STEREOMETRIE, OBJEMY A POVRCHY TĚLES

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově

Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia

Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Stereometrie

Volné rovnoběžné promítání

Základní pojmy stereometrie

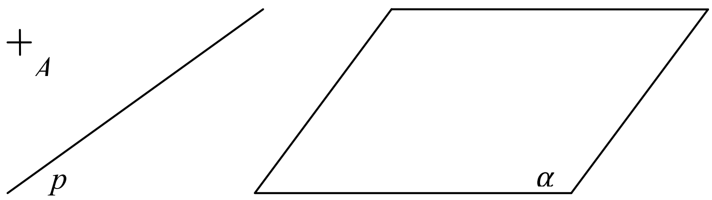
Stereometrie se zabývá vlastnostmi prostorových útvarů. Základními útvary jsou bod, přímka a rovina. V prostoru je nekonečně mnoho rovin, rovina má nekonečně mnoho přímek a přímka má nekonečně mnoho bodů.

Body označujeme velkými písmeny latinské abecedy $A, B, C, D, \ldots$

Přímky označujeme malými písmeny latinské abecedy $p, q, r, s, \ldots$

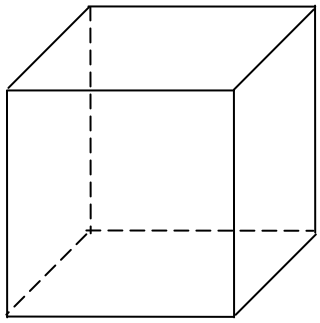
Roviny označujeme malými písmeny řecké abecedy $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

Přímka a rovina obsahují nekonečně mnoho bodů, jsou to neomezené útvary.

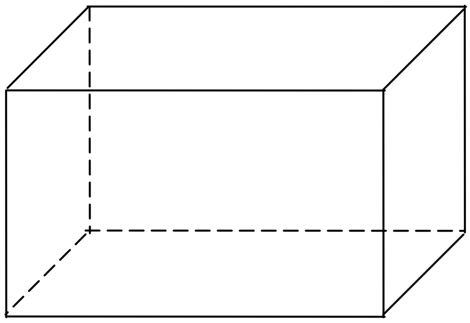


Tělesa

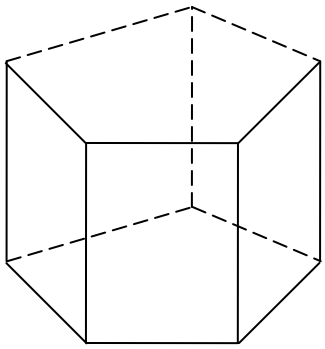
- Krychle: všechny stěny jsou shodné čtverce.
- Kvádr: protější stěny jsou shodné obdélníky, případně čtverce..
- Hranol: podstavy jsou shodné mnohoúhelníky, (n-úhelníky), boční stěny jsou rovnoběžníky.
- Rotační válec: vznikne rotací obdélníku.
- Čtyřstěn: všechny stěny jsou trojúhelníky, pravidelný čtyřstěn – všechny stěny shodné rovnostranné trojúhelníky.
- Jehlan: podstavou je mnohoúhelník, boční stěny jsou trojúhelníky, n-boký jehlan – podstavou je pravidelný n-úhelník, boční stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky.
- Rotační kužel: vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jeho jednu odvěsnu.



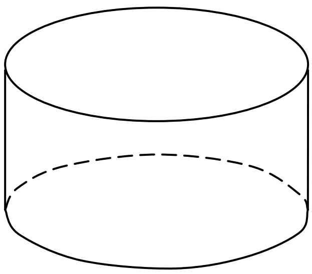
Krychle



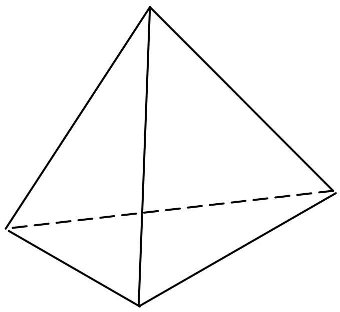
Kvádr



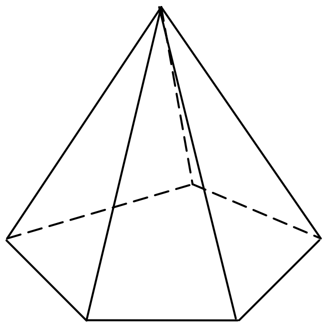
Hranol



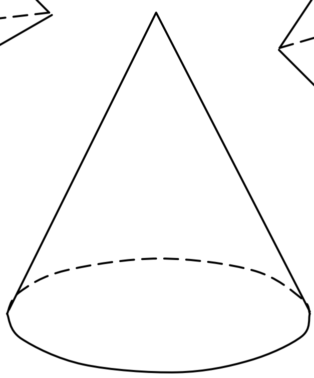
Válec - rotační



Čtyřstěn



Jehlan

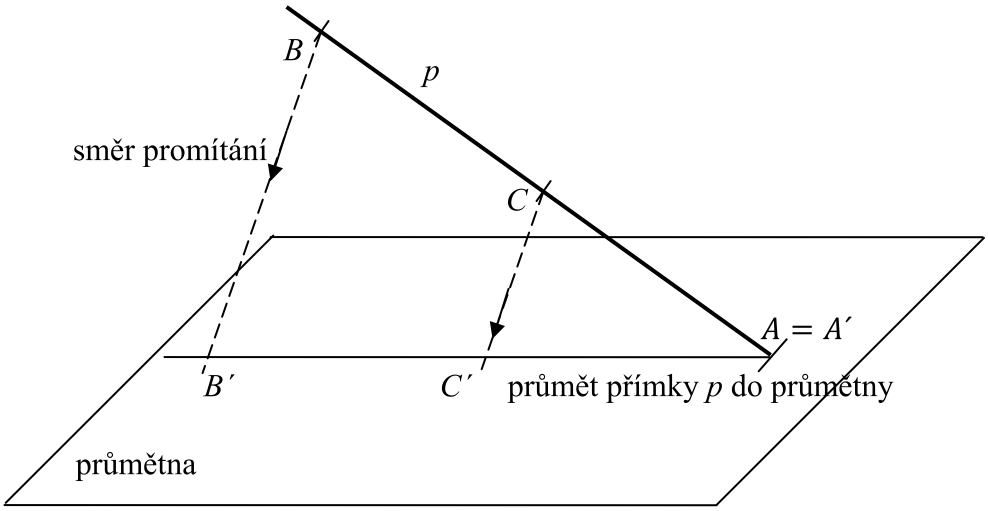


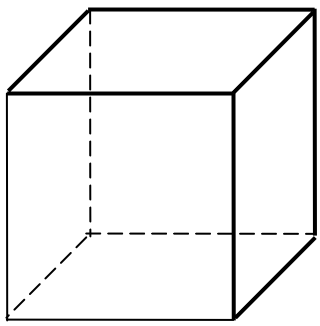
Kužel - rotační

Volné rovnoběžné promítání

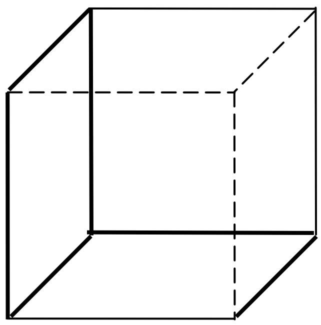
Je to zobrazování prostorových útvarů do roviny.

Nejjednodušší příklad: lavice – rovina, ukazovátko – přímka, přímku promítneme do roviny. Postup kterým jsme získali přímku v rovině je rovnoběžné promítání. Rovina, do které promítáme útvary se nazývá **průmětna,** každý bod přímky jsme získali rovnoběžným průmětem bodu. Každý bod, který leží v průmětně je zároveň svým průmětem.

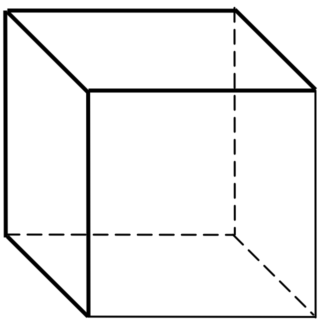




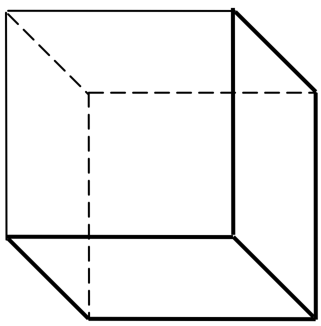
Pravý nadhled krychle



Levý podhled krychle



Levý nadhled krychle



Pravý podhled krychle

Nadhled – vidíme shora dolů

Pravý nadhled – vidíme horní, pravou a přední stěnu.

Levý nadhled – vidíme horní, levou a přední stěnu.

Podhled – vidíme zdola nahoru

Pravý podhled – vidíme dolní, pravou a přední stěnu.

Levý podhled – vidíme dolní, levou a přední stěnu.

1) **Shodné a navzájem rovnoběžné úsečky**, které nejsou rovnoběžné se směrem promítání, se promítají do úseček, které **jsou také shodné a navzájem rovnoběžné**. **Úsečka, která má směr promítání, se zobrazí jako bod.**

2) **Útvar,** který leží v průmětně nebo v rovině s průmětnou **rovnoběžně** (průčelná rovina), **se promítá do útvaru, který je s ním shodný.**

Tělesa zobrazujeme tak, aby některá jejich část (hrana, stěna, . . .) ležela v průčelné rovině. Úsečky kolmé k průmětně zobrazíme do úseček, které s obrazem vodorovných úseček svírají úhel 45° a jejich délka je polovina skutečné délky.

Stereometrie

Polohové vlastnosti

Prostor se skládá z bodů, přímky a roviny jsou jeho podmnožiny.

Bod může ležet (neležet) na přímce, nebo v rovině, přímka leží (neleží) v rovině, přímka prochází (neprochází) bodem, roviny prochází (neprochází) bodem, případně přímkou.

Užíváme společného názvu „je incidentní“, nebo „není incidentní“.

Dva body v rovině i v prostoru mohou být navzájem různé, nebo totožné (splývající).

$A = B$

$A \neq B$

Bod na dané přímce leží, nebo neleží.

$A \in p$ - bod A je incidentní s přímkou p.

$A \notin p$ - bod A není incidentní s přímkou p.

Bod v dané rovině leží, nebo neleží.

$A \in \rho$ - bod A je incidentní s rovinou ρ.

$A \notin \rho$ - bod A není incidentní s rovinou ρ.

Přímka v dané rovině leží, nebo neleží.

$p \subset \rho$ - přímka p je incidentní s rovinou ρ.

$p \not\subset \rho$ - přímka p není incidentní s rovinou ρ.

- ***Je-li bod incidentní s přímkou a přímka je incidentní s rovinou, je i bod incidentní s rovinou.***
- ***Bod leží v rovině, jestliže leží na některé její přímce.***

Kdy leží přímka v rovině?

- ***Přímka leží v rovině, jestliže v rovině leží dva její různé body.***
- ***Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka.***

Tvrzení:

a) Dvěma různými body A, B je určena jediná přímka.

b) Leží-li dva různé body v rovině ρ, pak přímka p jimi určená leží také v rovině ρ.

c) Mají-li dvě různé roviny ρ a σ společný bod A, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází. Mimo tuto přímku nemají společné již žádné body.

d) Rovina je jednoznačně určena:

1) Přímkou a bodem, který na ní neleží.
2) Dvěma různými rovnoběžnými přímkami.
3) Dvěma různoběžnými přímkami.
4) Třemi různými body, které neleží v téže přímce.

Značení:

Přímka $\leftrightarrow$ AB určena dvěma body A, B.

Rovina $\leftrightarrow$ ABC určena třemi různými body A, B, C.

Rovina $\leftrightarrow$ Ap určena bodem A a přímkou $p, A \notin p$.

Rovina $\leftrightarrow$ pq určena dvěma přímkami $p, q, p \neq q$.

Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem ***opačné poloprostory*** a je jejich společnou hraniční rovinou.
Hraniční rovina patří do obou poloprostorů. Každý bod prostoru, který neleží v hraniční rovině je vnitřním bodem jednoho z obou poloprostorů.
Poloprostor s hraniční rovinou ρ a vnitřním bodem M ***značíme*** $\mapsto \rho M$.

Geometrický útvar se nazývá **konvexní**, jestliže úsečka spojující kterékoli dva body útvaru je částí tohoto útvaru.

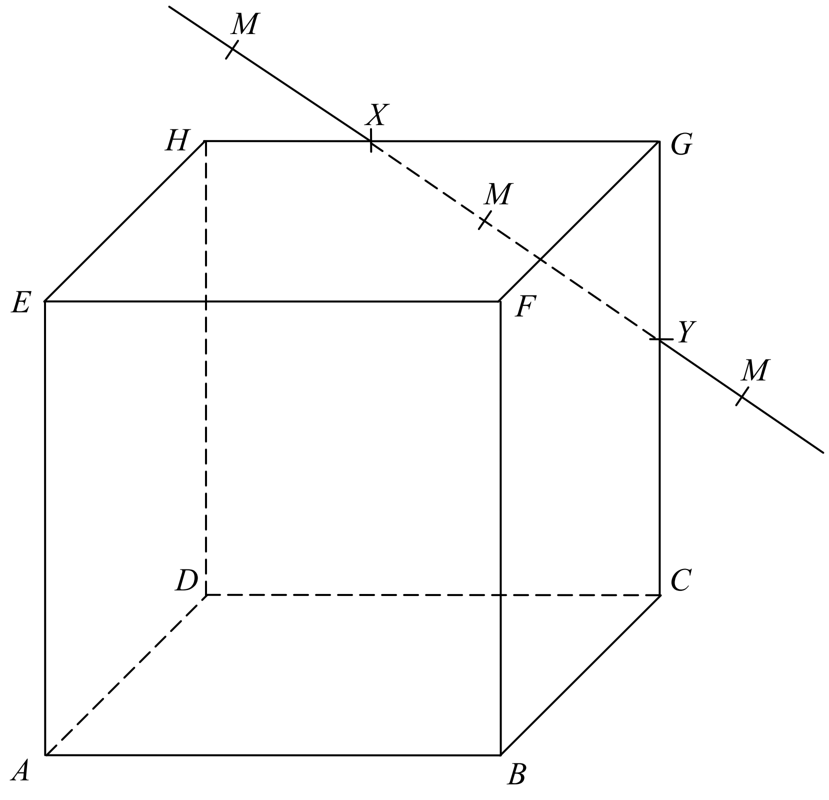
Polohové vlastnosti

Varianta A

V krychli *ABCDEFGH* zvolte libovolný bod *M*, který leží v rovině *CDGH*, a přitom neleží na hranách krychle.

Výsledek řešení:

Aby bod *M* ležel v rovině *CDGH*, stačí najít přímku, která leží v této rovině a na této přímce leží nekonečně mnoho bodů, které leží i v rovině *CDGH*.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH,* určete dva body *M, N*, které leží v rovině dolní podstavy krychle, ale neleží v podstavě ani na hraně krychle.

[Najdeme přímku, která leží v dolní podstavě, na přímce je nekonečně mnoho bodů splňující danou vlastnost.]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH,* určete dva body *M, N*, tak, aby bod *M* ležel v rovině zadní stěny krychle, a bod *N* ležel zároveň v dolní podstavě a zadní stěně krychle, mimo krychli.

[Bod M: leží na libovolné přímce, která leží v zadní rovině krychle. Bod N: leží na hraně *CD* krychle, která je průsečnicí daných rovin]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH,* rozhodněte, zda v horní podstavě leží přímky *EH, BG*. (zapište symbolicky)

[Přímka leží v rovině, pokud dva její libovolné body leží v této rovině.
$\leftrightarrow EH \in \leftrightarrow EFG, \leftrightarrow BG \notin \leftrightarrow EFG$]

4) Je dána krychle *ABCDEFGH,* rozhodněte, co je průnikem přímky *AG* a roviny *BCF*. (zapište symbolicky)

[Průnikem je bod *G*, $\{G\} = \leftrightarrow AG \cap \leftrightarrow BCF$]

Polohové vlastnosti

Varianta B

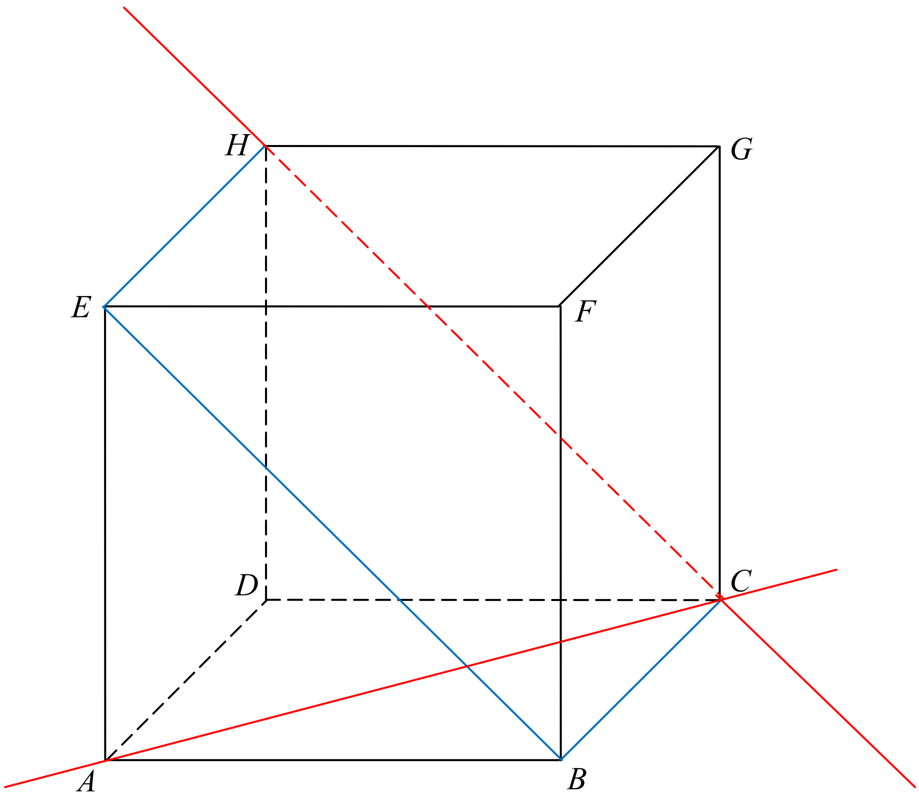
Je dána krychle *ABCDEFGH.* Zjistěte, zda v rovině *BCE* leží přímka *CH, AC*.

Výsledek řešení:

Přímka leží v rovině, pokud její libovolné dva body leží v dané rovině.

Přímka *CH* je incidentní s rovinou *BCE*. $\leftrightarrow CH \in \leftrightarrow BCE$

Přímka *AC* protíná rovinu *BCE* v bodě *C*. $\{C\} = \leftrightarrow AC \cap \leftrightarrow BCE$



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zjistěte, zda v rovině *ABG* leží přímka *CH, GH*.

$[\leftrightarrow GH \in \leftrightarrow BCE; \leftrightarrow CH \notin \leftrightarrow BCE]$

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zjistěte, zda v rovině *ACE* leží přímka *AG, AE*.

$[\leftrightarrow AG \in \leftrightarrow ACE; \leftrightarrow AE \notin \leftrightarrow ACE]$

3) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zjistěte, zda v rovině *ACH* leží přímka *AE, CD*.

$[\leftrightarrow AE \notin \leftrightarrow ACH; \leftrightarrow CD \notin \leftrightarrow ACH]$

4) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zjistěte, zda v rovině *BDG* leží přímka *DG, BC*.

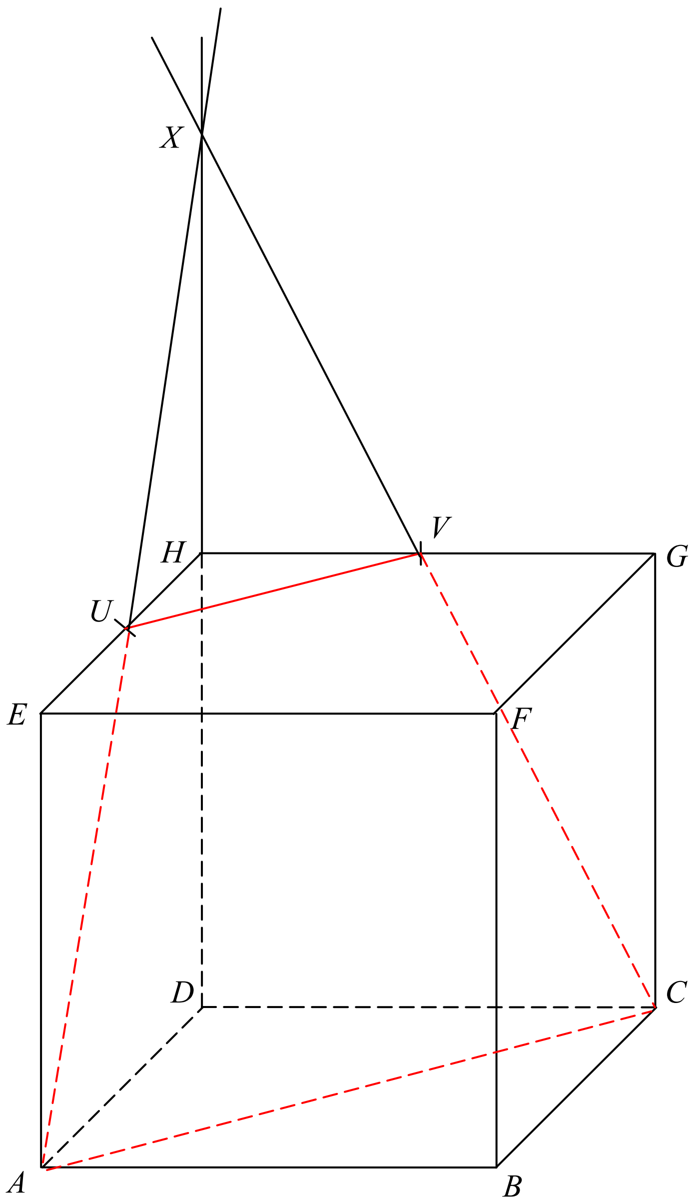
$[\leftrightarrow DG \notin \leftrightarrow BDG; \leftrightarrow BC \notin \leftrightarrow BDG]$

Polohové vlastnosti

Varianta C

Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *U,* V jsou po řadě středy hran *EH, GH*. Zjistěte, zda leží v jedné rovině body *A, C, U, V*.

Výsledek řešení: Přímky *AU, CV* se protínají v jednom bodě, jsou to různoběžky, které určují rovinu. Přímky *AC, UV* jsou rovnoběžky v této rovině. Tzn. body *A, C, U, V* leží v jedné rovině.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Body *P, V* jsou po řadě středy hran *AB, GH*. Zjistěte, zda leží v jedné rovině body *C, E, P, V*.

[body leží v jedné rovině]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Body *R, S, T, U,* jsou po řadě středy hran *AE, BC, CG, EH*. Zjistěte, zda leží v jedné rovině body *R, S, T, U*.

[body leží v jedné rovině]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Body *R, U, V* jsou po řadě středy hran *AE, EH, GH*. Zjistěte, zda leží v jedné rovině body *C, R, U, V*.

[body neleží v jedné rovině]

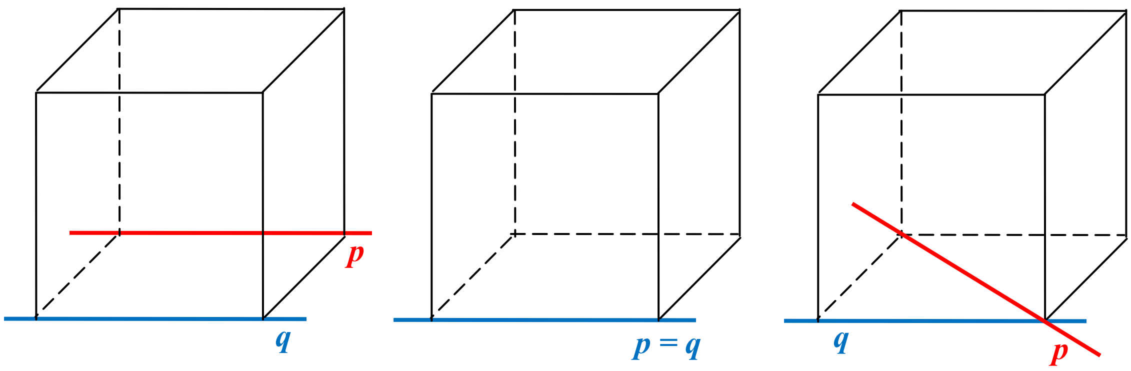
4) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Body *P, R, S* jsou po řadě středy hran *AB, AE, DH*. Zjistěte, zda leží v jedné rovině body *C, P, R, S*.

[body neleží v jedné rovině]

Stereometrie

Vzájemná poloha

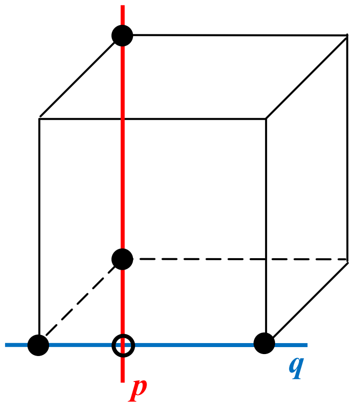
<u>Vzájemná poloha dvou přímek</u>



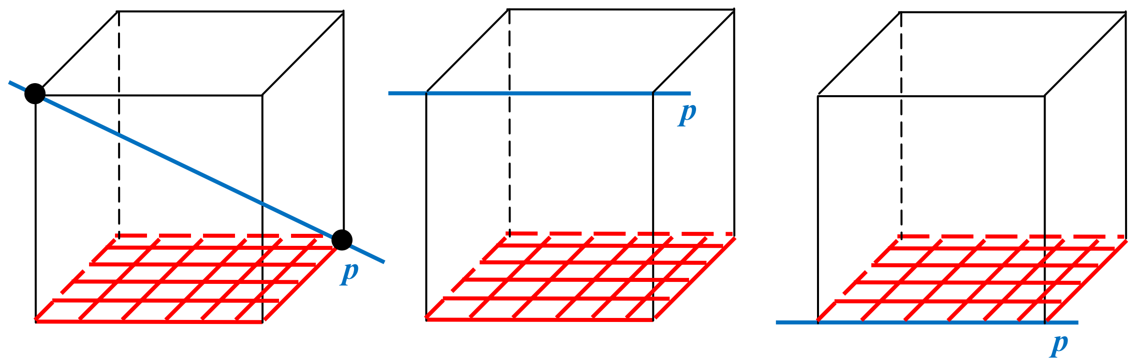
Kolik společných bodů mají přímky na obrázcích?

1) Nemají žádný společný bod, přímky leží v jedné rovině, jsou ***rovnoběžné*** (***různé***).
2) Přímky mají všechny body společné, jsou splývající (***totožné***).
3) Přímky mají společný jeden bod - průsečík a leží v jedné rovině. Jsou ***různoběžné.***

   Zapisujeme $\{P\} = p \cap q$ *nebo* $P \in p \cap q$
4) V prostoru může nastat případ, kdy dané přímky nemají žádný společný bod, jsou ***mimoběžné.*** Přímky neleží v jedné rovině a my hledáme ***příčku*** mimoběžek.



Vzájemná poloha přímky a roviny



1) Mají-li přímka s rovinou společný právě jeden bod, je přímka ***různoběžná*** s rovinou.

2) Nemají-li žádný společný bod (***rovnoběžné různé***) je přímka rovnoběžná s rovinou.

3) Mají-li společné aspoň dva různé body (***totožné***), je přímka rovnoběžná s rovinou.

Společný bod přímky a roviny nazýváme ***průsečík***.

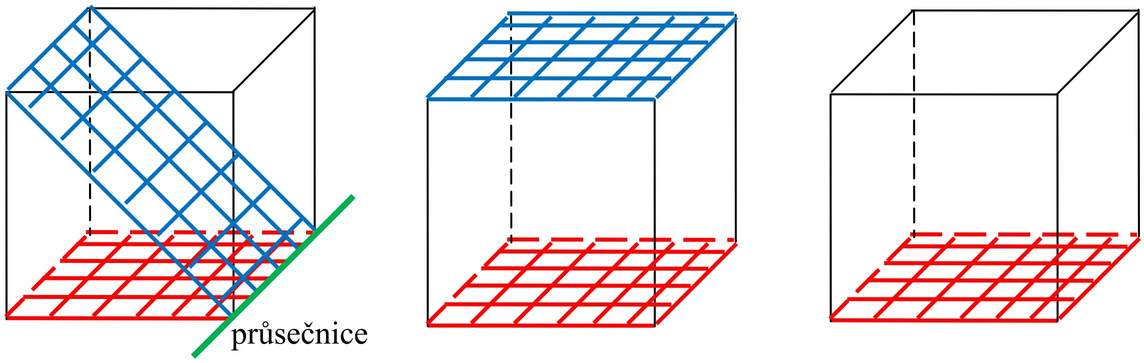
Vzájemná poloha dvou rovin

Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází, kromě této přímky nemají žádný další společný bod.

1) Dvě různé roviny ρ a σ které mají společnou přímku p, říkáme, že jsou různoběžné, přímka ***p*** je jejich ***průsečnice***. $p = \rho \cap \sigma$.

2) Nemají-li dvě roviny ρ a σ žádný společný bod, nazýváme je ***rovnoběžné*** $\rho \parallel \sigma$.

3) Dvě roviny ρ a σ, které mají všechny body společné, nazýváme ***splývající*** (***totožné***) $\rho = \sigma$.



Jak najdeme průsečnici dvou rovin?

Musíme najít dva její různé body. V každé rovině najdeme přímku, takovou, aby přímky z každé roviny byly k sobě různoběžné. Společný bod přímek je jeden bod průsečnice. Stejným způsobem najdeme druhý bod.

Vzájemná poloha

Varianta A - Vzájemná poloha dvou přímek

Je dána krychle *ABCDEFGH.* Uveďte všechny přímky, které procházejí bodem *D* a dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou *EF*

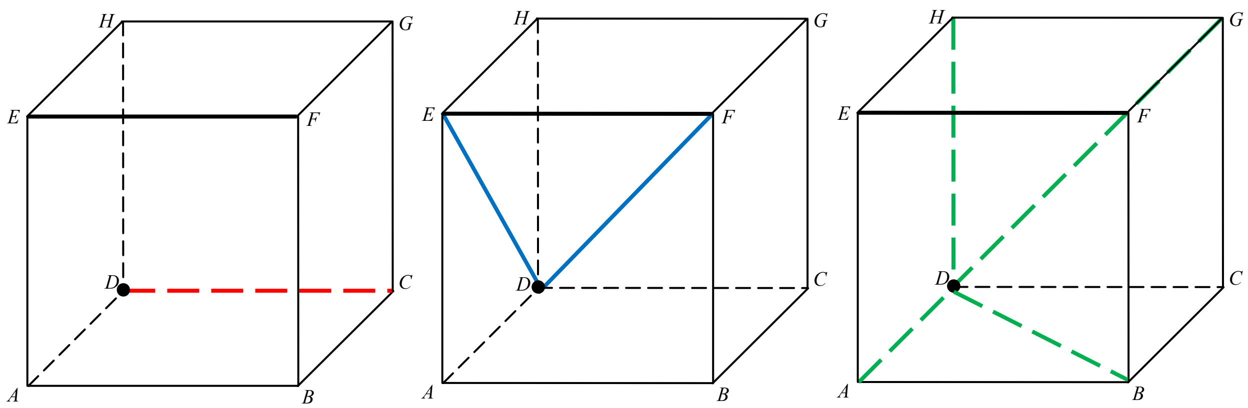
a) rovnoběžné

b) různoběžné

c) mimoběžné

Výsledek řešení:

a) rovnoběžné – *CD* b) různoběžné – *DE, DF* c) mimoběžné – *AD, BD, DH, DG*



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH,* body *X, Y, Z* jsou po řadě středy hran *FB, FE, FG*. Určete vzájemnou polohu přímek

a) *XY, EZ* b) *YZ, EH.*

[a) mimoběžné; b) různoběžné]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH,* body *X, Y, Z* jsou po řadě středy hran *EF, FG*. Určete vzájemnou polohu přímek

a) *XZ, AH* b) *XY, AF*

[a) rovnoběžné; b) kolmé]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH,* body *L, M, N, P* jsou po řadě středy hran *AB, BF, EF, CD*. Určete vzájemnou polohu přímek

a) *BN, CF* b) *LM, DG*

[a) mimoběžné; b) rovnoběžné]

4) Je dána krychle *ABCDEFGH,* body *L, M, N, P* jsou po řadě středy hran *AB, BF, EF, CD*. Určete vzájemnou polohu přímek

a) *DM, NP* b) *DL, GM*

[a) mimoběžné; b) různoběžné]

Vzájemná poloha

Varianta B - Vzájemná poloha přímky a roviny

Je dána krychle *ABCDEFGH.* Určete všechny přímky, které procházejí bodem *H* a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou *ABE* jsou

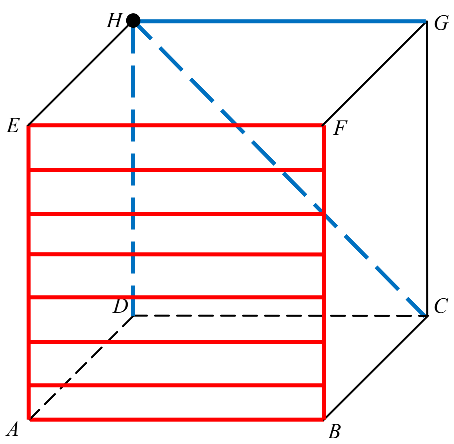
a) rovnoběžné

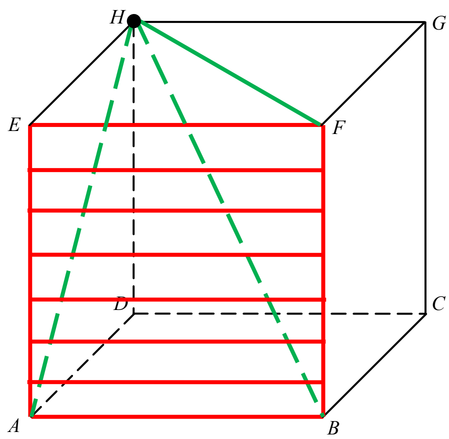
b) různoběžné

Výsledek řešení:

a) rovnoběžné – *DH, CH, GH*

b) různoběžné – *AH, BH, FH*





***Příklad*:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Určete všechny roviny, které procházejí bodem *H* a dalšími dvěma vrcholy krychle a s přímkou *FG* jsou

a) rovnoběžné

b) různoběžné

[a)$\leftrightarrow ADE$; $\leftrightarrow BCE$; $\leftrightarrow EFG$; b) $\leftrightarrow BDF$]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Určete všechny roviny, které procházejí bodem *H* a dalšími dvěma vrcholy krychle a s přímkou *AB* jsou

a) rovnoběžné

b) kolmé

[a)$\leftrightarrow CDG$; $\leftrightarrow ABG$; b) $\leftrightarrow ADE$]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *R, S, T, U,* jsou po řadě středy stěn *ABCD, BCFG, EFGH, ADHE*. Jaká je vzájemná poloha

a) přímky *RS* a roviny *CDH*

b) přímky *RU* a roviny *EFG*

[a) přímka je rovnoběžná s rovinou; b) přímka je různoběžná s rovinou]

4) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *R, S, T, U,* jsou po řadě středy stěn *ABCD, BCFG, EFGH, ADHE*. Jaká je vzájemná poloha

a) přímky *SU* a roviny *ABG*

b) přímky *ST* a roviny *BCE*

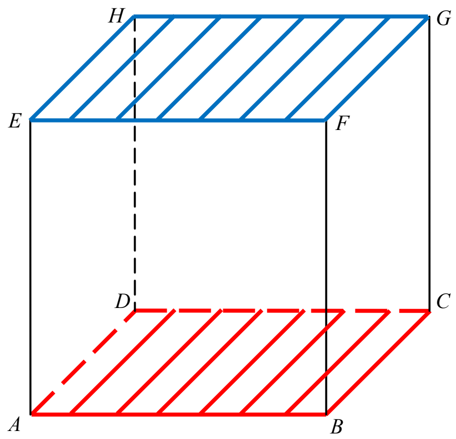
[a) přímka leží v rovině; b) přímka je rovnoběžná s rovinou]

Vzájemná poloha

Varianta C - Vzájemná poloha dvou rovin

Je dána krychle *ABCDEFGH.* Rozhodněte o vzájemné poloze rovin *ABC, EFG*.

Výsledek řešení: Roviny nemají společný žádný bod, jsou rovnoběžné různé.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Rozhodněte o vzájemné poloze rovin

a) *ABC, BCD* b) *ADE, ABG*

[a) roviny jsou totožné; b) roviny jsou kolmé]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Rozhodněte o vzájemné poloze rovin

a) *ADH, BCE* b) *BCG, EFG*

[a) roviny jsou různoběžné; b) roviny jsou kolmé]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Určete všechny roviny, které procházejí bodem *B* a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou *AFG*

a) rovnoběžné

b) kolmé

[a) žádná rovina v krychli; b) roviny *BCE, ABE*]

4) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Určete všechny roviny, které procházejí bodem *C* a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou *ABE*

a) rovnoběžné

b) různoběžné, ne kolmé

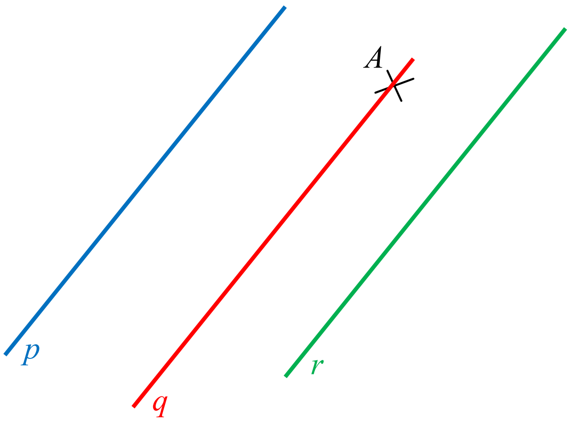
[a) rovina *CDG*; b) roviny *CDE*]

Stereometrie

Vzájemná poloha

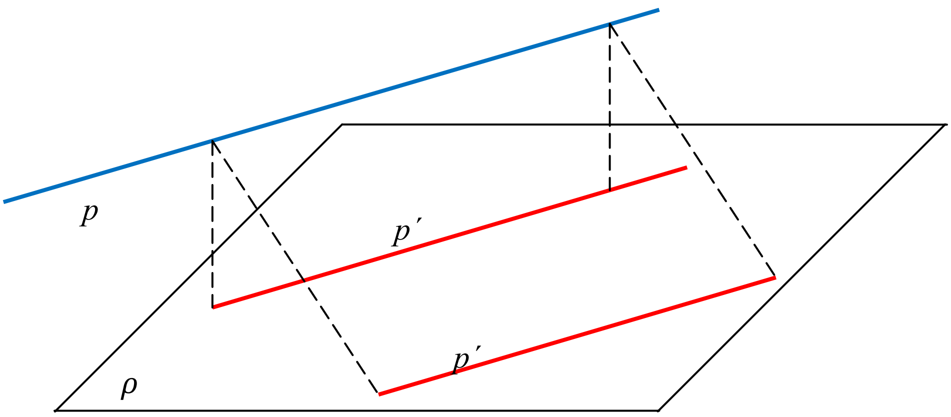
Rovnoběžnost přímek a rovin

1) ***Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.***
2) ***Rovnoběžnost přímek je vztah tranzitivní: $p \parallel q, q \parallel r \Rightarrow p \parallel r$.***



Chceme-li zjistit, zda je přímka rovnoběžná s rovinou, použijeme kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny:

Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, obsahuje-li rovina ρ aspoň jednu přímku p´, která je s přímkou p rovnoběžná.



Pro libovolné přímky *p, q* a libovolnou rovinu *ρ* platí:

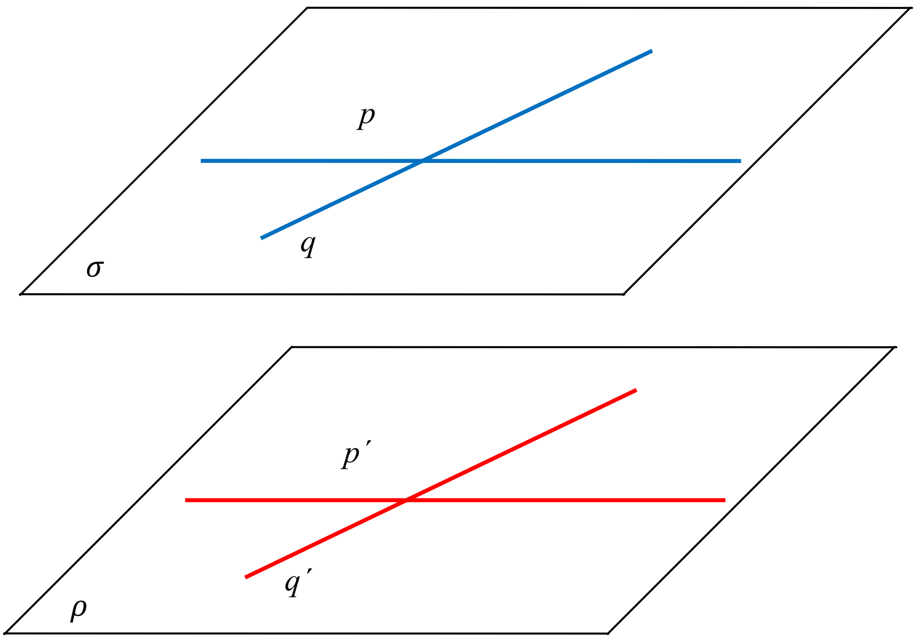
Je-li: $p \parallel q$ a $p \parallel \rho$ pak : $q \parallel \rho$.

Chceme-li najít přímku, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s dvěma navzájem různoběžnými rovinami, použijeme větu:

Je-li přímka rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.

<u>Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin</u>

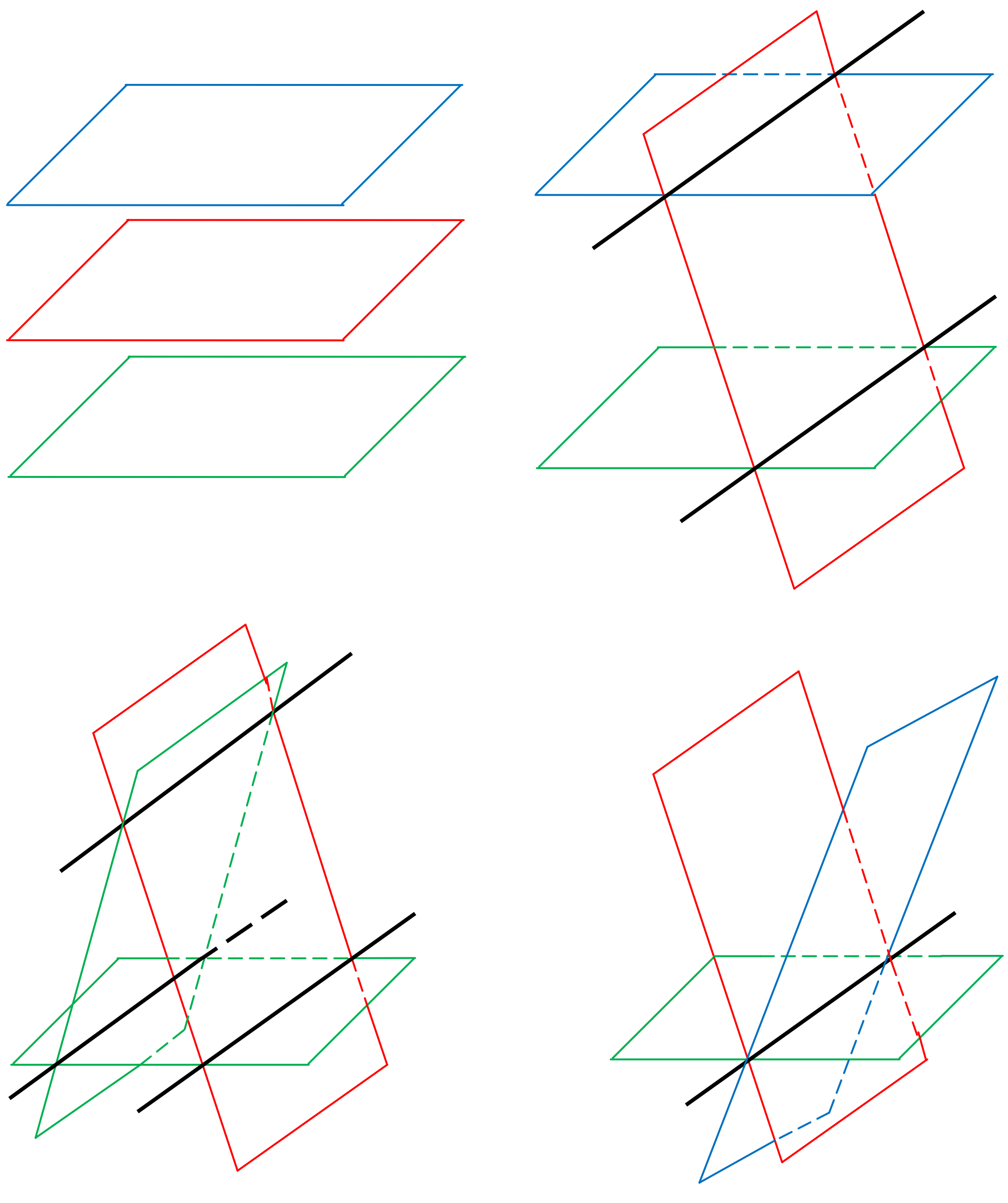
Dvě roviny ρ a σ ***jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich např.*** ρ ***obsahuje dvě různoběžné přímky p, q, které jsou rovnoběžné s rovinou*** σ***.***



1) ***Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.***
2) ***Rovnoběžnost rovin je vztah tranzitivní:*** $\boldsymbol{\rho \parallel \sigma, \sigma \parallel \delta \Rightarrow \rho \parallel \delta}$

Vzájemná poloha tří rovin

1) ***Každé dvě roviny jsou rovnoběžné.***
2) ***Dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná v rovnoběžných přímkách.***
3) ***Každé dvě roviny jsou různoběžné, buď všechny tři průsečnice splynou v jednu přímku, nebo průsečnice každých dvou rovin jsou rovnoběžné různé, nebo všechny tři průsečnice jsou různé a procházejí jediným společným bodem všech tří rovin.***



Varianta A - Rovnoběžnost přímek a rovin

Je dána krychle *ABCDEFGH.* Uprostřed hrany *AB* je, bod *M*. Bodem *M* veďte přímku, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin *ACG* a *BDF*.

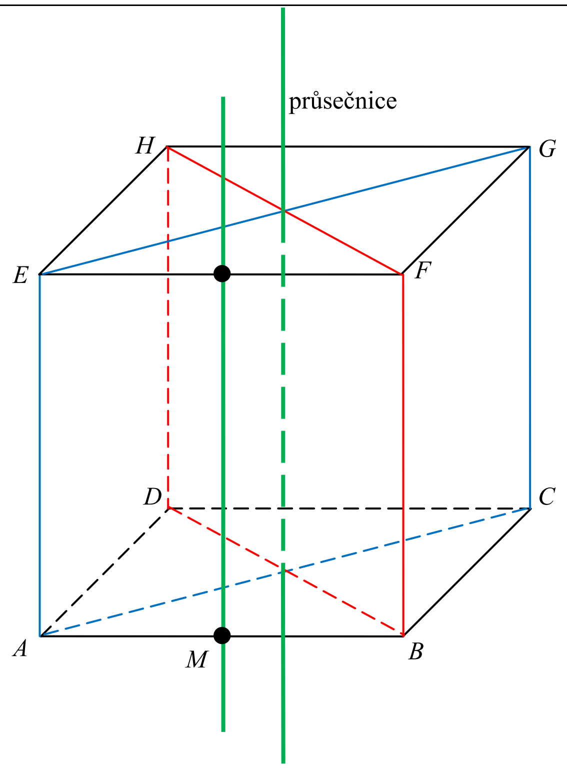
Výsledek řešení:

Sestrojíme průsečnici rovin *ACG* a *BDF*, a tuto průsečnici posuneme do bodu M.

1) Vyznačíme roviny *ACG* a *BDF*

2) Najdeme dva body, ve kterých se roviny protínají, těmito body vedeme průsečnici rovin.

3) Průsečnici posuneme do bodu *M.*



***Příklad*:**

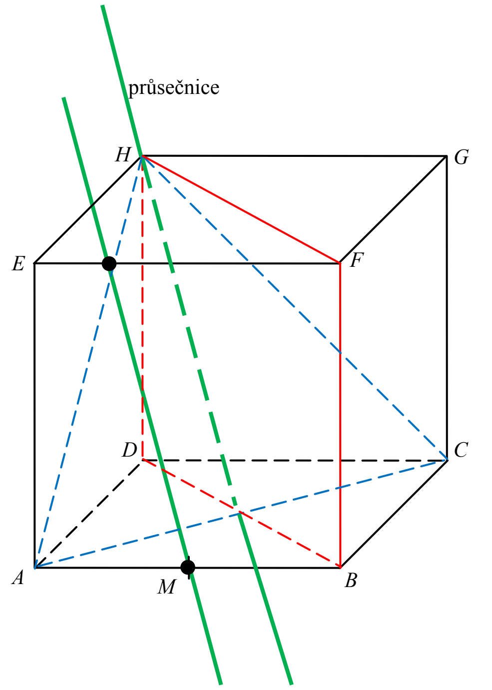
Varianta A

Varianta B

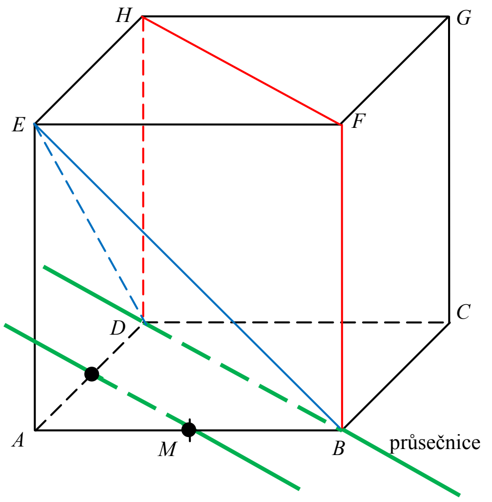
Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

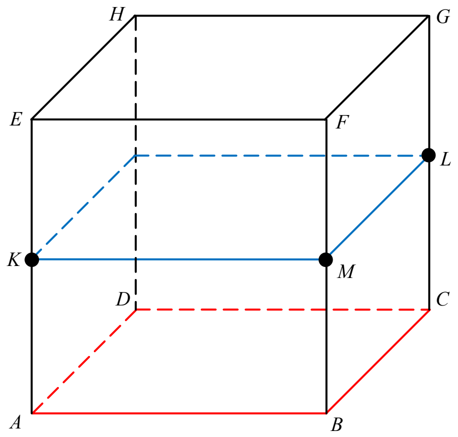
1) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Uprostřed hrany *AB* je, bod *M*. Bodem *M* veďte přímku, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin *ACH* a *BDF*.



2) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Uprostřed hrany *AB* je, bod *M*. Bodem *M* veďte přímku, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin *BDE* a *BDF*.

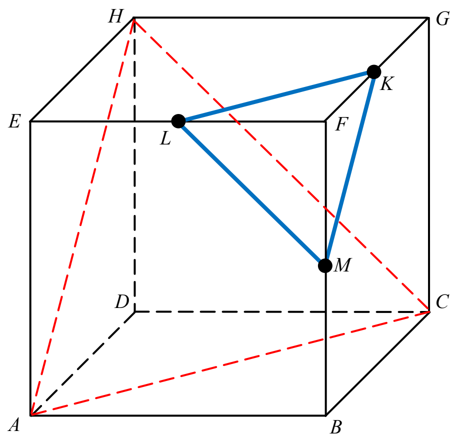


3) Bod *M* je střed hrany *BF* krychle *ABCDEFGH*. Veďte bodem *M* rovinu rovnoběžnou s rovinou *ABC*.



[Body *K, L* jsou středy hran *AE, CG*]

4) Bod *M* je střed hrany *BF* krychle *ABCDEFGH*. Veďte bodem *M* rovinu rovnoběžnou s rovinou *ACH*.



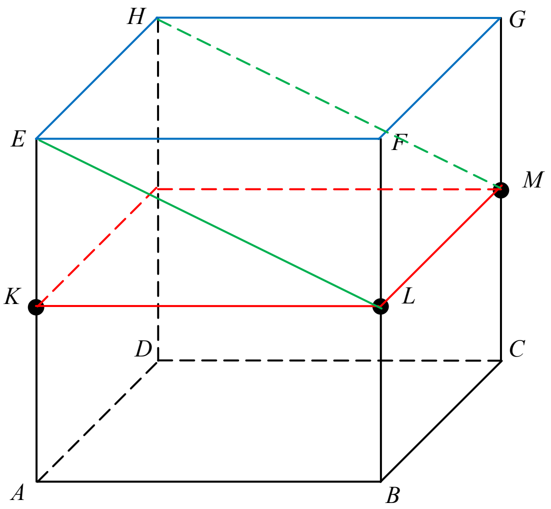
[Body *K, L* jsou středy hran *FG, EF*]

Varanta B - Vzájemná poloha tří rovin

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Body *K, L, M, N* jsou po řadě středy hran *AE, BF, CG, DH*. Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin.

$\leftrightarrow EFG, \leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EHL$

$\leftrightarrow ABC, \leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EFG$



Výsledek řešení:

Roviny $\leftrightarrow EFG, \leftrightarrow KLM$ jsou navzájem rovnoběžné, nemají společný žádný bod.

Roviny $\leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EHL$ jsou různoběžné, mají společnou průsečnici, přímku LM.

Roviny $\leftrightarrow EFG, \leftrightarrow EHL$ jsou různoběžné, mají společnou průsečnici, přímku EH.

Všechny tři roviny $\leftrightarrow EFG, \leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EHL$ mají prázdný průnik.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *K, L, M, N* jsou po řadě středy hran *AE, BF, CG, DH*. Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin.
$\leftrightarrow ABC, \leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EFG$

[Roviny jsou navzájem rovnoběžné. Každé dvě roviny mají prázdný průnik, všechny tři mají prázdný průnik.]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *K, L, M, N* jsou po řadě středy hran *AE, BF, CG, DH*. Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin.
$\leftrightarrow BCG, \leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EHL$

[Průnik každých dvou rovin je přímka *LM.* Tato přímka je průnikem všech tří rovin.]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *K, L, M, N* jsou po řadě středy hran *AE, BF, CG, DH*. Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin.
$\leftrightarrow ADH, \leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EHL$

[Roviny $\leftrightarrow ADH, \leftrightarrow KLM$ mají společnou přímku *KN*. Roviny $\leftrightarrow ADH, \leftrightarrow EHL$ přímku *EH*. Roviny $\leftrightarrow KLM, \leftrightarrow EHL$ přímku *LM*. Všechny tři průsečnice jsou navzájem rovnoběžné. Průnikem všech tří rovin je prázdná množina.]

4) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Body *K, L, M, N* jsou po řadě středy hran *AE, BF, CG, DH*. Určete průnik každých dvou z dané trojice rovin a potom průnik všech tří rovin.
$\leftrightarrow ADH, \leftrightarrow DCG, \leftrightarrow EHL$

[Roviny $\leftrightarrow ADH, \leftrightarrow DCG$ mají společnou přímku *DH*. Roviny $\leftrightarrow ADH, \leftrightarrow EHL$ přímku *EH*. Roviny $\leftrightarrow DCG, \leftrightarrow EHL$ přímku *HM*. Společným bodem všech tří rovin je bod *H*.]

Stereometrie

Řešení polohových konstrukčních úloh

Jde o vzájemnou polohu bodů, přímek, rovin nikoli o jejich metrické vztahy (velikosti úhlů, odchylek, vzdálenost přímek).

1) ***Sestrojení průsečnice dvou rovin*** – (v každé rovině zvolíme přímku, tak, aby se přímky z každé roviny protínaly, průsečík těchto přímek, je bod, který leží na průsečnici těchto dvou rovin)
2) ***Sestrojení roviny, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou*** – (v rovině zvolíme dvě různoběžné přímky, tyto přímky posuneme do daného bodu, který bude jejich průsečíkem)
3) ***Sestrojení přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s dvěma danými různoběžnými rovinami*** – (daná přímka je rovnoběžná s průsečnicí obou rovin)
4) ***Sestrojení průsečíku přímky a roviny*** – (danou přímkou proložíme rovinu, která je různoběžná s danou rovinou, získáme průsečnici rovin, a průsečík průsečnice a přímky, je hledaný průsečík)

<u>Řezy tělesa rovinou</u>

Je to průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Při konstrukci používáme tyto věty.

1) Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině.
2) Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.
3) Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice.

Důsledky těchto vět:

D1: leží-li dva různé body roviny řezu v rovině některé stěny, leží v rovině této stěny i jejich spojnice. Průnik spojnice a stěny je jednou stranou řezu.

D2: jsou-li roviny dvou stěn rovnoběžné a přitom různoběžné s rovinou řezu, jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné.

D3: průsečnice rovin dvou sousedních stěn (stěn se společnou hranou) s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají v jednom bodě.

Varianta A - Řezy těles

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = BGV$, kde bod V je střed hrany AE.

Výsledek řešení:

Řez krychle určenou rovinou provedeme ve čtyřech krocích.

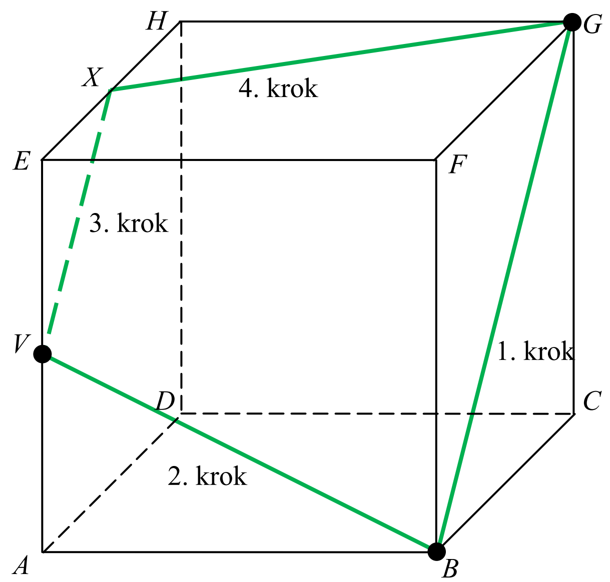
1. krok – body, které leží ve stejné rovině, můžeme spojit a vzniklá přímka (BG) leží také v dané rovině.

2. krok – body, které leží ve stejné rovině, můžeme spojit a vzniklá přímka (BV) leží také v dané rovině.

3. krok – získání bodu X, protilehlé stěny krychle jsou rovnoběžné, rovina $\rho = BGV$ protne dané stěny v průsečnicích, které budou rovnoběžné. Bodem V vedeme rovnoběžku s přímkou BG. Průnikem této rovnoběžky a hrany krychle je bod X.

4. krok - body, které leží ve stejné rovině, můžeme spojit a vzniklá přímka (XG) leží také v dané rovině.

Výsledkem řezu krychle rovinou $\rho = BGV$ je vzniklý čtyřúhelník $BGVX$.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = MCH$, kde bod *M* leží na prodloužení úsečky *AD* před bodem A, $|MA|:|AD| = 1:2$. [obrázek 1.]

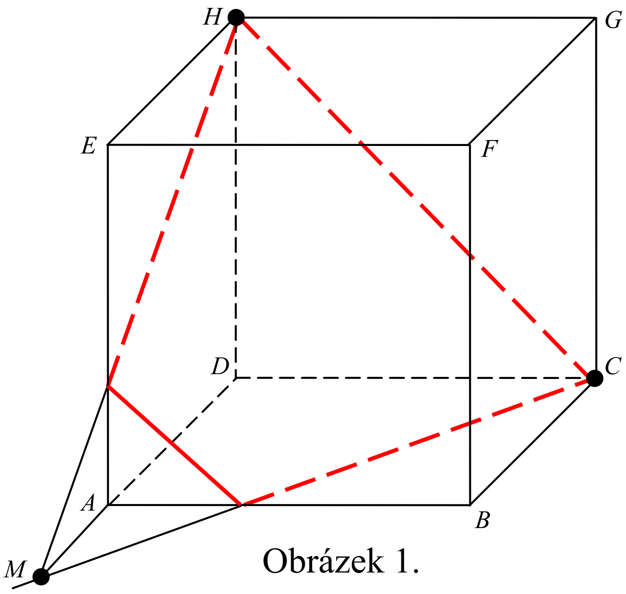
2) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = BPQ$, kde bod *P* je střed hrany *FG*, bod *Q* leží na prodloužení úsečky *EF* před bodem *E*, $|QE|:|EF| = 1:3$. [obrázek 2.]

3) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = TRS$, kde bod *T* je střed hrany *FG*, bod *R* leží na polopřímce *AB*, $|AR| = \frac{5}{4}|AB|$. Bod *S* leží na polopřímce *AE*, $|AS| = \frac{3}{2}|AE|$.

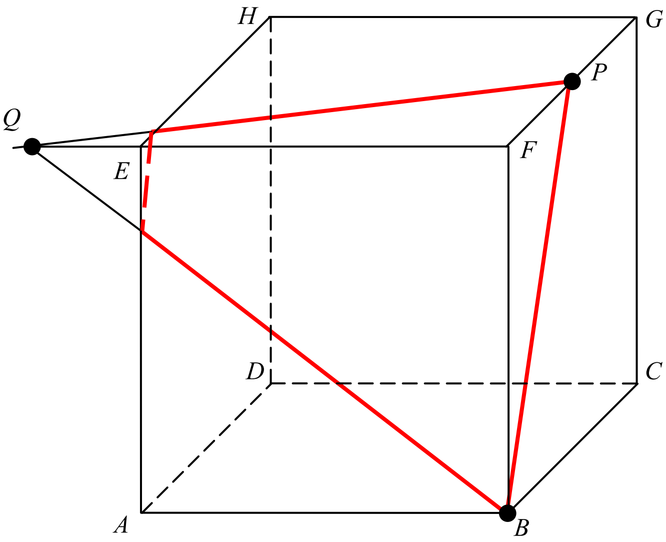
[obrázek 3.]

4) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = KLM$, bod *K* leží na hraně *AE*,

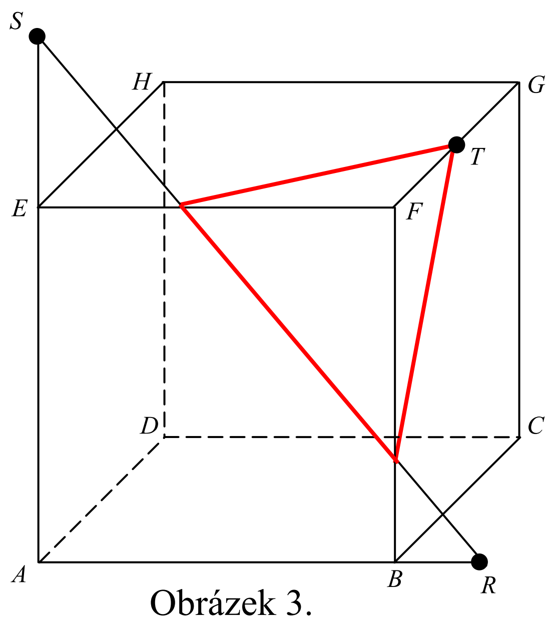
$|AK|:|KE| = 1:2$. Bod *L* leží na hraně *BF*, $|BL|:|LF| = 4:1$. Bod *M* je bodem hrany *CG*, $|CM|:|MG| = 1:2$. [obrázek 4.]



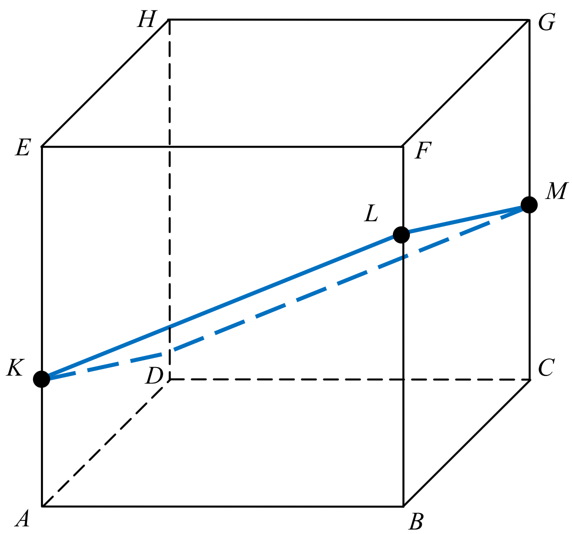
Obrázek 1.



Obrázek 2.



Obrázek 3.



Obrázek 4.

Varianta B - Řezy těles

Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou *V, W, Z*, kde bod *V* je střed hrany *AE*, bod *W* je střed hrany *AB*, a bod *Z* leží na hraně *CG*, $|CZ|:|ZG| = 2:1$

Výsledek řešení:

1. krok - body, které leží ve stejné rovině, můžeme spojit a vzniklá přímka (*VW*) leží také v dané rovině.

2. krok – přímka (*YZ*) leží v zadní stěně krychle a je rovnoběžná s přímkou *VW*.

3. krok – přímka *VW* leží v přední stěně krychle, průsečíkem této přímky a hrany *BF* získáme pomocný bod I., který leží v pření a pravé boční stěně krychle. Průsečík přímky *VW* a hrany *EF* získáme pomocný bod II., který leží v přední a levé boční stěně krychle.

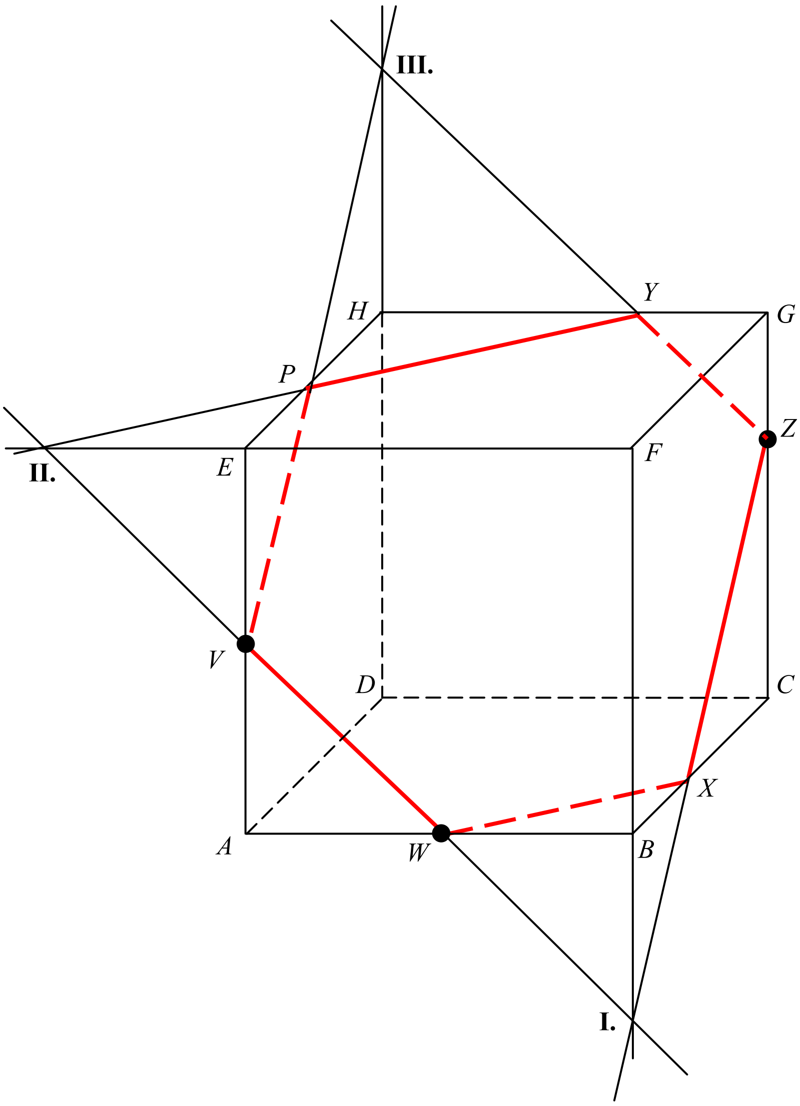
4. krok – bod *X* získáme jako průsečík hrany krychle a přímky procházející bodem *Z* a pomocným bodem I.

5. krok – přímka *WX*.

6. krok - bod *P* získáme jako průsečík hrany krychle a přímky procházející bodem *Y* a pomocným bodem II.

7. krok – přímka *PV*.

Výsledkem řezu je šestiúhelník *PVWXYZ.*



***Příklad*:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

***Příklady k procvičení*:**

1) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = AUV$, bod *U* leží na polopřímce *DH*, $|DU| = \frac{3}{2}|DH|$. Bod *V* leží na polopřímce *CB*, $|CV| = \frac{5}{4}|BC|$. [obrázek 1.]

2) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = XYZ$, bod *X* je středem hrany *AB*.

Bod *Y* je bodem hrany *GH*, $|GY|:|YH| = 2:1$. Bod *Z* je bodem přímky *CD*, tak, že bod *D* je střed úsečky *CZ.* [obrázek 2.]

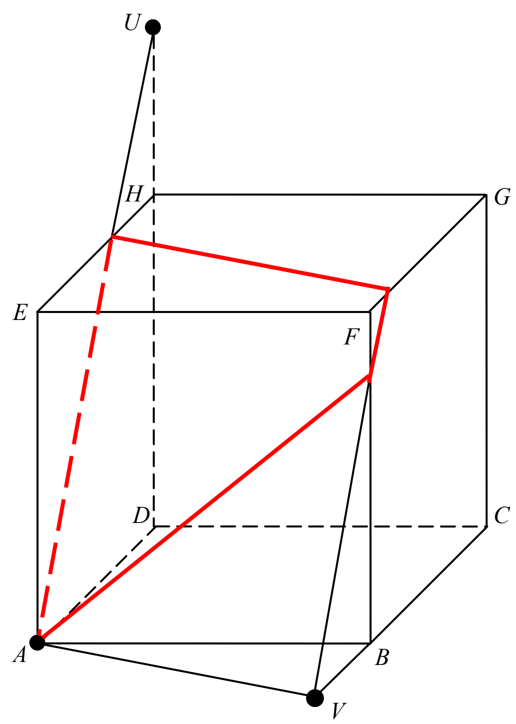
3) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = KLM$, bod *K* leží na hraně *AE*,

$|AK|:|KE| = 1:2$. Bod *L* je středem hrany *BC*. Bod *M* je bodem hrany *GH*,

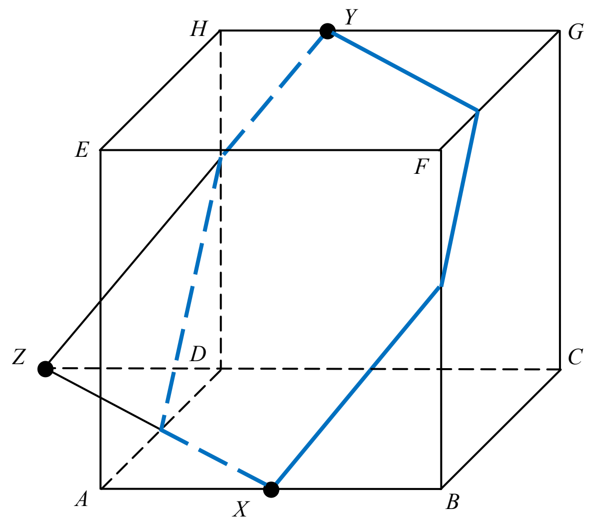
$|GM|:|MH| = 1:3$.

[Musíme získat pomocný bod I. proložením roviny, obrázek 3.]

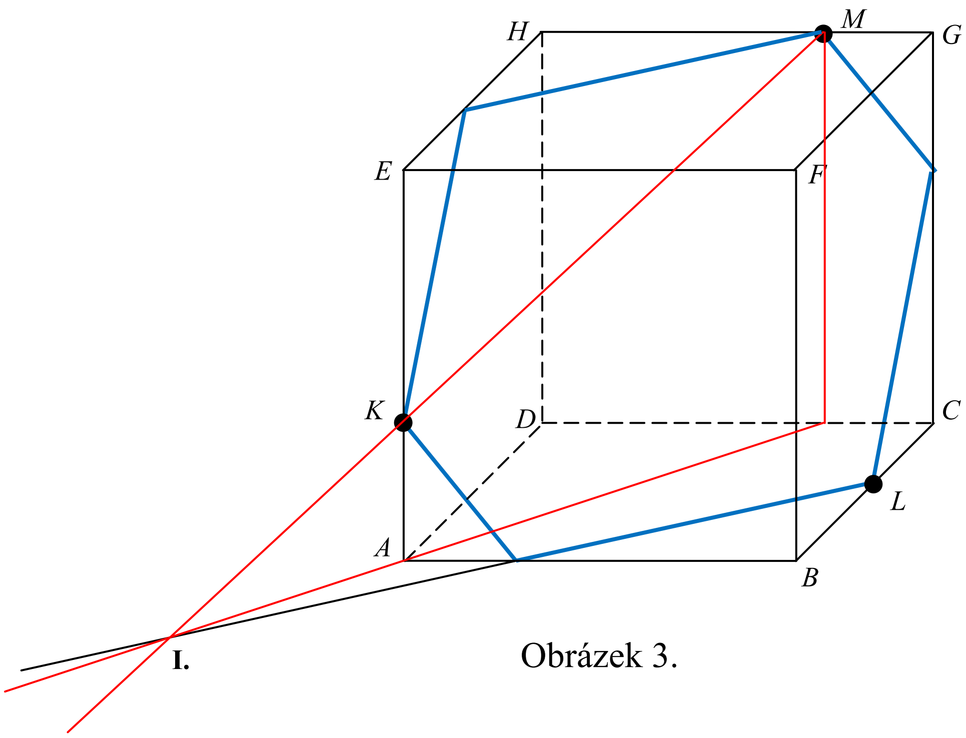
4) Sestrojte řez krychle *ABCDEFGH,* rovinou $\rho = XYZ$, bod *X, Y, Z* jsou středy hran *DH, AB, FG.* [Musíme získat pomocný bod I. proložením roviny, obrázek 4.]



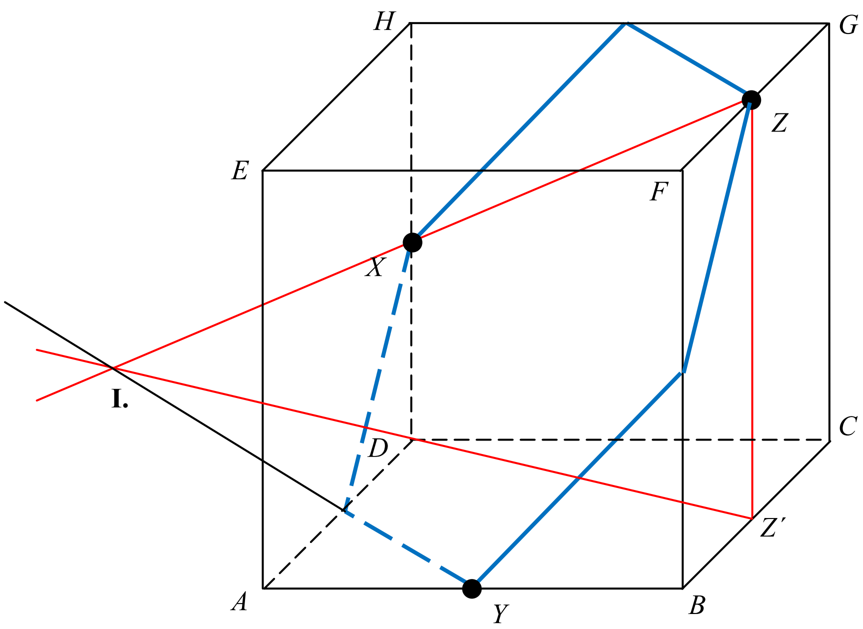
Obrázek 1.



Obrázek 2.



Obrázek 3.



Obrázek 4.

Varianta C - Řezy těles

Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou, která je určena přímkou p, která je rovnoběžná s přímkou AC a prochází bodem L, kde L je středem hrany AB. Dále bodem K, který je středem hrany DV.

Výsledek řešení:

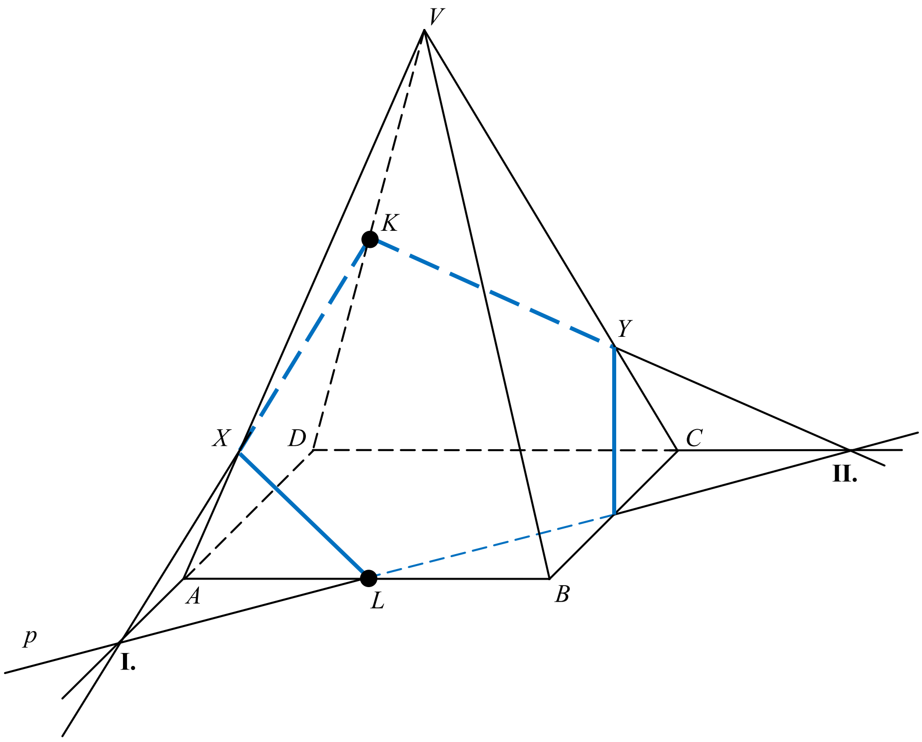
1. krok – jedna strana řezu je určena přímkou p v dolní podstavě.

2. krok – pomocné body I., II. jsou průsečíky přímky p a hran CD a AD v dolní podstavě.

3. krok - bod X získáme jako průsečík hrany AV a přímky procházející bodem K a pomocným bodem I.

4. krok - bod Y získáme jako průsečík hrany krychle a přímky procházející bodem K a pomocným bodem II.

5. krok – spojení bodů, které leží v jedné rovině. V rovině přední stěny a pravé boční stěny.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *XYZ*, body *X, Y, Z* leží po řadě na polopřímkách *BA, DA, VB*. $|BX| = \frac{3}{2}|AB|$, $|DY| = 2|AD|$, $|VZ| = \frac{1}{2}|VB|$.

[Body *X, Y* leží v dolní podstavě, spojíme je přímkou, která také leží v dolní podstavě jehlanu a sestrojíme pomocný bod I., který leží v dolní podstavě a boční stěně jehlanu, obrázek 1.]

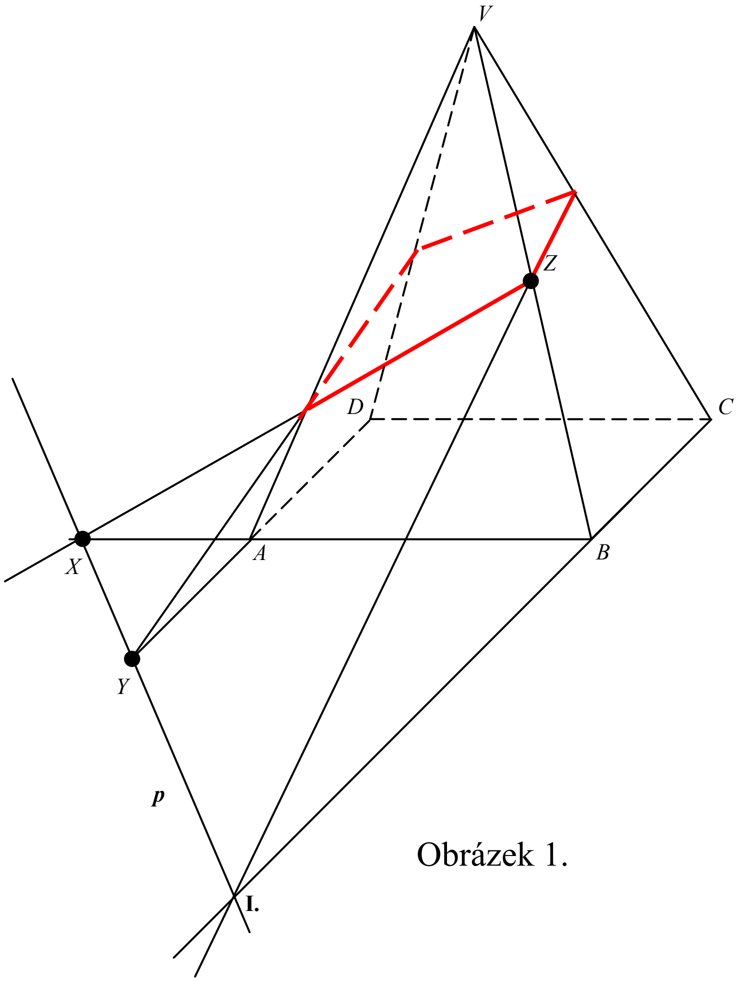
2) Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* rovinou *BPQ*, bod *P* je bodem hrany *AV* a bod *Q* bodem hrany *CV* tak, že $|AP|:|PV| = |VQ|:|QC| = 2:1$.

[Body *P, Q* spojíme přímkou, průnikem této přímky a přímky AC v dolní podstavě, je bod, který leží v dolní podstavě jehlanu a sestrojíme pomocný bod I., který leží v dolní podstavě. Sestrojíme přímku p, která leží v dolní podstavě a získáme pomocný bod II., který leží v dolní podstavě a zadní stěně jehlanu, obrázek 2.]

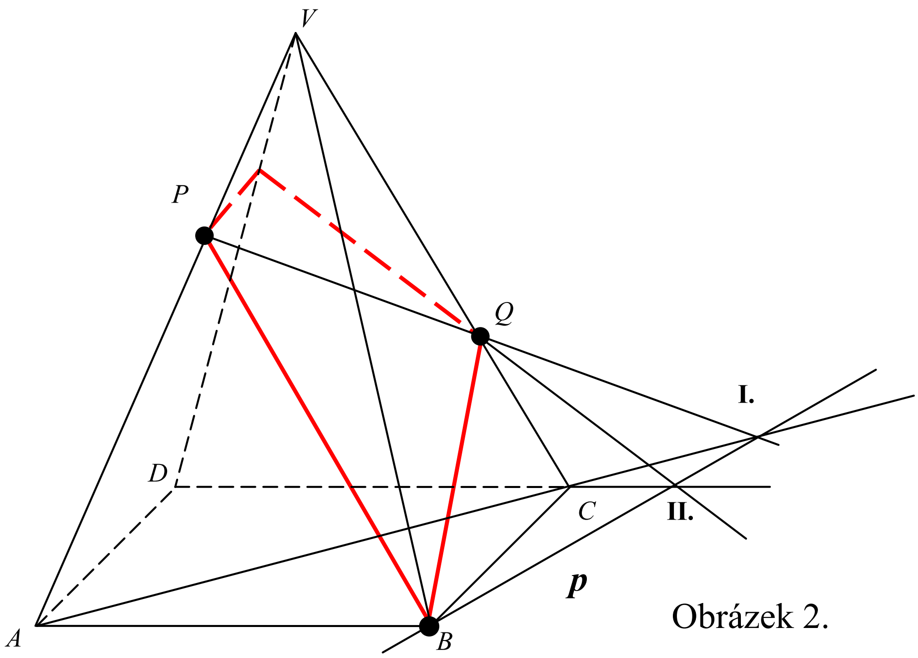
3) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Bod *N* je střed hran *CV*. Sestrojte průsečnici rovin *ACV, BDN*. [obrázek 3.]

4) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Body *M, N* jsou po řadě středy hran *BV* a *CV*. Sestrojte průsečnici rovin *ABN, CDM*.

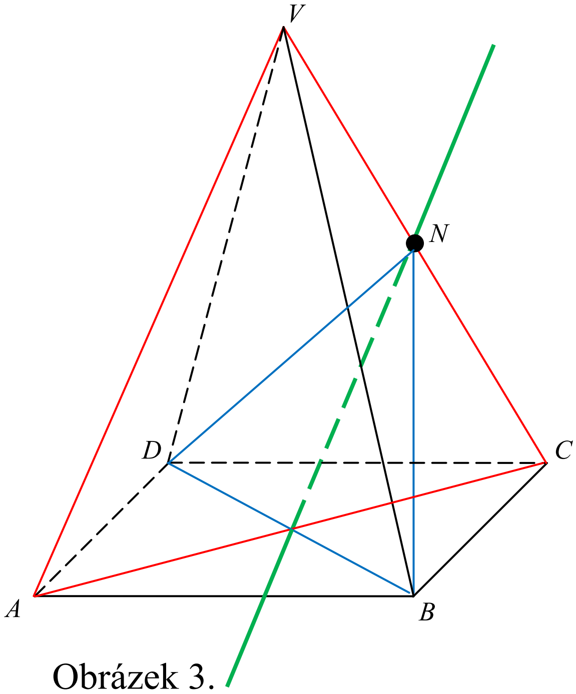
[Průsečnice je rovnoběžná s hranou *AB*, obrázek 4.]



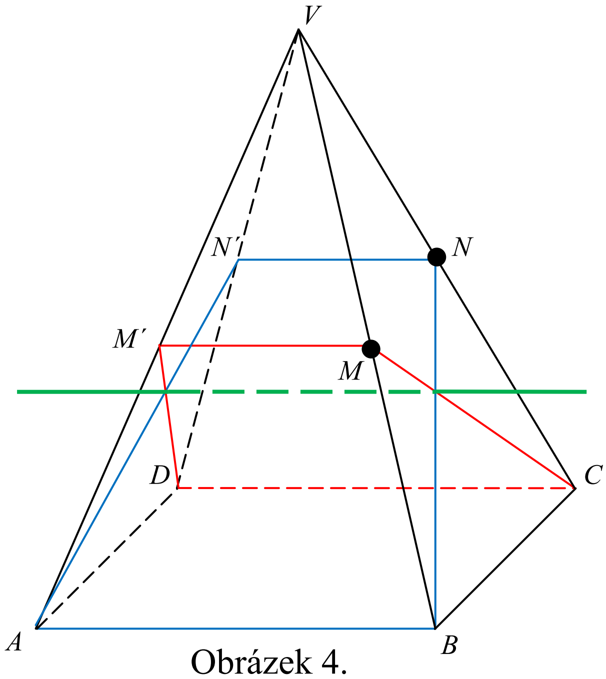
Obrázek 1.



Obrázek 2.



Obrázek 3.



Obrázek 4.

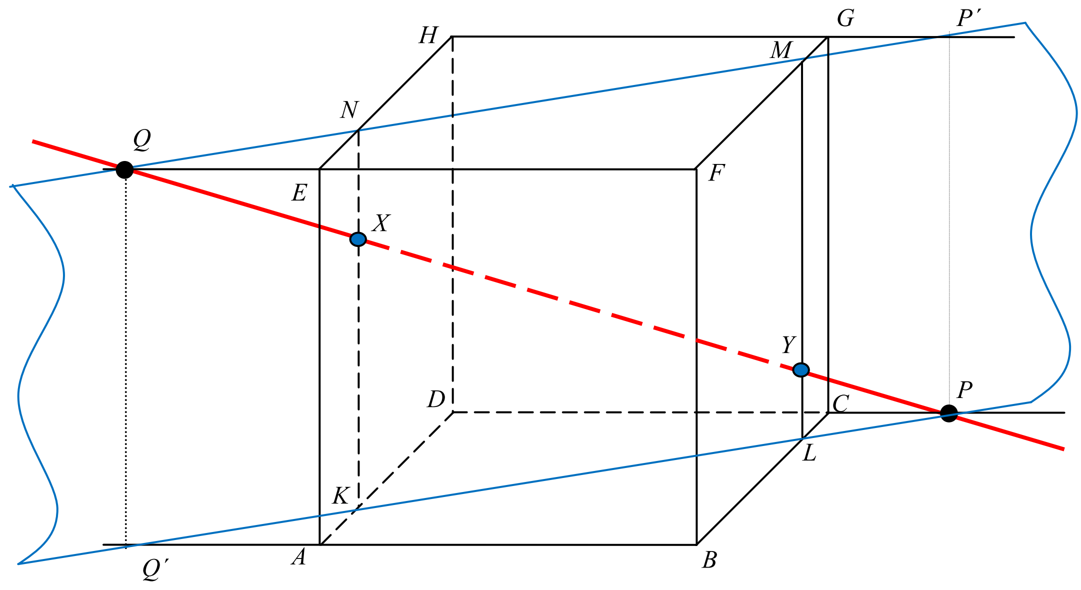
Varianta D – Průnik přímky s tělesem

Je dána krychle $ABCDEFGH$ a přímka $p =\leftrightarrow PQ$. Bod P je bodem polopřímky DC, $|DP| = \frac{4}{3}|CD|$, bod Q je bodem polopřímky EF, $|FQ| = \frac{3}{2}|EF|$. Sestrojte průsečíky přímky p s povrchem krychle.

Výsledek řešení:

Průnik přímky s tělesem řešíme jako průsečík přímky s rovinou. Přímkou proložíme libovolnou rovinu, určíme řez tělesa touto rovinou a průnik přímky s řezem tělesa je současně průnik přímky s tělesem.

Přímkou p vedeme rovinu rovnoběžnou s přímkou AE. Řez krychle rovinou je obdélník $KLMN$. Hledané průsečíky jsou body X, Y. Průnikem přímky s krychlí je úsečka XY.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle $ABCDEFGH$ a přímka $p =\leftrightarrow MN$. Bod M je bodem polopřímky GH, $|MG| = \frac{4}{3}|GH|$, bod N je bodem polopřímky FB, $|NF| = \frac{3}{2}|BF|$. Sestrojte průsečíky přímky p s povrchem krychle.

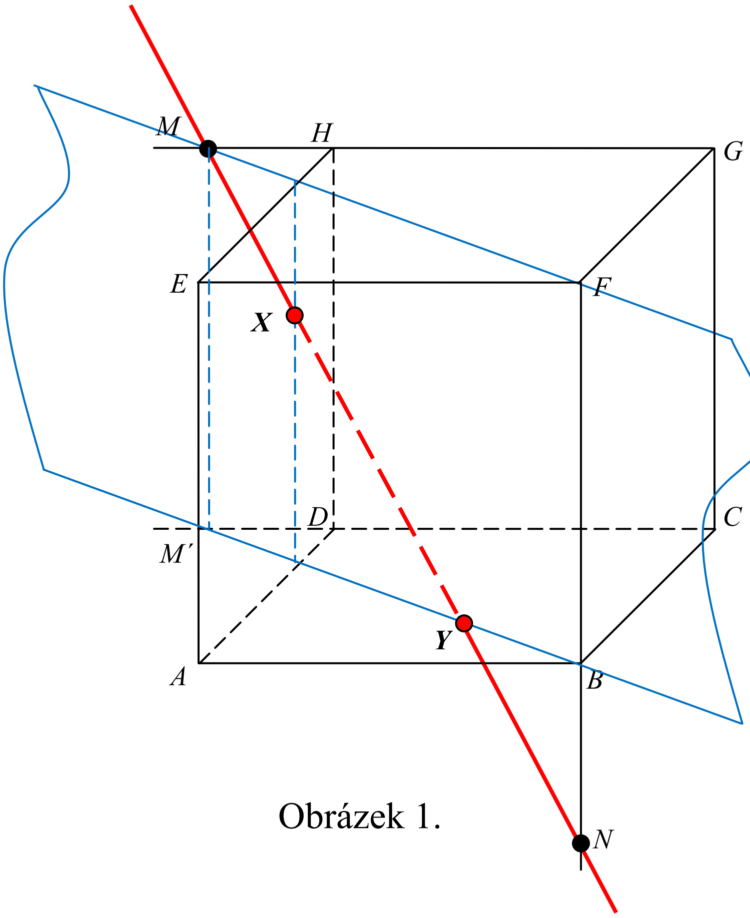
[Průsečíky jsou body $\boldsymbol{X, Y}$, obrázek 1.]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH.* Sestrojte průsečnici rovin *ACE, BHP*, kde bod *P* je středem hrany *FG*. [obrázek 2.]

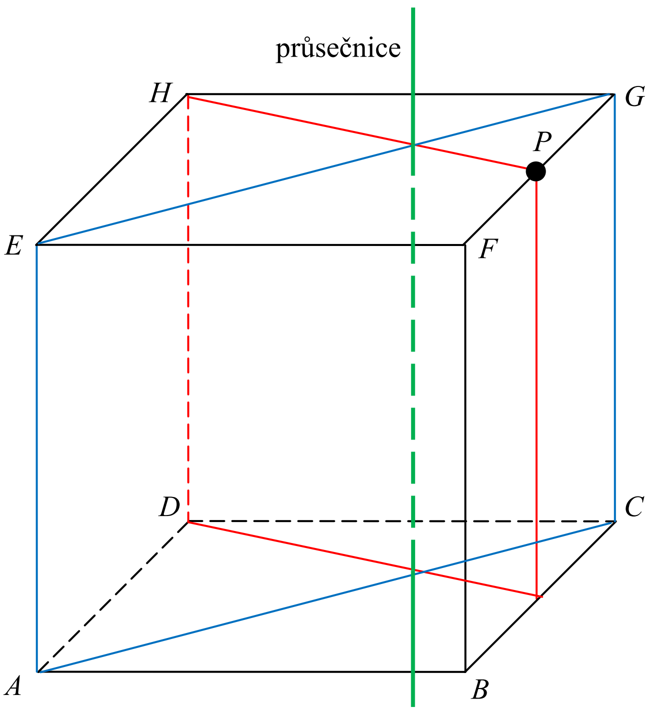
3) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Bod *S* je středem podstavy. Bod *M* je bodem polopřímky *BA*, $|BM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod *N* je středem úsečky *SV*. Sestrojte průnik přímky *MN* s jehlanem.

[Proložíme jehlanem vrcholovou rovinu, která prochází vrcholem, středem podstavy *S* a bodem *M*, obrázek 3.]

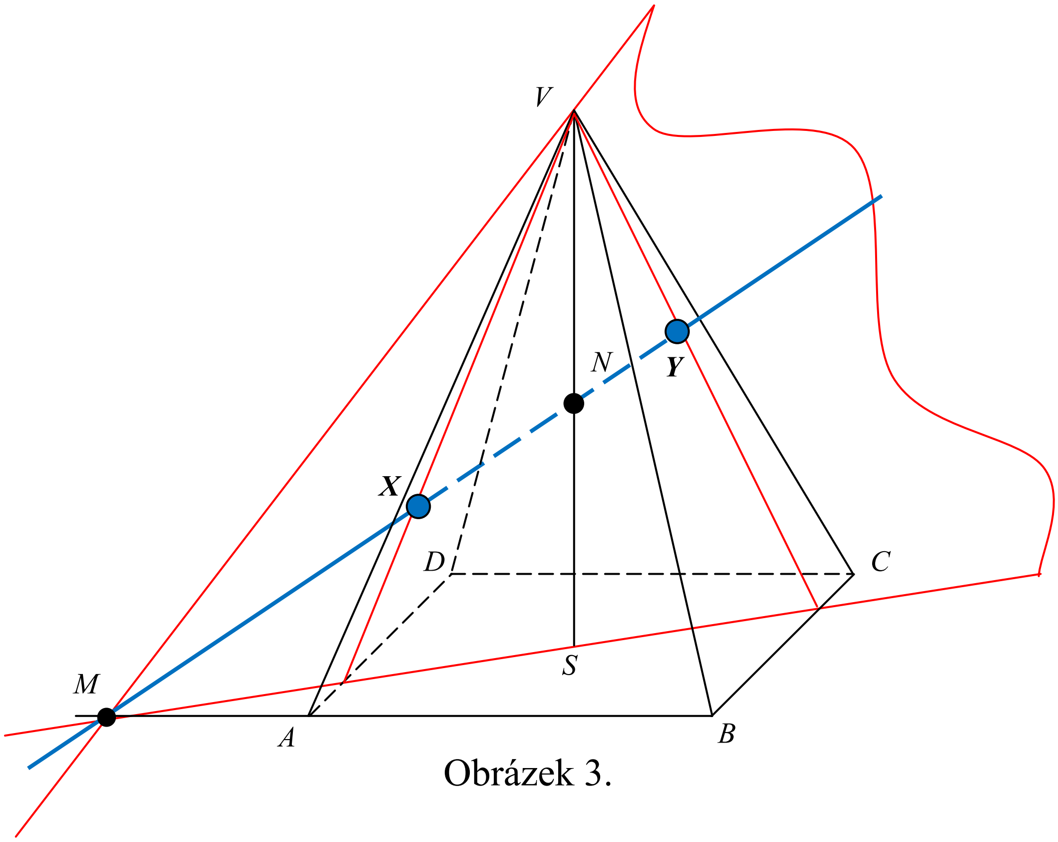
4) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Bod *S* je středem podstavy. Bod *M* je bodem polopřímky *BA*, $|BM| = \frac{3}{2}|AB|$, bod *P* leží na úsečce *OV*, kde bod *O* je středem úsečky *DS*. Sestrojte průnik přímky *MP* s jehlanem.
[Proložíme jehlanem vrcholovou rovinu, která prochází vrcholem, bodem *O* a bodem *M*, obrázek 4.]



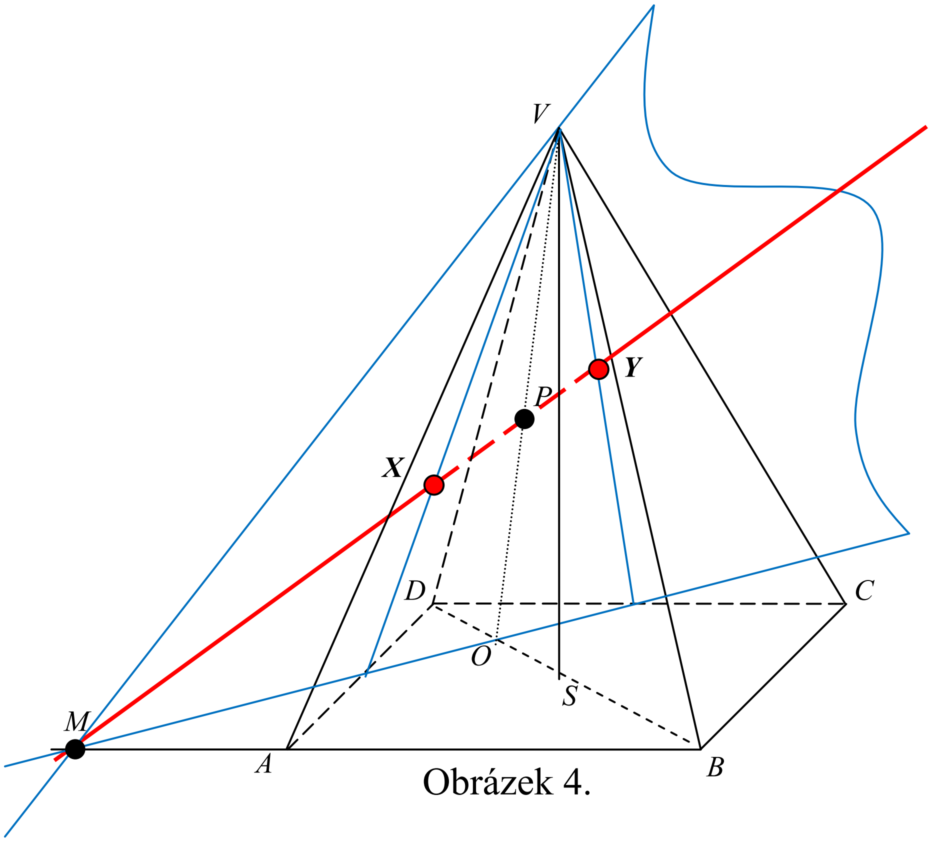
Obrázek 1.



Obrázek 2.



Obrázek 3.



Obrázek 4.

Stereometrie

Metrické vlastnosti – odchylka a kolmost

Odchylka přímek

Podrobný popis prostorových vztahů. Vzdálenosti bodů, přímek, velikosti úhlů, jednotlivé polohy přímek, přímek a rovin.

Odchylka dvou různoběžných přímek - je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají. Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0° (0 rad).

Odchylka dvou mimoběžných přímek - je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami. (o mimoběžkách hovoříme pouze v prostoru)

Odchylka dvou mimoběžných přímek nezávisí na volbě bodu, kterým vedeme rovnoběžky s danými přímkami.

Je-li φ odchylka dvou libovolných přímek p, q, zapisujeme odchylku $\varphi = |\sphericalangle pq|$.

Kolmost přímek a rovin

Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je 90°.

Dvě úsečky jsou kolmé, právě když leží na kolmých přímkách.

$\leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow CD$

Ve stereometrii mohou být kolmými i mimoběžné přímky.

Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny.

$$\leftrightarrow AB \perp \ \rho$$

Přímka p kolmá k rovině se nazývá kolmice k rovině, bod P je pata kolmice.

$$\{P\} = p \cap \rho$$

Kritérium kolmosti přímky a roviny:

Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.

Chceme-li dokázat, že přímka není kolmá k rovině, stačí najít jednu přímku roviny, k níž není daná přímka kolmá.

Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici.

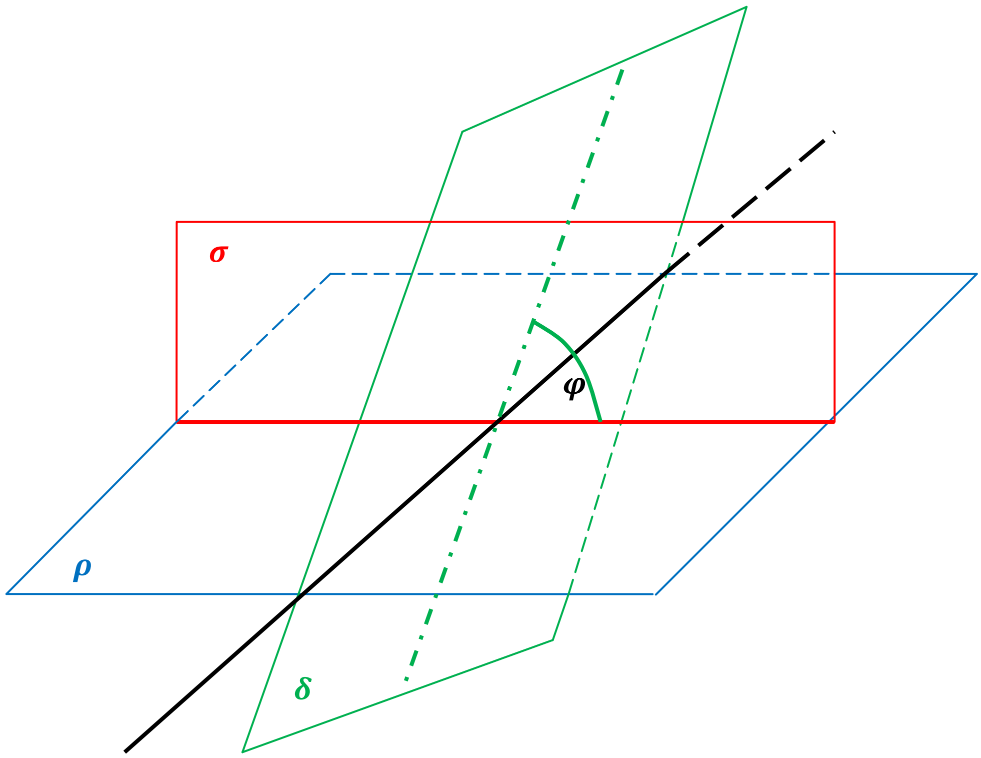
Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmou rovinu.

Kolmost rovin definujeme pomocí kolmosti přímky a roviny.

Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Odchylka přímek a rovin

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá.



Jsou-li roviny rovnoběžné, pak je odchylka 0°.

Jsou-li roviny k sobě kolmé, pak je odchylka 90°.

$$\varphi = |\sphericalangle p\rho|$$

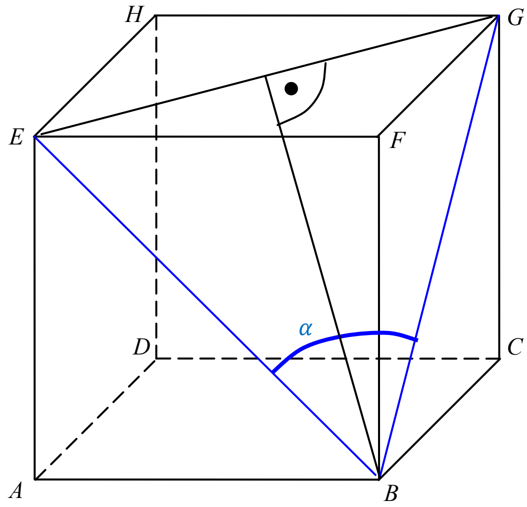
$$\varphi = |\sphericalangle \rho\sigma|$$

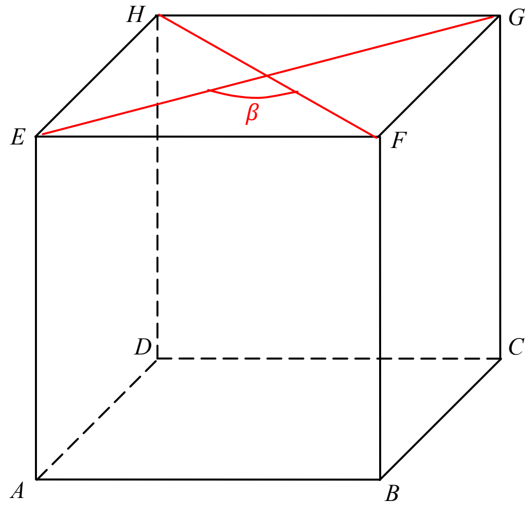
Odchylka přímky a roviny je velikost nejmenší z odchylek přímky a libovolné přímky roviny.

Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do této roviny.

Varianta A - Odchylka přímek

Je dána krychle s hranou délky a. Určete odchylku dvou stěnových úhlopříček.





Výsledek řešení:

Velikost stěnové úhlopříčky v krychli je z Pythagorovy věty:

$$u_s = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$$

Poloviční velikost stěnové úhlopříčky je

$$\frac{u_s}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}$$

Pro velikost úhlu $\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{u_s}{2}}{u_s}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30°$$

Úhel mezi stěnovými úhlopříčkami je $\alpha = 60°$

Velikost úhlu β mezi stěnovými úhlopříčkami je $\beta = 90°$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle s hranou délky a. Určete odchylku dvou tělesových úhlopříček.

[70°31´]

2) Je dána krychle s hranou délky a. Určete odchylku stěnové a tělesové úhlopříčky.

[35°15´; 90°]

3) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod S je středem jeho podstavy, bod *P* je středem hrany *AV*. Určete odchylku přímek

a) *BC, SV* b) *SV, BP* [a) 90°; b) 65°52´]

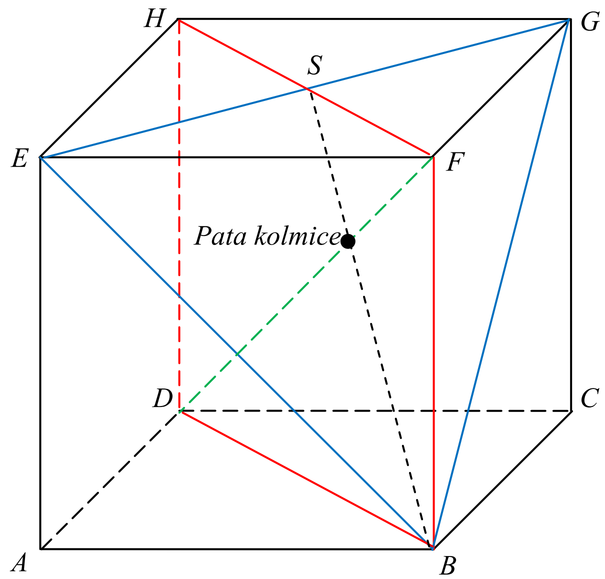
4) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod S je středem jeho podstavy, bod *P* je středem hrany *AV*. Určete odchylku přímek

a) *BV, CP* b) *AB, CV* [a) 77°5´; b) 60°]

Varianta B – Kolmost přímek a rovin

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání patu kolmice vedené bodem *F* k rovině *BEG*.

Výsledek řešení:
Bodem *F* proložíme rovinu *BFH*, která je kolmá k *BEG*, nalezneme průsečnici těchto dvou rovin (*SB*). Na této průsečnici leží pata kolmice, kterou získáme jako průsečík přímky *SB* a *DF*.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Bod *M* je středem hrany *AB*. Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání patu kolmice vedené bodem *H* k přímce *CM*.

[Průsečík přímky *CM* s rovinou *DHX*, kde bod *X* je střed hrany *BC*.]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete pravoúhlý průmět bodu *B* do roviny

a) *ADH* b) *CDE*

[a) bod *A*; b) střed stěny *BCGF*]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete pravoúhlý průmět přímky *DF* do roviny

a) *ABC* b) *DEG*

[a) přímka *BD*; b) přímka *DS, S* je střed stěny *EFGH*]

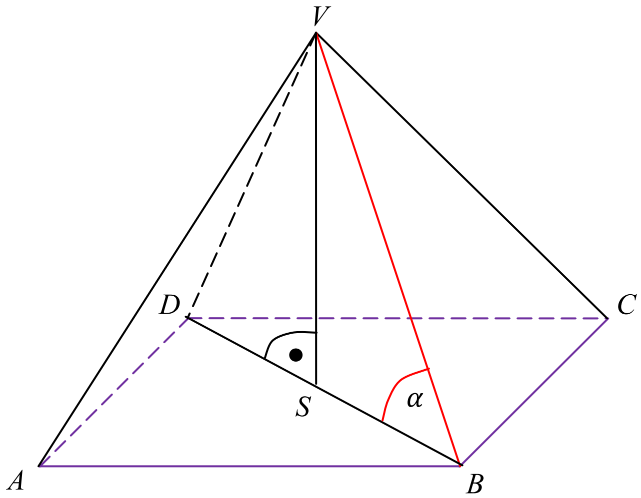
4) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete pravoúhlý průmět přímky *DF* do roviny

a) *ADH* b) *ACG*

[a) přímka *DE*; b) přímka *XY, X* je střed stěny *ABCD, Y* je střed stěny *EFGH*]

Varianta C – Odchylka přímek a rovin

Je dána pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Vypočti odchylku přímky *BV* a roviny *ABC*, je-li délka všech jeho hran stejná.



Výsledek řešení: Odchylku hrany BV a podstavy vypočteme pomocí rovnoramenného trojúhelníku BDV. Odchylka α musí mít velikost 45°.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku rovin *ABC* a *BEG*.

[54°44´]

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku rovin *ABC* a *MNG*. Body *M, N* jsou středy hran *BC, CD.*

[70°29´]

3) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku rovin *ABC* a přímky *p*. Přímka *p* je určena body *X, Y*. Bod *X* je středem hrany *EH* a bod *Y* je bodem hrany *BF*, $|BY|:|YF| = 1:3$

[33°50´]

4) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku rovin *BDM* a přímky *CE.* Bod *M* je středem hrany *CG*.

[70°32´]

Stereometrie

Metrické vlastnosti – vzdálenosti

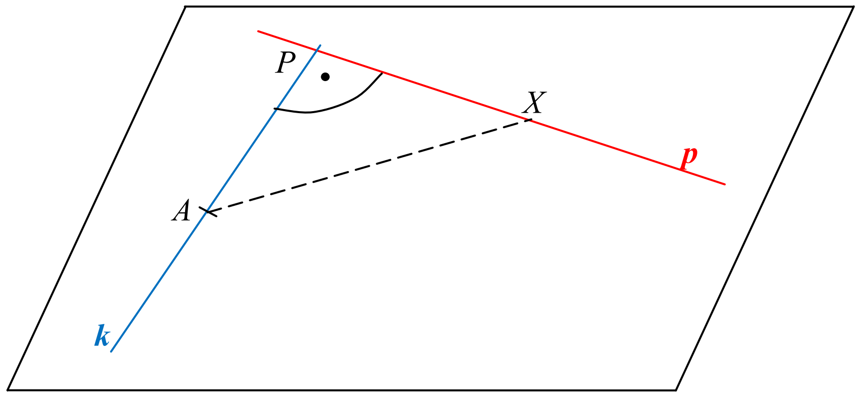
<u>**Vzdálenost bodu od přímky a od roviny**</u>

Vzdálenost bodů A, B je délka úsečky AB značíme ji $|AB|$**.**

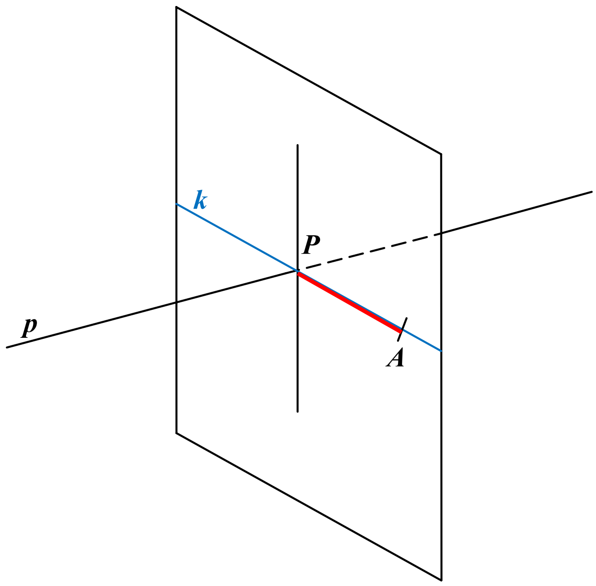
Vzdálenost bodu od přímky můžeme určit jako vzdálenost bodu od přímky v rovině, neboť bod a přímka v prostoru určují rovinu (pokud bod na přímce neleží)

*Vzdálenost bodu **A** od přímky **p** je nejmenší ze všech vzdáleností bodu **A** od jednotlivých bodů **X** přímky **p**. Je to délka úsečky **AP**, kde **P** je pata kolmice **k** vedené v rovině **Ap** bodem **A** k přímce **p**. Vzdálenost bodu **A** od přímky **p** značíme* $|Ap|$.

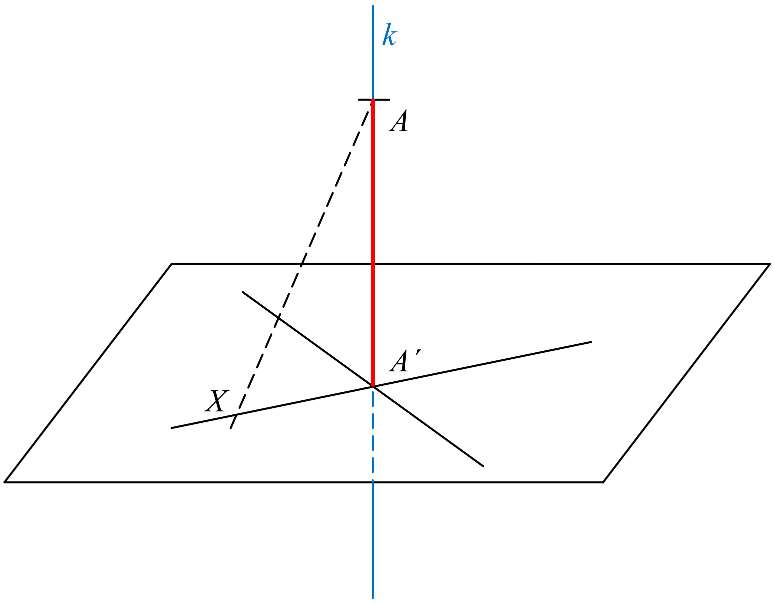
*Pokud by bod **A** ležel na přímce **p**, pak je vzdálenost rovna nule.*



Vzdálenost bodu od přímky určujeme pomocí roviny kolmé k dané přímce a procházející daným bodem.



Vzdálenost bodu A od roviny je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A´ do roviny.

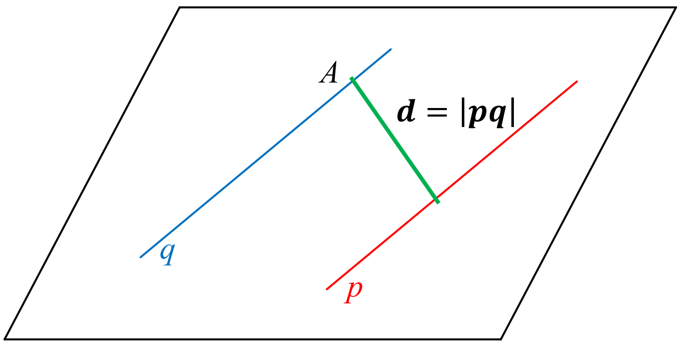


<u>Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny a rovnoběžnosti dvou rovin:</u>

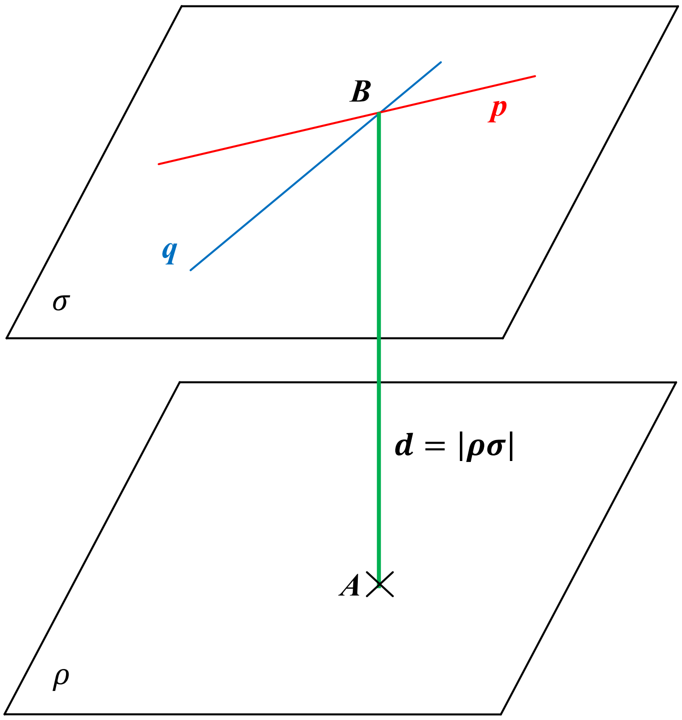
- ***Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ, jestliže lze na přímce p najít dva různé body ležící v témže poloprostoru ohraničeném rovinou ρ, které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.***
- ***Dvě roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině σ najít tři různé body, které neleží v téže přímce, ale leží v témže poloprostoru s hraniční rovinou ρ a které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.***

Vzdálenost přímek a rovin

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky. $\boldsymbol{d = |pq|}$



Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny. $\boldsymbol{d = |\rho\sigma|}$



Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny. $\boldsymbol{d = |p\rho|}$

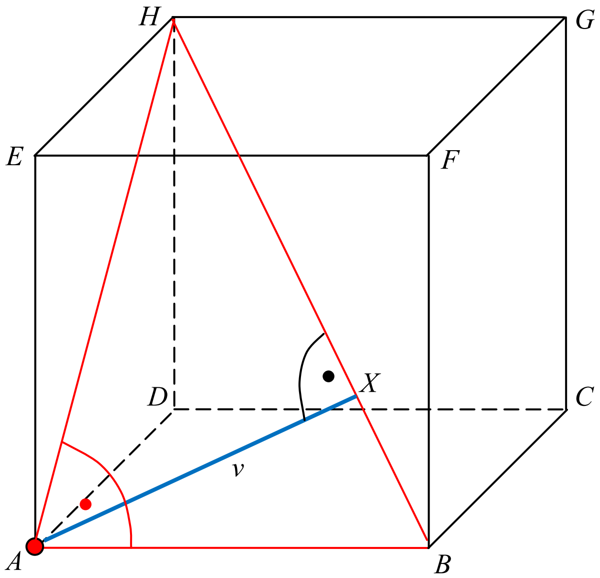
Vzdálenost dvou mimoběžek

Vzdálenost mimoběžných přímek je délka úsečky *PQ*, kde její body *P, Q* jsou po řadě průsečíky mimoběžek s takovou příčkou mimoběžek, která je k oběma z nich kolmá. Jde o nejmenší vzdálenost mezi mimoběžkami.

Varianta A - Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*. Vypočtěte vzdálenost bodu *A* od přímky *BH*.

Výsledek řešení:



Trojúhelníky $\Delta BAH, \Delta AXB$ jsou pravoúhlé a podobné.

Proto platí:

$$\frac{|AH|}{|BH|} = \frac{|v|}{|AB|}$$

$$\frac{u_s}{u_t} = \frac{|v|}{a} \Rightarrow |v| = \frac{u_s}{u_t} \cdot a$$

$$|v| = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{3} \cdot a} \cdot a = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Vzdálenost bodu *A* od přímky *BH* je rovna $\sqrt{\frac{2}{3}}a$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*.

Vypočtěte vzdálenost bodu *A* od přímky *FH*. $[\sqrt{\frac{3}{2}}a]$

2) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky $a = 4cm$. Vypočtěte vzdálenost bodu *M* od roviny *ABG* .Bod *M* je střed hrany *EF*. $[2\sqrt{2}cm]$

3) V pravidelném čtyřbokém jehlanu *ABCDV* je délka podstavné hrany *a*, výška jehlanu je *v*. Určete vzdálenost bodu *B* od roviny *ACV*.

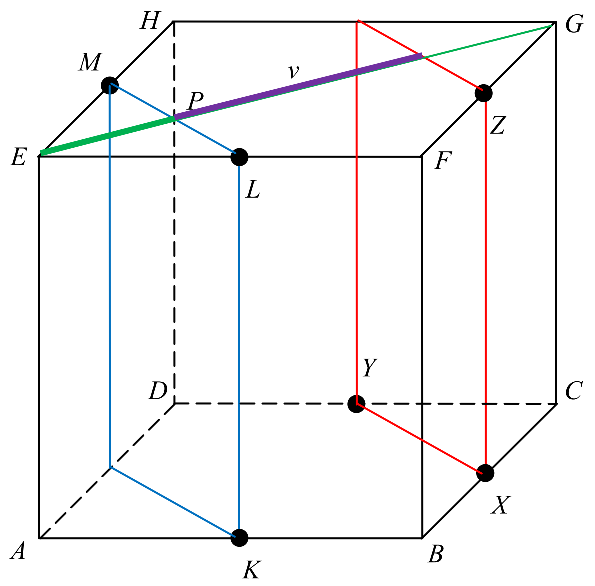
$$\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

4) V pravidelném čtyřbokém jehlanu *ABCDV* je délka podstavné hrany *a*, výška jehlanu je *v*. Určete vzdálenost bodu *B* od roviny *CDV*.

$$\frac{2av}{\sqrt{a^2 + 4v^2}}$$

Varianta B - Vzdálenost přímek a rovin

Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*. Vypočtěte vzdálenost rovin *KLM* a *XYZ*. Body *K, L, M, X, Y, Z* jsou po řadě středy hran *AB, EF, EH, BC, CD, FG.*



Výsledek řešení:

Vzdálenost *v* mezi rovinami *KLM* a *XYZ* určíme pomocí délky stěnové úhlopříčky:

$$v = |EG| - 2 \cdot |EP|$$

$$|EG| = u_s = a \cdot \sqrt{2}$$

$$|EP| \Rightarrow \cos 45° = \frac{|EP|}{|EL|}$$

$$|EP| = |EL| \cdot \cos 45° \Rightarrow |EP| = \frac{a}{2} \cdot \cos 45°$$

$$|EP| = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

$$v = |EG| - 2 \cdot |EP|$$

$$v = a \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

$$v = a \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost rovin *ABM* a *GHX*. Body *M, X,* jsou po řadě středy hran *EH, BC.*

$$\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

2) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost přímek *YZ* a *MX*. Body *M, X, Y, Z* jsou po řadě středy hran *EH, GH, EF,FG.*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

3) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost přímek *MX* a *KL*. Body *K, L, M, X,* jsou po řadě středy hran *AB, BC, EH, GH.*

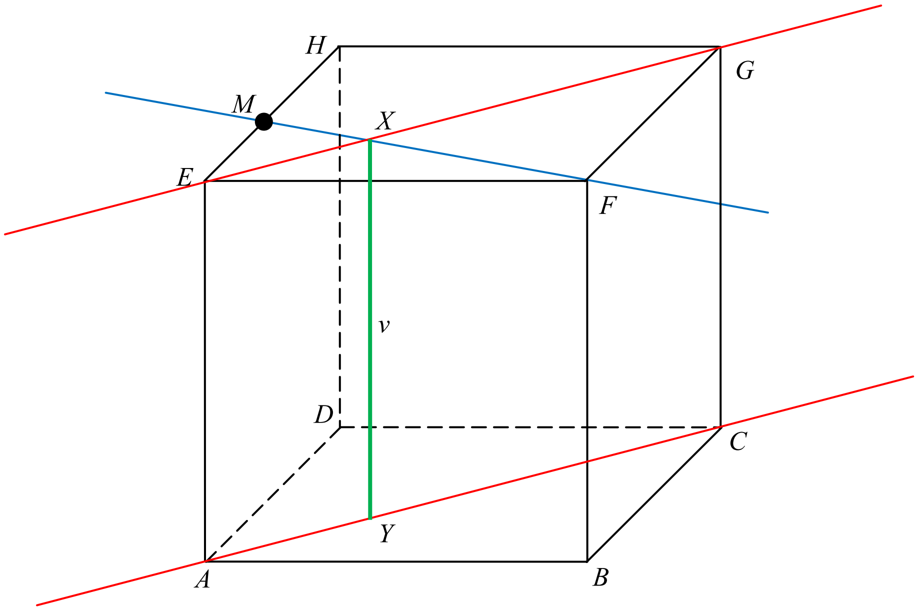
$$\sqrt{\frac{3}{2}}a$$

4) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky a je bod *M* středem hrany *AE* a bod *N* středem hrany *CG*. Určete vzdálenost přímky *MN* od roviny *DEG*.

$$\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Varianta C - Vzdálenost dvou mimoběžek

Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*, bod *M* je bodem hrany *EH*. Určete vzdálenost mimoběžek *AC* a *FM*.



Výsledek řešení:

Proložíme rovinu *ACE*, a v této rovině leží úsečka *XY*, jejíž velikost určuje vzdálenost mezi mimoběžkami *FM* a *AC*. Tato vzdálenost je rovna délce hrany krychle *a*.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a* bod *M* je středem hrany *AD*. Určete vzdálenost mimoběžek *BM* a *EG*. $[a]$

2) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*, bod *N* je středem hrany *CD*. Určete vzdálenost mimoběžek *BC* a *GN*.

$\frac{\sqrt{5}}{5}a$

3) Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*, určete vzdálenost mimoběžek *AB, CD*.

$[\frac{\sqrt{2}}{2}a]$

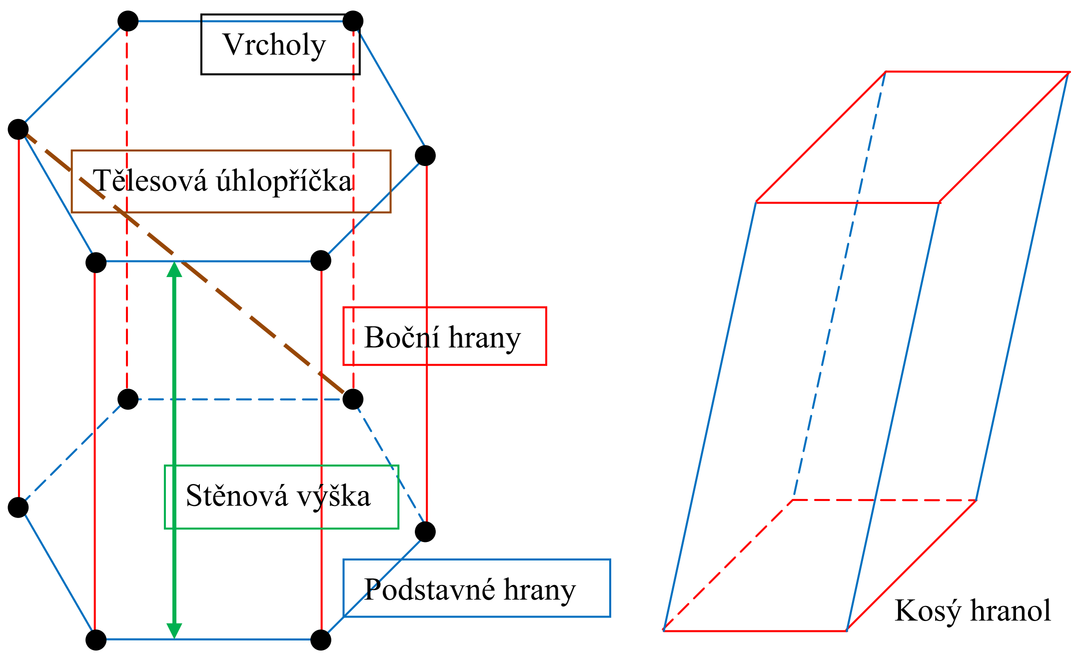
4) Pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Určete vzdálenost mimoběžek *BC* a *MN*. Bod *M* leží ve středu hrany *AV*, bod *N* leží ve středu hrany *BV*.

Tělesa

Geometrické těleso je prostorový omezený geometrický útvar. Jeho hranicí neboli povrchem je uzavřená plocha.

Mnohostěny

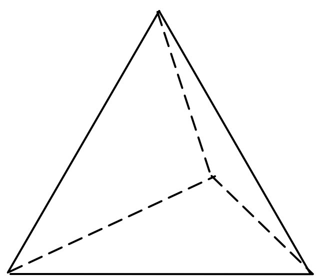
Jejich podstavou je ***mnohoúhelník*** (řídící mnohoúhelník). Ostatní stěny hranolu, které nejsou jeho podstavami, jsou ***boční stěny*** hranolu. Sjednocení všech bočních stěn je ***plášť hranolu***. Vrcholy stěn hranolu jsou ***vrcholy hranolu***. Strany podstav hranolu jsou ***podstavné hrany***, ostatní hrany jsou ***boční hrany*** hranolu. Vzdálenost podstavných hran v téže boční stěně je ***stěnová výška***. Úsečky, jejichž krajní body jsou vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně, se nazývají ***tělesové úhlopříčky***.
Hranol, jehož boční hrany jsou kolmé k rovinám podstav, se nazývá ***kolmý hranol***. Hranol, jehož boční hrany nejsou kolmé k rovinám podstav, je ***kosý hranol***. Kolmý hranol, jehož podstavami jsou pravidelné n-úhelníky, se nazývá pravidelný n-boký hranol.



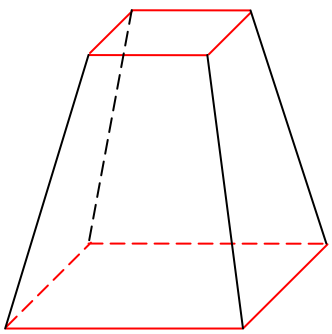
Rovnoběžnostěn – u tohoto hranolu jsou rovnoběžné nejen roviny podstav, ale také roviny dvou a dvou bočních stěn. Je ohraničen třemi dvojicemi navzájem rovnoběžných a shodných rovnoběžníků. Kterákoliv dvojice rovnoběžných stěn může být podstavami. Má 12 hran, 8 vrcholů, 4 tělesové úhlopříčky. Tělesové úhlopříčky rovnoběžnostěnu se protínají v jediném bodě a navzájem se půlí.
Kvádr, krychle, klenec jsou zvláštní případy rovnoběžnostěnu. Klenec je rovnoběžnostěn omezený 6 kosočtverci.

n-boký jehlan - Podstava obsahuje vrcholy podstavy. Stěny jehlanu, které obsahují hlavní vrchol, jsou boční stěny jehlanu, sjednocení všech bočních stěn je plášť jehlanu. Každá boční stěna jehlanu je trojúhelník. Strany podstavy jehlanu jsou podstavné hrany, ostatní hrany jsou boční hrany. Stěnová výška je vzdálenost hlavního vrcholu od podstavné hrany v boční stěně.

Čtyřstěn – je těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Jsou-li jeho stěny shodné rovnostranné trojúhelníky, pak se nazývá pravidelný čtyřstěn. Je to mnohostěn s nejmenším počtem stěn. Spojnice libovolného vrcholu čtyřstěnu s těžištěm protější stěny se nazývá těžnice čtyřstěnu. Všechny čtyři těžnice čtyřstěnu procházejí jedním bodem, těžištěm.



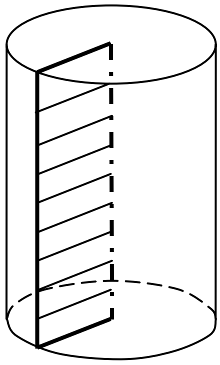
Komolý jehlan – má dvě podstavy, které jsou podobnými mnohoúhelníky, boční stěny jsou lichoběžníky.



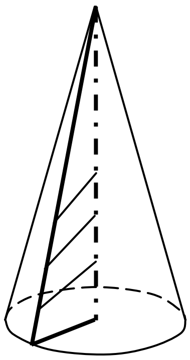
Rotační tělesa

Mnohostěny jsou hranatá tělesa, která lze vytvořit jako průniky poloprostorů. Rotační těleso je těleso, které vznikne rotací rovinného obrazce kolem dané přímky, tzv. osy rotačního tělesa.

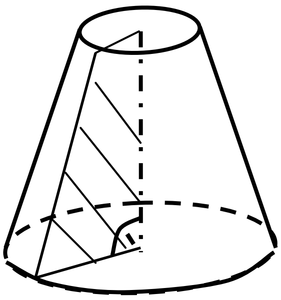
- ***Rotační válec -*** Vznikne rotací obdélníku, případně čtverce kolem přímky, která obsahuje jeho jednu stranu. Podstavné hrany jsou kružnice, podstavy jsou kruhy.



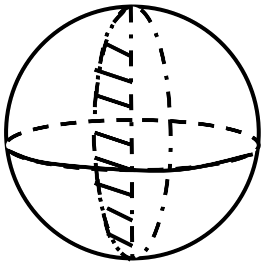
- ***Rotační kužel -*** Vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem přímky, která obsahuje jeho jednu odvěsnu. Podstavná hrana je kružnice, podstavou je kruh.



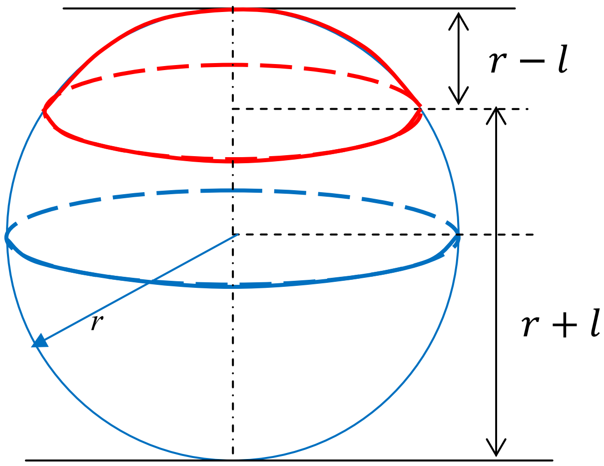
- ***Komolý rotační kužel -*** Vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníku kolem přímky, v níž je kratší rameno. Délka tohoto ramene je výška komolého kužele.



- ***Koule -*** Vznikne rotací půlkruhu kolem přímky, která obsahuje průměr koule. Střed půlkruhu je střed koule, jeho poloměr je poloměr koule. Hranicí koule je kulová plocha.



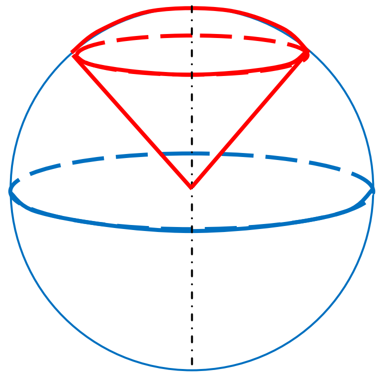
Část kulové plochy omezená její libovolnou kružnicí ***k*** se nazývá ***kulový vrchlík***, kružnice ***k*** je hrana kulového vrchlíku. Kulový vrchlík je průnik kulové plochy a poloprostoru s hraniční rovinou, jejíž vzdálenost ***l*** od středu ***S*** kulové plochy je menší než poloměr ***r*** kulové plochy. Každá taková rovina rozdělí kulovou plochu na dva kulové vrchlíky. Výška jednoho je $r - l$, druhého $r + l$.



Protneme-li kouli rovinou, vzniknou ***dvě kulové úseče***. Prochází-li rovina středem kulové plochy, nazýváme ***obě úseče polokoule***.

Kulová úseč je průnik koule a poloprostoru, jehož hraniční rovina protíná kouli v kruhu. Tento kruh je podstavou kulové úseče. Další částí hranice kulové úseče je kulový vrchlík. Výška kulového vrchlíku je i výškou příslušné úseče.

Kulová výseč je sjednocení kulové úseče a rotačního kužele, který má s kulovou úsečí společnou podstavu a jeho vrchol je středem příslušné koule.



Průnik kulové plochy a vrstvy s hraničními rovinami, jejich vzdálenost od středu je menší než poloměr, je kulový pás. Vzdálenost rovin je výška pásu.

- ***Anuloid – torus -*** Necháme-li rotovat kruh kolem přímky, která leží v rovině tohoto kruhu a tento kruh neprotíná. Duše pneumatiky auta.

Tělesa

Objem a povrch mnohostěnů

Objem tělesa je kladné reálné číslo přiřazené tělesu tak, že platí:

1. Shodná tělesa mají objemy sobě rovné.
2. Jestliže je těleso složeno z několika nepronikajících se těles, je jeho objem roven součtu objemů těchto těles.

Navzájem se nepronikající tělesa jsou ta, z nichž žádné neobsahuje vnitřní bod druhého.

Povrchem tělesa rozumíme obsah jeho hranice.

Hranol

Kvádr

$V = a \cdot b \cdot c$

$$S = 2(ab + bc + ac)$$

Kvádr můžeme rozdělit na dva shodné trojboké hranoly, jejichž podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky.

Objem ***trojbokého hranolu***

$$V = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot c = \left(\frac{1}{2} a \cdot b\right) \cdot c$$

Je-li podstavou kolmého hranolu obecný trojúhelník, jsou aspoň dva jeho vnitřní úhly ostré. Je proto vždy možné rozdělit podstavu na pravoúhlé trojúhelníky.

$$V = V_1 + V_2 = S_{p1} \cdot c + S_{p2} \cdot c = \left(S_{p1} + S_{p2}\right) \cdot c$$

Krychle

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

$$S = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$$

Objem hranolu určíme podle vzorce $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy hranolu, v je jeho výška.

Povrch hranolu určíme podle vzorce $S = 2S_p + S_{pl}$, kde S_{pl} je obsah pláště.

Jehlan

Krychli je možné rozdělit na tři shodné nepronikající se jehlany se čtvercovou podstavou.

$$V = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^2 \cdot a$$

$$V = \frac{1}{3}S_p \cdot v$$

$$S = S_p + S_{pl}$$

S_{pl} je obsah pláště, který je tvořen trojúhelníky.

Komolý jehlan

Objem komolého jehlanu, který má výšku v a jehož podstavy mají obsahy S_1, S_2:

$$V = \frac{1}{3}v \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$$

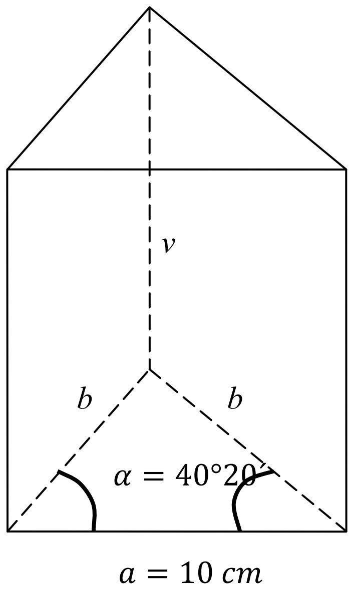
Povrch komolého jehlanu je roven součtu obsahů S_1, S_2 jeho podstav a obsahu S_{pl} jeho pláště:

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$

Tělesa

Varianta A - Povrchy a objemy těles

Podstavou kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník, jehož základna má délku $a = 10\ cm$ a úhel při základně má velikost $\alpha = 40°20'$. Vypočítejte objem tohoto hranolu, je-li obsah jeho pláště roven součtu obsahů jeho podstav.



Výsledek řešení:

1) Spočítáme výšku v rovnoramenném trojúhelníku v_1.

2) Spočítáme délku ramene v trojúhelníku podstavy b.

3) Spočítáme obsah pláště S.

4) Plášť hranolu je obdélník, jehož jedna strana má délku rovnu obvodu trojúhelníku v podstavě c a druhá strana má délku výšky hranolu v.

$$c = a + b + b$$

5) Výpočet objemu hranolu V

1)

$$tg40°20' = \frac{v_1}{\frac{a}{2}}$$

$$v_1 = \frac{a}{2} \cdot tg40°20 = 5 \cdot tg40°20$$

$$v_1 = 4{,}24\ cm$$

2)

$$\cos 40°20' = \frac{\frac{a}{2}}{b}$$

$$b = \frac{a}{2 \cdot \cos 40°20'} = \frac{10}{2 \cdot \cos 40°20'}$$

$$b = 6{,}56cm$$

3)

$$S = a \cdot v_1$$

$$S = 10 \cdot 4{,}24$$

$$S = 42{,}4cm^2$$

4)

$$S = c \cdot v = (a + b + b) \cdot v$$

$$v = \frac{S}{(a + b + b)}$$

$$v = \frac{42{,}4}{(10 + 6{,}56 + 6{,}56)}$$

$$v = 1{,}83\ cm$$

5)

$$V = S_p \cdot v = \frac{a \cdot v_1}{2} \cdot v$$

$$V = \frac{10 \cdot 4{,}24}{2} \cdot 1{,}83 \doteq 38{,}9cm^3$$

Objem trojbokého hranolu je $V = 38{,}9cm^3$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Je dána krychle s hranou délky a. Určete délku hrany krychle, která má vzhledem k původní krychli dvojnásobný objem.

[$a_1 = a\sqrt[3]{2}$]

2) Je dána krychle s hranou délky a. Určete délku hrany krychle, která má vzhledem k původní krychli dvojnásobný povrch.

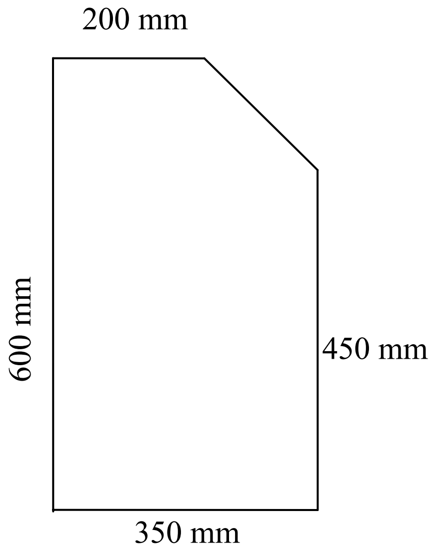
[$a_1 = a\sqrt{2}$]

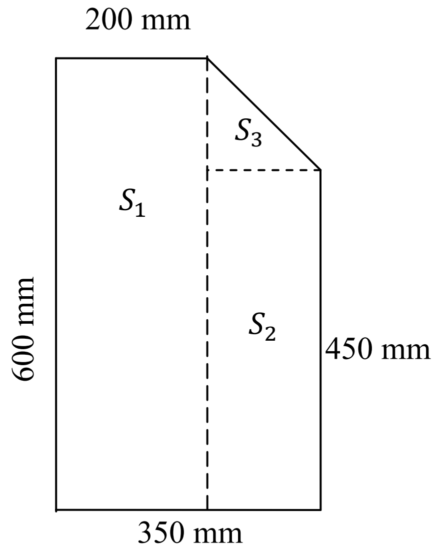
3) Prodlouží-li se hrana dané krychle o 2 cm, zvětší se její objem o $486\ cm^3$. Určete povrch původní i zvětšené krychle. [a) $384\ cm^2$; b) $600\ cm^2$]

4) Vypočítej výšku kolmého trojbokého hranolu s objemem $200\ cm^3$, jehož podstavné hrany mají délky $4\frac{1}{3}cm$, $10cm$, $12\frac{1}{3}cm$. [$v = 10cm$]

Varianta B - Povrchy a objemy těles

Dřevěný trám potřebný na stavbu mostu, jehož průřez je na obrázku, má objem $V = 1{,}59\ m^2$. Vypočítej délku trámu v metrech.





Výsledek řešení:

1) Vypočítáme obsah průřezu trámu.

2) Vypočítáme délku trámu z jeho objemu.

$$S_1 = 600 \cdot 200 = 120\,000mm^2 = 0{,}12m^2$$
$$S_2 = 450 \cdot 150 = 67\,500mm^2 = 0{,}0675m^2$$
$$S_3 = \frac{150 \cdot 150}{2} = 11\,250mm^2 = 0{,}01125m^2$$
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 0{,}12 + 0{,}0675 + 0{,}01125 = 0{,}19875m^2$$

$$V = S \cdot v$$
$$v = \frac{V}{S} = \frac{1{,}59}{0{,}19875}$$
$$v = 8m$$

Délka trámu s průřezem na obrázku je 8 metrů.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočítej tloušťku ledové kry tvaru hranolu, která vyčnívá 6 cm nad vodou, je-li hustota ledu $\rho = 0{,}92 g \cdot cm^{-3}$. Předpokládejme, že kra má svislé stěny a rovnoběžné podstavy.

[75 cm]

2) Kolik metrů krychlových zeminy je třeba přemístit při výkopu přímého 170 metrů dlouhého vodního příkopu, jehož průřez má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 150 cm a 80 cm a ramenem délky 90 cm?

[$161{,}8\ m^3$]

3) Dřevěný sloup tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky 2 metry a výškou 6 metrů se ohoblováním upraví na sloup, který má tvar pravidelného osmibokého hranolu. O kolik procent se zmenší objem původního sloupu?

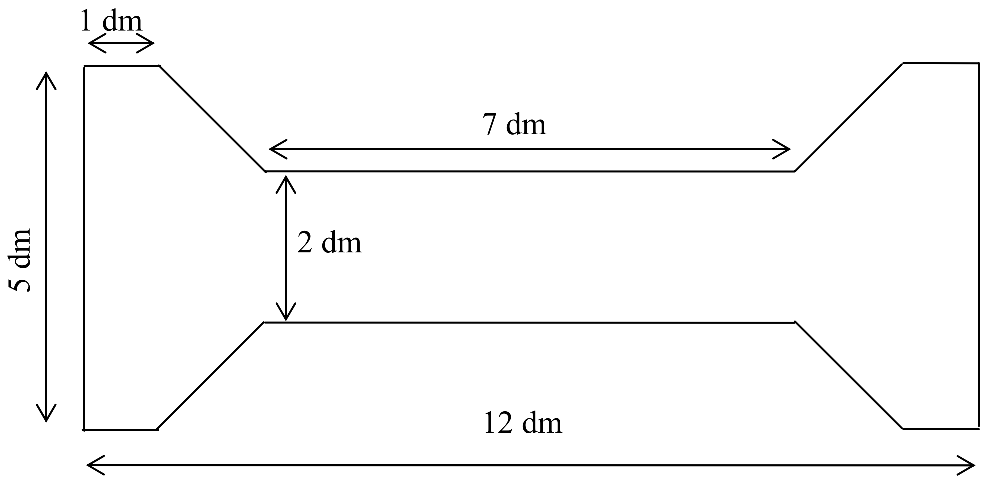
[o 17%]

4) Dřevěný sloup tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou délky 2 metry a výškou 6 metrů se ohoblováním upraví na sloup, který má tvar pravidelného osmibokého hranolu. O kolik procent se zmenší plášť původního sloupu?

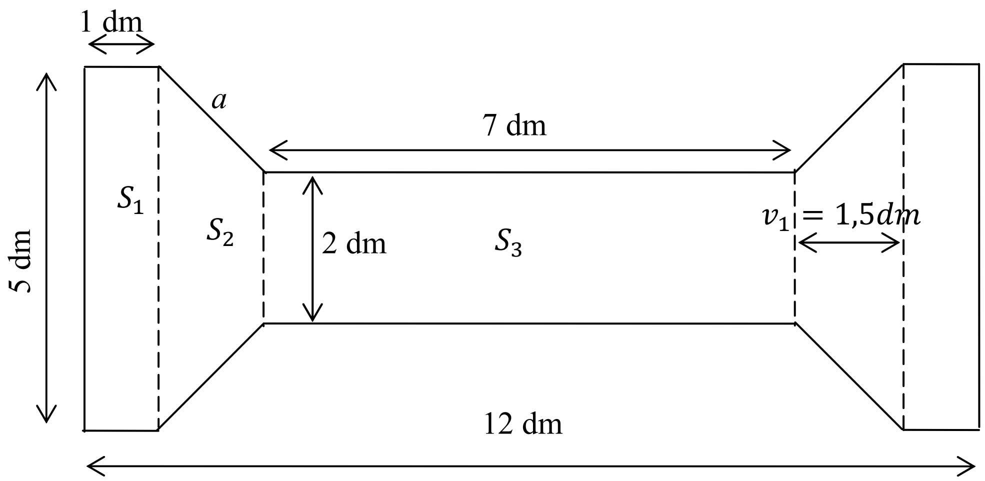
[o 17%]

Varianta C - Povrchy a objemy těles

Vypočítejte povrch pláště železné traverzy, kterou je třeba pozinkovat. Průřez traverzy je na obrázku a její délka je 10 metrů.



Výsledek řešení:



1) Vypočítáme jednotlivé obsahy podstavy.

2) Vypočítáme jednotlivé obsahy pláště.

$S_1 = 5 \cdot 1 = 5dm^2$

$$S_2 = \frac{5+2}{2} \cdot v_1 = \frac{5+2}{2} \cdot 1{,}5 = 5{,}25\ dm^2$$

$$S_3 = 7 \cdot 2 = 14dm^2$$

Celkový obsah průřezu traverzy je

$$S_p = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 + S_3 = 10 + 10{,}5 + 14 = 34{,}5dm^2$$

Obsah pláště:

$$S_1 = 5 \cdot 100 = 500dm^2$$

$$S_2 = 1 \cdot 100 = 100\ dm^2$$

$$a = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2} \doteq 2{,}12dm$$

$$S_3 = 2{,}12 \cdot 10 \doteq 21{,}2dm^2$$

$$S_4 = 7 \cdot 100 = 700\ dm^2$$

Velikost obsahu pláště je:

$$S_{pl} = 2 \cdot S_1 + 4 \cdot S_2 + 4 \cdot S_3 + 2 \cdot S_4 = 1000 + 400 + 84{,}8 + 1400 = 2884{,}8dm^2$$

Celková velikost povrchu traverzy je

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl} = 2 \cdot 34{,}5 + 2884{,}8 = 2953{,}8dm^2 = 29{,}538m^2$$

Pozinkovat bude třeba plochu $30m^2$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

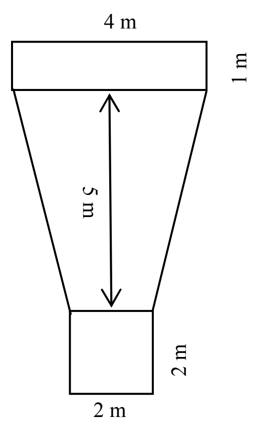
1) Určete objem a povrch pravidelného trojbokého jehlanu, je-li délka podstavné hrany 5 cm a délka boční hrany 12cm.

$[42cm^3;\ 113{,}5cm^2]$

2) Určete objem a povrch pravidelného trojbokého jehlanu, je-li délka podstavné hrany 5 cm a odchylku 30° boční hrany od roviny podstavy.

$[6cm^3;\ 50cm^2]$

3) Násypný koš z ocelového plechu se skládá z plášťů dvou pravidelných čtyřbokých hranolů a pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu. Kolik metrů čtverečního plechu se spotřebuje k jeho zhotovení, jestliže se na záhyby a odpad ve výrobě počítá 10% materiálu?



$[102{,}5m^2]$

4) Cheopsova pyramida je 145 metrů vysoká, její podstavou je čtverec o straně délky 232,7 metrů. Kámen v pyramidě má hustota $\rho = 2{,}7g \cdot cm^{-3}$. Jak vysoká by byla zeď kolem České republiky, měří-li hranice ČR 2 303 km?

$[1{,}9m]$

Objemy a povrchy těles

Objem a povrch rotačních těles

Rotační válec

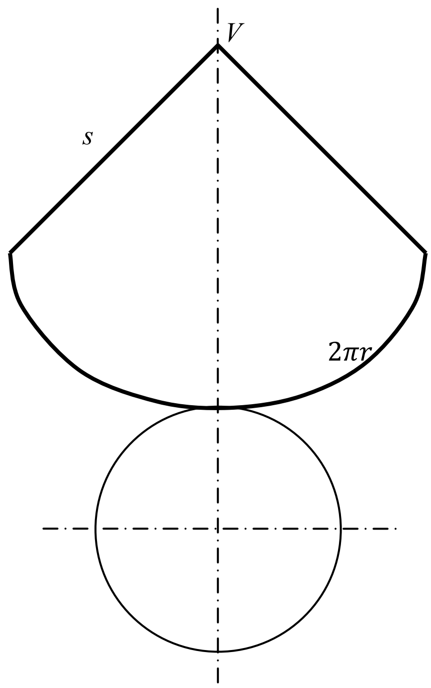
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$$

$$S = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot v = 2\pi r \cdot (r + v)$$

Rotační kužel

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$$

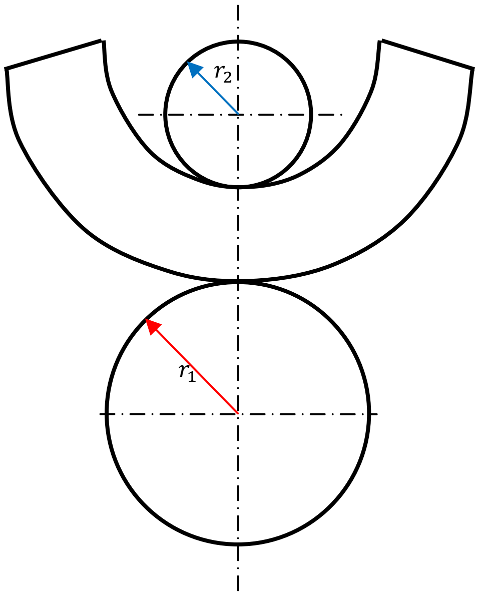
$$S = \pi \cdot r^2 + \pi r \cdot s = \pi r \cdot (r + s)$$



Komolý rotační kužel

$$V = \frac{1}{3}\pi v \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$S = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 + \pi s \cdot (r_1 + r_2)$$



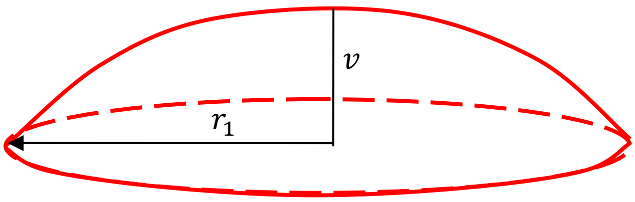
Koule

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$V = 4\pi \cdot r^2$$

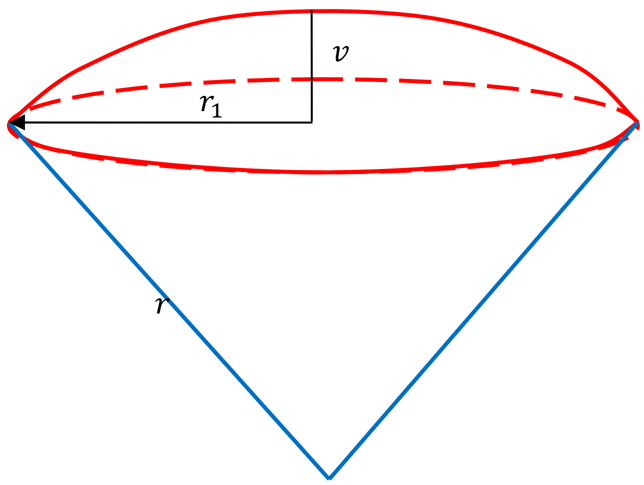
Kulová úseč

$$V = \frac{\pi v}{6} \cdot (3r_1^2 + v^2)$$



Kulová výseč

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot (3r_1^2 + v^2) + \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot (r - v)}{3}$$

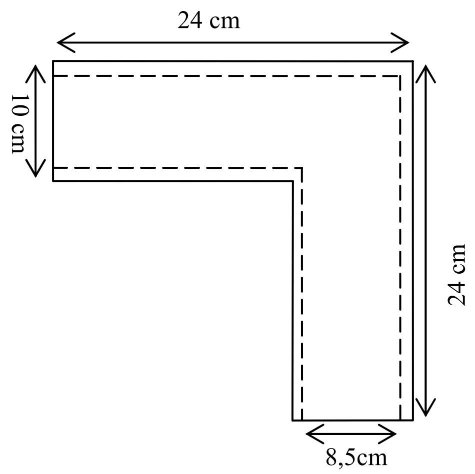


Kulový vrchlík

$$S = 2\pi r \cdot v$$

Varianta A - Povrchy a objemy rotačních těles

Vypočtěte hmotnost a vnitřní objem svařovaného pravoúhlého kolena, kruhového průřezu, jestliže hustota materiálu je $\rho = 7{,}8g \cdot cm^{-3}$. Přídavek na sváření je 2% hmotnosti.

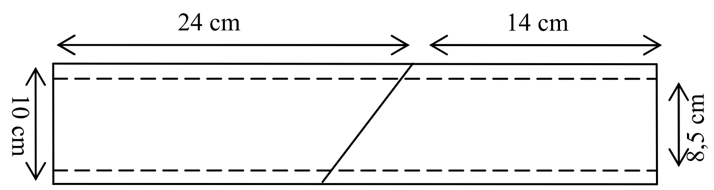


Výsledek řešení:

1) Koleno je složeno ze dvou částí stejného objemu, jejichž objem můžeme určit jako objem roury, válce.

2) Odečteme objemy válce vnitřního V_1 a vnějšího V_2, získáme objem materiálu, vypočítáme jeho hmotnost.

1)



$$V_1 = \pi \cdot 4{,}25^2 \cdot 34 = 1928{,}3525cm^3$$

$$V_2 = \pi \cdot 5^2 \cdot 34 = 2669cm^3$$

Objem materiálu kolena:

$$V = V_2 - V_1 = 2669 - 1928{,}3525 = 740{,}6475 cm^3$$

2)

$$m = \rho \cdot \Delta V$$

$$m = 7{,}8 \cdot 740{,}6475 \doteq 5777 g = 5{,}78 kg$$

$$2\%\ z\ hmotnosti \doteq\ 0{,}115 kg$$

Vnitřní objem kolena je $1928{,}3525 cm^3$

Celková hmotnost kolena včetně svárů je $5{,}78 kg$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočítejte objem šikmo seříznutého rotačního válce s průměrem podstavy 30 cm, mají-li jeho nejdelší a nejkratší strana délky 1,25 m a 1,05 m. $[81{,}3 dm^3]$

2) Hromada písku má tvar rotačního kužele s výškou 3,30 m a obvodem podstavy 18,85 m. Kolik metrů krychlových písku je v hromadě? $[31{,}1 m^3]$

3) Jak velký je středový úhel v rozvinutém plášti rovnostranného kužele?

$[180°]$

4) Vypočítej obsah lampového stínítka tvaru rotačního komolého kužele s průměry podstav 32 cm a 12 cm a výškou 24 cm. Jaký je úhel výseče mezikruží, z něhož stínítko vzniklo?

$[0{,}18 m^2; 138°30']$

Varianta B - Povrchy a objemy rotačních těles

Komín tvaru dutého rotačního komolého kužele má výsku 32 m, dolní průměry 6,4 m a 4 m, horní průměry 3,4 m a 2,4 m. Jaký je jeho celková hmotnost, je-li hustota zdiva $\rho = 1600 kg \cdot m^{-3}$.

Výsledek řešení:

Objem komolého rotačního kužele:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 32 \cdot (3{,}2^2 + 3{,}2 \cdot 1{,}7 + 1{,}7^2) = \frac{32}{3}\pi \cdot (10{,}24 + 5{,}44 + 2{,}89) \doteq 622m^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 32 \cdot (2^2 + 2 \cdot 1{,}2 + 1{,}2^2) = \frac{32}{3}\pi \cdot (4 + 2{,}4 + 1{,}44) \doteq 263m^3$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = 622 - 263 = 359m^3$$

$$m = \rho \cdot \Delta V$$

$$m = 1600 \cdot 359 = 574400kg = 574{,}4t$$

Hmotnost komínu je $574{,}4t$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vědro na vodu je zhotoveno z plechu, má tvar komolého rotačního kužele a nemá víko, průměr dna je 24 cm, průměr okraje 32 cm, strana má délku 30 cm. Kolik váží vědro, jestliže $1m^2$ plechu váží 10,5 kg? Kolik litrů vody se do vědra vejde? [$3{,}25kg$; $18{,}4$ $litrů$]

2) Určete objem a povrch tělesa, které vznikne rotací pravidelného šestiúhelníku se stranou délky 8 cm, kolem přímky, v níž leží delší úhlopříčka šestiúhelníku. [$1{,}6dm^3$; $7dm^2$]

3) Jakou hmotnost má planeta Země, je-li její průměrná hustota $\rho = 5520kg \cdot m^{-3}$?

[$5{,}9 \cdot 10^{24}kg$]

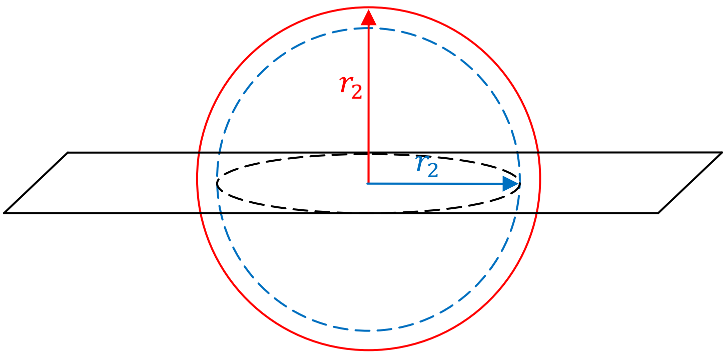
4) Dva rotační válce mají výšky 64 cm a 27 cm. Plášť každého z nich má stejný obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy válců?

[4: 3]

Varianta C - Povrchy a objemy rotačních těles

Dutá železná koule se ponoří do vody svou polovinou. Jaká je tloušťka její stěny, je-li vnější průměr koule 1 metr a hustota železa je $\rho = 7{,}8g \cdot cm^{-3}$?

Výsledek řešení:



Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno hydrostatickou vztlakovou silou, jejíž velikost se rovná tíze kapaliny o stejném objemu jako je objem ponořené části tělesa.

Tzn., že tíha vody, která se objemově rovná polovině objemu koule (s vnitřním poloměrem koule r_2) určuje tíhu celé koule.

1) Vypočítáme objem železné polokoule V_1 a objem koule V.

2) Vypočítáme hmotnost vody, která zaplní tento objem.

3) Velikost této hmotnosti odpovídá hmotnosti pláště železné koule, vypočítáme objem pláště železné koule V_2.

4) Vypočítáme objem vzduchu, který je v kouli $\Delta V = V - V_2$.

5) Z tohoto objemu vypočítáme poloměr r_2. Odečtením vnějšího a vnitřního poloměru, dostaneme tloušťku železného pláště koule.

1)

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi \cdot r_1^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 0{,}5^3 \doteq 0{,}262m^3$$

$$V \doteq 0{,}523m^3$$

2)

$$m = \rho_{voda} \cdot V_1 = 1000 \cdot 0{,}262 = 262kg$$

3)

$$V_2 = \frac{m}{\rho_{železo}} = \frac{262}{7800} \doteq 0{,}034m^3$$

4)

$$\Delta V = V - V_2 = 0{,}523 - 0{,}034 = 0{,}489m^3$$

5)

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta V \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}489 \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = 0{,}489m$$

$$d = r_1 - r_2 = 0{,}5 - 0{,}489 = 0{,}011m = 1{,}1cm$$

Tloušťka železného pláště koule je 1,1 cm.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Jak vysoko muší být letec, má-li vidět jednu tisícinu zemského povrchu?

[12,7 km]

2) Vypočtěte objem a povrch kulové výseče, má-li kulová úseč, která je částí výseče, poloměr podstavy 6 cm a výšku 2 cm.

[$419cm^3; 314{,}16cm^3$]

3) Kolik metrů vlny je v klubku s průměrem 9 cm, jestliže průměr vlákna vlny je 1,5 mm?

[216 m]

4) Kolik kilometrů čtverečních měří mírné pásmo na Zemi, které se rozprostírá mezi 23°27´a 66°18´severní zeměpisné šířky?

[$132{,}4 \cdot 10^6 km^2$]