& \underline{3x_C - 4y_C + 23 = 0} \\
& 25x_C \qquad - 75 = 0 \\
& x_C = 3 \quad \Rightarrow y_C = 8 \text{ a } C[3, 8]
\end{aligned}
$$

$\square$

♠ **Výsledek:** $\boxed{A[-13, -4],\ B[12, -4],\ C[3, 8]}$

■ **Příklad 10:** Vypočítejte souřadnice zbylých dvou vrcholů B, C pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB, jestliže znáte vrchol $A[-8,-4]$, patu výšky $C_0[4,0]$ a víte-li, že $|a| = 5\sqrt{2}$.



Řešení: Vrchol B leží, podobně jako vrchol A a bod C_0, na přímce c se směrovým vektorem $\overrightarrow{AC_0} = (12,4) \parallel (3,1)$, její obecná rovnice je tedy $c : x - 3y - 4 = 0$. Souřadnice vrcholu B tedy musí splňovat podmínku $x_B - 3y_B - 4 = 0$, odkud $x_B = 3y_B + 4$.
Podle Eukleidovy věty o odvěsně je $|AB| \cdot |C_0B| = |a|^2$, takže:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_B+8)^2+(y_B+4)^2} \cdot \sqrt{(x_B-4)^2+y_B^2} &= 50 \\
\sqrt{(3y_B+12)^2+(y_B+4)^2} \cdot \sqrt{(3y_B)^2+y_B^2} &= 50 \\
\sqrt{10(y_B+4)^2} \cdot \sqrt{10y_B^2} &= 50 \\
|y_B+4| \cdot |y_B| &= 5
\end{aligned}$$

Protože je AB přepona, je C_0 vnitřní bod úsečky AB, a protože $y_A = -4$ a $y_{C_0} = 0$, musí být $y_B > 0$, výrazy v absolutních hodnotách jsou tudíž kladné a můžeme psát:

$$\begin{aligned}
(y_B+4)y_B &= 5 \\
y_B^2 + 4y_B - 5 &= 0 \\
(y_B+5)(y_B-1) &= 0
\end{aligned}$$

Z podmínky $y_B > 0$ plyne $y_B = 1$, $x_B = 3y_B + 4 = 7$ a $B[7,1]$.
Přímka v_c, na níž leží vrchol C, prochází bodem C_0 kolmo k přímce c a má tedy obecnou rovnici $v_c : 3x + y - 12 = 0$. Pro souřadnice $[x_C, y_C]$ vrcholu C tedy platí $3x_C + y_C - 12 = 0$,

odkud $y_C = 12 - 3x_C$. Navíc $|a| = |BC| = 5\sqrt{2}$, takže:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x_C - 7)^2 + (y_C - 1)^2} &= 5\sqrt{2} \\
(x_C - 7)^2 + (-3x_C + 11)^2 &= 50 \\
x_C^2 - 14x_C + 49 + 9x_C^2 - 66x_C + 121 &= 50 \\
10x_C^2 - 80x_C + 120 &= 0 \\
(x_C - 6)(x_C - 2) &= 0
\end{aligned}$$

Pro $x_C = 6$ je $y_C = -6$ a $C[6, -6]$, resp. pro $x_C = 2$ je $y_C = 6$ a $C'[2, 6]$. $\square$

♠ **Výsledek:** $\boxed{B[7,1],\ C[6,-6],\ \text{resp. } B[7,1],\ C'[2,6]}$

Závěr

Když jsem si v září 2003 napsal první poznámky k této diplomové práci, netušil jsem, jak zajímavá, ale často také obtížná práce mne čeká.

Pro mne jako pro budoucího učitele matematiky bylo velkým přínosem vyzkoušet si, jak taková sbírka příkladů vzniká. Nejen že jsem prohloubil své znalosti analytické geometrie, ale navíc jsem také mohl pozorovat, jak obtížně řešitelné mohou být i ty nejjednodušší planimetrické úlohy, a naopak, jak vtipně a elegantně se dají řešit úlohy, se kterými bychom si v planimetrii nemuseli vždy vědět rady.

Na jednotlivé příklady jsem se musel dívat očima žáka střední školy - není úloha příliš časově náročná? A není ani příliš obtížná? Bude si s ní umět průměrný žák poradit? Myslím, že z hlediska didaktického toto pro mne byl největší přínos.

Výsledkem mé práce je sbírka příkladů, která, jak doufám, může sloužit ke zpestření výuky analytické geometrie a k procvičení látky na tématu žákům již dobře známém z planimetrie a která může být také vhodným doplněním učiva analytické geometrie.

Seznam použité literatury

[1] Čermák P., Červinková P., *Odmaturuj z matematiky*, Didaktis, Brno 2003

[2] Horák P., Janyška J., *Analytická geometrie*, skripta MU, Brno 1997

[3] Kočandrle M., Boček L., *Matematika pro gymnázia - Analytická geometrie*, Prometheus, Praha 2002

[4] Petáková J., *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, Praha 2003

[5] Polák J., *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha 2002