POSLOUPNOSTI A ŘADY

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově

Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia

Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Posloupnosti a řady

Posloupnosti a jejich vlastnosti

Definice funkce

Funkce na množině $D \subset R$ je předpis, který každému číslu x z množiny D přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina D se nazývá definiční obor funkce.

Definice posloupnosti

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, se nazývá nekonečná posloupnost.

Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$, kde n_0 je pevně dané číslo z N, se nazývá konečná posloupnost.

Rozdílný způsob zápisu u funkce a posloupnosti:

Funkce	Posloupnosti
Hodnota funkce v bodě 3 je 8	hodnota posloupnosti v bodě 3 je 8 $\Rightarrow f_3 = 8$
$\Rightarrow f(3) = 8$	(čteme: třetí člen posloupnosti je 8)
Hodnota funkce v bodě n je	$f_n = 0$ (čteme: n-tý člen posloupnosti je 0)
$\Rightarrow f(n) = 0$	
Zápis funkce: $f: y = 2 + (-1)^n$	Zápis posloupnosti: $(2 + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$

Zápis posloupnosti

1.) **vzorcem pro n-tý člen** ……………………….. např. $(3n)_{n=1}^{\infty}$; $(5n + 2)_{n=1}^{\infty}$

2.) **rekurentně** (v latině *recurrere = vraceti se*)

V posloupnosti jsou dány první člen nebo první členy a vzorec, podle kterého vypočítáme další členy na základě znalosti členů předchozích. Nevýhodou je, že libovolný člen posloupnosti můžeme určit jen tehdy, jestliže známe předcházející členy.

Vlastnosti posloupností

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí:

Je-li $r < s$, pak $a_r < a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $r, s \in N$ platí:

Je-li $r < s$, pak $a_r > a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí**, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n < a_{n+1}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **klesající**, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n > a_{n+1}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **neklesající**, právě když pro všechna přirozená čísla r, s platí:

Je-li $r < s$, pak $a_r \leq a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **nerostoucí**, právě když pro všechna přirozená čísla r, s platí:

Je-li $r < s$, pak $a_r \geq a_s$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **neklesající**, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n \leq a_{n+1}$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **nerostoucí**, právě když pro všechna $n \in N$ je $a_n \geq a_{n+1}$.

Každá rostoucí posloupnost je neklesající.

Každá klesající posloupnost je nerostoucí.

Posloupnosti, které jsou nerostoucí nebo neklesající, se nazývají **monotónní** posloupnosti.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **shora omezená**, právě když existuje reálné číslo h takové, že pro všechna $n \in N$ je $a_n \leq h$.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $n \in N$ je $a_n \geq d$.

Posloupnost se nazývá **omezená**, je-li omezená shora a zároveň zdola.

Posloupnosti a jejich vlastnosti

Varianta A

Vypište prvních sedm členů posloupnosti zadané rekurentně: $a_1 = 5,\ a_n \cdot a_{n+1} = n; n \in R$.

Příklad:

$a_1 = 5$

$a_1 \cdot a_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{5}$

$a_2 \cdot a_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{2}{a_2} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10$

$a_3 \cdot a_4 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{3}{a_3} = \frac{3}{10}$

$a_4 \cdot a_5 = 4 \quad \Rightarrow \quad a_5 = \frac{4}{a_4} = \frac{4}{\frac{3}{10}} = \frac{40}{3}$

$a_5 \cdot a_6 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = \frac{5}{a_5} = \frac{5}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{8}$

$a_6 \cdot a_7 = 6 \quad \Rightarrow \quad a_7 = \frac{6}{a_6} = \frac{6}{\frac{3}{8}} = \frac{48}{3} = 16$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $5; \frac{1}{5}; 10; \frac{3}{10}; \frac{40}{3}; \frac{3}{8}; 16$

Příklady k procvičení:

1.) Vypište prvních sedm členů posloupnosti zadané rekurentně:

$a_1 = 1, a_2 = -1, a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}; n \in N$.

Řešení: $1;\ -1; -1; 1;\ -1;\ -1; 1$

2.) Vypište prvních sedm členů posloupnosti zadané rekurentně:

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 8; n \in N$.

Řešení: $1; 2; 4; 1; 2; 4; 1$

3.) Vypište prvních šest členů posloupnosti dané rekurentně: $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2; n \in R$.

Řešení: $3; 5; 7; 9; 11; 13$

4.) Vypište prvních šest členů posloupnosti dané rekurentně: $a_1 = -3, a_{n+1} = -2a_n; n \in R$.

Řešení: $-3; 6;\ -12; 24;\ -48; 96$

Posloupnosti a jejich vlastnosti

Varianta B

Posloupnost vyjádřenou vzorcem pro n-tý člen $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

***Příklad*:**

$a_1 = 2$

$a_n = \frac{2^n}{n}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{\frac{2 \cdot 2^n}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{\frac{2}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} \cdot a_n$$

$$\boxed{a_1 = 2;\ a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} \cdot a_n}$$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Výsledek řešení: $a_1 = 2;\ a_{n+1} = \frac{2n}{n+1} \cdot a_n$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Posloupnost vyjádřenou vzorcem pro n-tý člen $(n+2)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

Řešení: $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 1$

2.) Posloupnost vyjádřenou vzorcem pro n-tý člen $(2n)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

Řešení: $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2$

3.) Posloupnost vyjádřenou vzorcem pro n-tý člen $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

Řešení: $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$

4.) Posloupnost vyjádřenou vzorcem pro n-tý člen $(n \cdot 2^n)_{n=1}^{\infty}$ vyjádřete rekurentně.

Řešení: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n} \cdot a_n$

Posloupnosti a jejich vlastnosti

Varianta C

Rozhodněte, zda je posloupnost $(n^2+2n+4)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí či klesající.

Příklad:

$$a_n = n^2 + 2n + 4$$

$$a_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1) + 4 = n^2 + 2n + 4 + 2n + 3$$

Posloupnost je rostoucí, protože pro každé $n \in N$ je

$$n^2 + 2n + 4 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 4 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n$$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: Posloupnost je rostoucí.

Příklady k procvičení:

1.) Rozhodněte, zda je posloupnost $(-2n+3)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí či klesající.

Řešení: Posloupnost je klesající.

2.) Rozhodněte, zda je posloupnost $(-n^2+4n-4)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí či klesající.

Řešení: Posloupnost je klesající od druhého členu.

3.) Rozhodněte, zda je posloupnost $\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí či klesající.

Řešení: Posloupnost je rostoucí.

4.) Rozhodněte, zda je posloupnost $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí či klesající.

Řešení: Posloupnost je klesající.

Aritmetická posloupnost

Jde o speciální typ posloupnosti.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Číslo d se nazývá **diference** posloupnosti.

Platí tedy pro každé $n \in N$, že

$$a_{n+1} - a_n = d$$

V aritmetické posloupnosti platí:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_s = a_r + (s-r)d; pro\ všechna\ r, s \in N$$

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tedy pro $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ platí

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Vlastnosti aritmetických posloupností

Aritmetická posloupnost s diferencí d **je rostoucí** pro $d > 0$ a **klesající** pro $d < 0$.

Pro aritmetickou posloupnost s diferencí d platí:

a) je-li $d > 0$, pak je **zdola omezená**, ale není shora omezená.

b) je-li $d < 0$, pak je **shora omezená**, ale není zdola omezená

c) je-li $d = 0$, pak je **omezená shora i zdola**.

Aritmetická posloupnost

Varianta A

Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_4 + a_5 + a_7 + a_8 = 10$$

$$a_{21} : a_1 = 2$$

***Příklad*:**

Vyjádříme všechny členy v soustavě rovnic pomocí prvního členu:

$$a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + 7d = 10$$

$$\frac{a_1 + 20d}{a_1} = 2$$

Po úpravě dostaneme soustavu

$$4a_1 + 20d = 10$$

$$a_1 + 20d = 2a_1$$

Z druhé rovnice plyne, že $a_1 = 20d$, což dosadíme do rovnice první

$$4 \cdot 20d + 20d = 10 \quad \Rightarrow \quad 100d = 10 \quad \Rightarrow \quad d = 0{,}1$$

Dopočítáme první člen

$$a_1 = 20 \cdot 0{,}1 = 2$$

Řešení úlohy tedy je: $a_1 = 2, d = 0{,}1$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $a_1 = 2, d = 0{,}1$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 20, d = 4$. Kolikátý člen je roven číslu 100?

Řešení: 21. člen

2.) Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_1 + a_3 = 2$$
$$a_2 + a_7 = -8$$

Řešení: $a_1 = 3, d = -2$

3.) Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_3 = 2a_4$$
$$a_2 = -a_8$$

Řešení: $a_1 \in R, d = -\frac{a_1}{4}$

4.) Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a_2 - a_1 = 6$$
$$a_{20} - a_{18} = 15$$

Řešení: NŘ

Aritmetická posloupnost

Varianta B

Řešte rovnici s neznámou $x \in N$:

$$5 + 6 + 15 + 16 + 25 + 26 + \cdots + x = 1\,221$$

***Příklad*:**

Na levé straně máme dvě aritmetické posloupnosti (liché členy a sudé členy), obě s diferencí 10. Určíme součet lichých členů

$$s_1 = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$s_1 = \frac{n}{2}(5 + 5 + (n-1)10)$$

Obdobně určíme součet sudých členů

$$s_2 = \frac{n}{2}(6 + 6 + (n-1)10)$$

a dosadíme do původní rovnice

$$\frac{n}{2}(5 + 5 + (n-1)10) + \frac{n}{2}(6 + 6 + (n-1)10) = 1\,221$$

Upravíme

$$\frac{n}{2}(10 + 10n - 10) + \frac{n}{2}(12 + 10n - 10) = 1\,221$$

$$5n^2 + 5n^2 + n = 1\,221$$

$$10n^2 + n - 1\,221 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1\,221)}}{2 \cdot 10} = \frac{-1 \pm \sqrt{48\,841}}{20} = \frac{-1 \pm 221}{20}$$

Neznámá n musí být z množiny přirozených čísel, takže rovnice má pro nás pouze jedno řešení, přicházející v úvahu

$$n = 11$$

Takže x je 22. člen na levé straně, což je jedenáctý člen posloupnosti tvořené ze sudých členů, proto

$$x = a_{11} = a_1 + 10d = 6 + 100 = 106$$

***Příklad*:**

[Varianta A](#)
[Varianta B](#)
[Varianta C](#)

Výsledek řešení: $x = 106$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Řešte rovnici s neznámou $x \in N$:

$$4 + 6 + 8 + \cdots + x = 270$$

Řešení: $x = 32$

2.) Řešte rovnici s neznámou $x \in N$:

$$1 + 6 + 11 + 16 + 21 + 26 + \cdots + x = 970$$

Řešení: $x = 96$

3.) Řešte nerovnici s neznámou $x \in N$:

$$3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 3x \geq 999$$

Řešení: $x \in \{26; 27; 28; \dots\}$

4.) Určete součet všech přirozených čísel, která vyhovují nerovnici

$$\left(12x + \frac{2}{3}\right) \cdot 5 - \frac{5x - 15}{3} < 50(x + 10)$$

Řešení: $x < 59 \quad \Rightarrow \quad s_{58} = 1\,711$

Aritmetická posloupnost

Varianta C

V aritmetické posloupnosti známe třetí člen $a_3 = 18$. Určete podmínku pro diferenci tak, aby platilo $s_9 \leq 150$.

***Příklad*:**

Vyjádříme součet prvních devíti členů

$$s_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9)$$

První člen vyjádříme pomocí třetího členu

$$a_1 = a_3 - 2d = 18 - 2d$$

Devátý člen vyjádříme pomocí třetího členu

$$a_9 = a_3 + 6d = 18 + 6d$$

Dosadíme do součtu

$$s_9 = \frac{9}{2}(18 - 2d + 18 + 6d)$$

Součet má být menší nebo roven 150

$$\frac{9}{2}(36 + 4d) \leq 150$$

$$9(18 + 2d) \leq 150$$

$$18 + 2d \leq \frac{50}{3}$$

$$2d \leq \frac{50}{3} - 18$$

$$2d \leq -\frac{4}{3}$$

$$d \leq -\frac{2}{3}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $d \leq -\frac{2}{3}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Tři čísla, která tvoří tři následující členy aritmetické posloupnosti, mají součet 60 a součin 7 500. Určete tato čísla.

Řešení: 15; 20; 25

2.) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočtenými kořeny vzniklo šest následujících členů aritmetické posloupnosti.

Řešení: 2; 3,2; 4,4; 5,6; 6,8; 8

3.) V aritmetické posloupnosti určete první člen a diferenci, víte-li, že platí:$s_5 = 60 \wedge s_{10} = 170$.

Řešení: $a_1 = 8, d = 2$

4.) V aritmetické posloupnosti je první člen $a_1 = 10$ a diference $d = -2$. Vypočítejte člen, který je roven jedné šestině součtu všech členů předchozích.

Řešení: $a_4 = 4, a_{21} = -30$

Geometrická posloupnost

Jde o další speciální typ posloupnosti.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Platí tedy pro každé $n \in N$, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

V geometrické posloupnosti platí:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}\ pro\ všechna\ r, s \in N$$

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí:

a) je-li $q = 1$, pak

$$s_n = na_1$$

b) je-li $q \neq 1$, pak

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Vlastnosti geometrických posloupností

Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je

a) **rostoucí**, právě když $a_1 > 0, q > 1$ nebo $a_1 < 0, q < 1$

b) **klesající**, právě když $a_1 > 0;\ 0 < q < 1$ nebo $a_1 < 0, q > 1$

Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q

a) **je omezená**, právě když $|q| \leq 1$ nebo $a_1 = 0$

b) **je zdola omezená**, ale není shora omezená, právě když $a_1 > 0, q > 1$

c) **je shora omezená**, ale není zdola omezená, právě když $a_1 < 0, q < 1$

d) **není omezená ani shora**, ani zdola, právě když $a_1 \neq 0, q < -1$

Geometrická posloupnost

Varianta A

Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

$$a_2 \cdot a_3 = 9$$
$$a_2 + a_3 = 10$$

***Příklad*:**

Vyjádříme všechny členy v soustavě pomocí prvního členu

$$a_2 = a_1 \cdot q;\ a_3 = a_1 \cdot q^2$$

a dosadíme do soustavy

$$a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 = 9$$
$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 10$$

Po úpravě

$$a_1^2 q^3 = 9$$
$$a_1(q + q^2) = 10$$

Z druhé rovnice vyjádříme neznámou a_1 a dosadíme do první rovnice

$$a_1 = \frac{10}{q + q^2}$$
$$\frac{100}{(q + q^2)^2} \cdot q^3 = 9$$

Upravíme

$$\frac{100}{q^2(1 + q)^2} \cdot q^3 = 9$$

Po zkrácení dostáváme

$$100q = 9(1 + q)^2$$
$$100q = 9 + 18q + 9q^2$$

Máme kvadratickou rovnici

$$9q^2 - 82q + 9 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{82 \pm \sqrt{(-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{82 \pm 80}{18}$$

Úloha má tedy dvě řešení: $q_1 = \frac{1}{9}$; $a_1 = 81$ nebo $q_1{}' = 9$; $a_1{}' = \frac{1}{9}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $q_1 = \frac{1}{9}$; $a_1 = 81$ nebo $q_1{}' = 9$; $a_1{}' = \frac{1}{9}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

$$a_2 = 1{,}5 \wedge a_5 = 40{,}5$$

Řešení: $a_1 = 0{,}5; q = 3$

2.) Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

$$a_1 + a_2 - a_4 = -110$$

$$a_2 + a_3 - a_5 = -220$$

Řešení: $a_1 = 22; q = 2$

3.) Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, ve které platí:

$$a_8 - a_4 = 360$$

$$a_7 - a_5 = 144$$

Řešení: $a_1 = 3; q = 2 \vee a_1 = -3\,072; q = \frac{1}{2}$

4.) V geometrické posloupnosti je $a_1 = 64, q = \frac{1}{2}$. Kolikátý člen je roven číslu $\frac{1}{32}$?

Řešení: 12. člen

Geometrická posloupnost

Varianta B

Vypočítejte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

$$a_1 = 16;\ a_2 = -4$$

***Příklad*:**

Určíme kvocient geometrické posloupnosti jako podíl druhého a prvního členu

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

Nyní můžeme použít vzorec pro součet členů geometrické posloupnosti

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

do kterého dosadíme

$$s_{10} = 16 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{4} - 1} = 16 \cdot \frac{-\frac{1\,048\,575}{1\,048\,576}}{-\frac{5}{4}} = \frac{64}{5} \cdot \frac{1\,048\,575}{1\,048\,576} = \frac{209\,715}{16\,384}$$

***Příklad*:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledek řešení: $s_{10} = \frac{209\,715}{16\,384}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte součet prvních devíti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

$$a_1 = -8, q = 1$$

Řešení: $s_9 = -72$

2.) Vypočítejte součet prvních jedenácti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

$$a_1 = 2, q = -2$$

Řešení: $s_{11} = 1\,366$

3.) Vypočítejte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ve které platí:

$$a_1 = 6, q = -1$$

Řešení: $s_{10} = 0$

4.) V geometrické posloupnosti známe první člen $a_1 = \frac{1}{64}$ a kvocient $q = 2$. Určete $n \in N$ tak, aby platilo $a_n + a_{2n} = 8\,200$.

Řešení: $n = 10$

Geometrická posloupnost

Varianta C

Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 84 cm. Vypočítejte povrch kvádru, víte-li, že jeho objem je 64 cm^3.

***Příklad*:**

Označme hrany kvádru a, b, c postupně $\frac{a_2}{q}, a_2, a_2 \cdot q$.

Objem kvádru je dán vztahem

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Po dosazení

$$V = \frac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot q = 64 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 4\, cm$$

Součet všech hran kvádru o stranách a, b, c je

$$x = 4a + 4b + 4c$$

Po dosazení

$$x = 4\frac{a_2}{q} + 4a_2 + 4a_2 q = 84$$

Dosadíme $a_2 = 4\, cm$

$$\frac{16}{q} + 16 + 16q = 84$$

Po úpravě

$$16q^2 - 68q + 16 = 0$$

$$4q^2 - 17q + 4 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$q_1 = 4; \; q_2 = \frac{1}{4}$$

Hledané délky hran kvádru jsou: $1\ cm, 4\ cm, 16\ cm$

Můžeme tedy vypočítat povrch podle vzorce

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$S = 2(1 \cdot 4 + 1 \cdot 16 + 4 \cdot 16) = 168\ cm^2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $S = 168\ cm^2$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 10x + 16 = 0$ vložte čtyři čísla tak, aby spolu s vypočítanými kořeny vzniklo šest následujících členů geometrické posloupnosti.

Řešení: $2; 2\sqrt[5]{4}; 2\sqrt[5]{16}; 4\sqrt[5]{2}; 4\sqrt[5]{8}; 8$

2.) V geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 36$ určete kvocient tak, aby platilo:

$$s_3 \leq 252$$

Řešení: $q \in \langle -3; 2 \rangle$

3.) V geometrické posloupnosti platí: $s_6 = 9s_3$. Určete a_1, q.

Řešení: $a_1 \in R \setminus \{0\}, q = 2$

4.) Součet prvních tří členů geometrické posloupnosti je 38, součet následujících tří členů této posloupnosti je $\frac{304}{27}$. Vypočítejte a_1, q, s_6.

Řešení: $a_1 = 18, q = \frac{2}{3}, s_6 = \frac{1\,330}{27}$

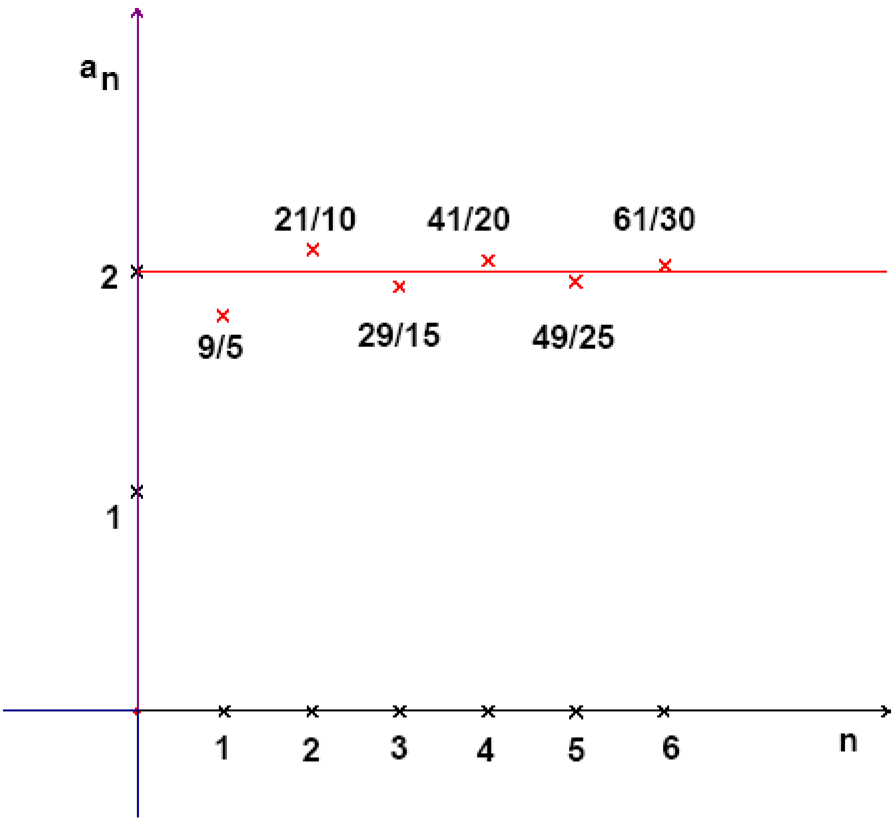
Limita posloupnosti

Pojem limita posloupnosti je dosti náročný, proto si ho objasníme nejprve na příkladu:

Vypište prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{5n} + 2$ a vyznačte jejich obrazy v soustavě souřadnic.

Určíme prvních šest členů dosazením do předpisu posloupnosti za n.

$$a_1 = \frac{9}{5};\ a_2 = \frac{21}{10};\ a_3 = \frac{29}{15};\ a_4 = \frac{41}{20};\ a_5 = \frac{49}{25};\ a_6 = \frac{61}{30}$$



Z obrázku vidíme, že prvních šest členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se stále více přibližuje číslu 2. Lze říci, že se postupně zmenšuje vzdálenost obrazu členů posloupnosti od čísla 2.

Vypočítáme si $|a_n - 2|$ pro prvních šest členů posloupnosti:

$$|a_1 - 2| = \frac{1}{5} \qquad |a_4 - 2| = \frac{1}{20}$$

$$|a_2 - 2| = \frac{1}{10} \qquad |a_5 - 2| = \frac{1}{25}$$

$$|a_3 - 2| = \frac{1}{15} \qquad |a_6 - 2| = \frac{1}{30}$$

Pokusme se dokázat, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 7$ je $|a_n - 2| < \frac{1}{30}$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{5n} + 2 \;\;\Rightarrow\;\; a_n - 2 = (-1)^n \cdot \frac{1}{5n} \;\;\Rightarrow\;\; |a_n - 2| = \frac{1}{5n}$$

Vypočítáme tedy všechna $n \in N$, pro která platí $|a_n - 2| < \frac{1}{30}$

Tedy

$$\frac{1}{5n} < \frac{1}{30} \;\;\Rightarrow\;\; n > 6$$

Pro všechna přirozená čísla $n \geq 7$ je $|a_n - 2| < \frac{1}{30}$.

Zkusme zvolit ještě menší číslo než $\frac{1}{30}$, např. 10^{-4}, a pokusme se najít přirozené číslo n_0 takové, aby pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platilo $|a_n - 2| < 10^{-4}$.

$$|a_n - 2| < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{5n} < 10^{-4}$$

$$5n > 10\,000$$

$$n > 2\,000$$

To znamená, že podmínka je splněna od 2 001. členu.

Je tedy zřejmé, že ať zvolíme jakékoliv kladné reálné číslo ε, vždy najdeme takové $n_0 \in N$, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|a_n - 2| < \varepsilon$.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{5n} + 2$ je **konvergentní** a číslo 2 nazýváme **limita** této posloupnosti. Zapisujeme

$$\lim_{n \to \infty} \left[(-1)^n \cdot \frac{1}{5n} + 2\right] = 2$$

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$.

Číslo a se nazývá limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Zapisujeme

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$$

(čteme: limita a_n pro n jdoucí k nekonečnu je rovna a).

Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají **divergentní**.

Definici limity můžeme vyslovit také takto:

Číslo a se nazývá limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když ke každému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.

Definici konvergence posloupnosti můžeme zapsat také takto:

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když existuje číslo $a \in R$ takové, že platí: Ke každému ε > 0 existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n \in (a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$.

Každá posloupnost má **nejvýše jednu limitu**.

Každá **konvergentní** posloupnost je **omezená**.

Věty o limitách posloupností

1.) Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a přitom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\ ,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

pak je konvergentní i posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

2.) Jestliže posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, pak je divergentní i posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$.

3.) Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnosti, a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\ ,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

pak je konvergentní i posloupnost $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

4.) Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a přitom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ , } \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

pak je konvergentní i posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

5.) Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

pak je konvergentní i posloupnost $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde c je libovolné reálné číslo a platí

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$$

6.) Jsou-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnosti, a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ , } \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

a přitom $b \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in N$, pak je konvergentní i posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

7.) Platí, že $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

<u>Konvergence aritmetických a geometrických posloupností</u>

<u>Aritmetická posloupnost</u>

Aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 0$ jsou konvergentní, aritmetické posloupnosti s diferencí $d \neq 0$ nejsou omezené, proto jsou divergentní.

<u>Geometrická posloupnost</u>

Geometrická posloupnost, ve které je $|q| > 1$, není omezená, a proto není konvergentní. Geometrická posloupnost s kvocientem $q = 1$ je konvergentní, její limita je a_1. Geometrická posloupnost, ve které je $|q| < 1$, je konvergentní a její limita je 0.

Nevlastní limita posloupnosti

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu plus nekonečno**, právě když pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in N$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n > K$.
Zapisujeme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$$

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **nevlastní limitu minus nekonečno**, právě když pro každé reálné číslo L existuje $n_0 \in N$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n < L$.
Zapisujeme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty}$$

Posloupnosti, které mají nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, nepatří mezi konvergentní posloupnosti; jsou to posloupnosti **divergentní**. Pokud tedy používáme pojem *limita*, máme vždy na mysli *vlastní limitu*.

Pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nastane právě jeden z těchto případů:

1.) Posloupnost je konvergentní a její limitou je nějaké reálné číslo a:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

2.) Posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

3.) Posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

4.) Posloupnost je divergentní a přitom nemá ani nevlastní limitu $+\infty$, ani nevlastní limitu $-\infty$.

Limita posloupnosti

Varianta A

Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{3-n}{n}$.

a) vypište prvních devět členů této posloupnosti

b) dokažte, že pro všechna $n \in N$ je $a_n \in (-1;\ 2\rangle$.

c) ověřte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 10$ je $|a_n + 1| < \frac{1}{2}$

d) je-li posloupnost konvergentní, určete její limitu

***Příklad*:**

a) $a_1 = 2;\ a_2 = \frac{1}{2};\ a_3 = 0;\ a_4 = -\frac{1}{4};\ a_5 = -\frac{2}{5};\ a_6 = -\frac{1}{2};\ a_7 = -\frac{4}{7};\ a_8 = -\frac{5}{8};\ a_9 = -\frac{2}{3}$

b) $\frac{3-n}{n} > -1 \quad \wedge \quad \frac{3-n}{n} \leq 2$

$3 - n > -n \quad \wedge \quad 3 - n \leq 2n$

$3 > 0 \quad \wedge\ n \geq 1$ CBD

c) $\left|\frac{3-n}{n} + 1\right| < \frac{1}{2}$

$\left|\frac{3-n+n}{n}\right| < \frac{1}{2}$

$\left|\frac{3}{n}\right| < \frac{1}{2}$

$n > 6$ CBD

d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{n}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} - 1}{1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{0-1}{1} = -1$$

***Příklad*:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

***Příklady k procvičení*:**

1.) Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$. Posloupnost je konvergentní, její limita je 1.

Zvolte $\varepsilon = 1$ a určete všechna $n \in N$, pro která platí $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Řešení: $\forall n \in N$

2.) J e dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$. Posloupnost je konvergentní, její limita je 1.

Zvolte $\varepsilon = 0{,}5$ a určete všechna $n \in N$, pro která platí $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Řešení: $n > 1$

3.) J e dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$. Posloupnost je konvergentní, její limita je 1.

Zvolte $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ a určete všechna $n \in N$, pro která platí $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Řešení: $n > 19$

4.) Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{0{,}5n}$. Ověřte, že pro všechna přirozená čísla $n > 10$ je $|a_n| < 0{,}2$.

Řešení: $\left|\frac{1}{0{,}5n}\right| < 0{,}2 \;\; \Rightarrow \;\; \left|\frac{2}{n}\right| < \frac{1}{5} \;\; \Rightarrow \;\; n > 10$

Limita posloupnosti

Varianta B

Rozhodněte, které z posloupností jsou konvergentní a určete jejich limity.

a) $\left(\frac{5n-3}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\frac{n^2}{5n-3}\right)_{n=1}^{\infty}$ c) $\left(\frac{3n^2+5n-7}{2n^2+6n}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $\left(\frac{5n^3-8n^2+6n}{7n^4+3n}\right)_{n=1}^{\infty}$

***Příklad*:**

a) posloupnost je konvergentní

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}{1}=0$$

b) posloupnost je divergentní

c) posloupnost je konvergentní

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-7}{2n^2+6n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}{2+\frac{6}{n}}=\frac{3}{2}$$

d) posloupnost je konvergentní

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-8n^2+6n}{7n^4+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}-\frac{8}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{7+\frac{3}{n^3}}=0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:a) K; 0. b) D. c) K; $\frac{3}{2}$. d) K; 0.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)$$

Řešení: 3

2.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-\frac{5}{n^2}\right)$$

Řešení: 0

3.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^3}$$

Řešení: 0

4.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-4\right)$$

Řešení: -4

Limita posloupnosti

Varianta C

Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{2n^2-3}$$

***Příklad*:**

V čitateli máme aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 1$, takže určíme její součet.

$$s_n = \frac{n}{2}(1+n)$$

Dosadíme do čitatele

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(1+n)}{2n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{4n^2-6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{4-\frac{6}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\frac{1}{4}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(3n-2)}{(1-n)(2+n)}$$

Řešení: -3

2.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{n^3+2}\right)^3$$

Řešení: 0

3.)Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}+\frac{2n-n^2}{2n^2}\right)$$

Řešení: $\frac{1}{2}$

4.) Vypočítejte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$$

Řešení: $\frac{1}{16}$

Nekonečná geometrická řada

Je dána geometrická posloupnost $(a_n)_1^{\infty}$, pro jejíž koeficient q platí $|q| < 1$. Vytvořme posloupnost $(s_n)_1^{\infty}$ částečných součtů:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

Lze dokázat, že tato posloupnost je konvergentní.

Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$, pak posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ je konvergentní a platí

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}}.$$

Důkaz:

Protože $|q| < 1$, je posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní a její limita je 0. Vypočítáme tedy limitu posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{q-1} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} q^n - \lim_{n\to\infty} 1\right) = \frac{a_1}{q-1} \cdot (0-1) = \frac{a_1}{1-q}$$

Nekonečnou geometrickou řadou se nazývá symbol

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

který se zapisuje též ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a čteme „ suma a_n od n rovno jedné do nekonečna“.

Pokud je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že nekonečná řada $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ je konvergentní, a limitu nazýváme součet nekonečné řady. Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, říkáme, že nekonečná řada je divergentní.

Je-li nekonečná řada konvergentní a je-li její součet roven s, pak zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Symbolem sumy tedy označujeme nejen nekonečnou řadu, ale také její součet, pokud existuje.

Nekonečná geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

ve které $a_1 \neq 0$, je konvergentní, právě když pro její kvocient q platí $|q| < 1$.

Pro součet konvergentní nekonečné geometrické řady platí

$$\boxed{s = \frac{a_1}{1-q}}$$

Nekonečná geometrická řada

Varianta A

Periodické číslo $5{,}4\overline{87}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

***Příklad*:**

Číslo $5{,}4\overline{87}$ můžeme zapsat ve tvaru:

$$54 \cdot 10^{-1} + 87 \cdot 10^{-3} + 87 \cdot 10^{-5} + 87 \cdot 10^{-7} \ldots$$

Uvažujme tedy nekonečnou geometrickou řadu

$$87 \cdot 10^{-3} + 87 \cdot 10^{-5} + 87 \cdot 10^{-7} \ldots$$

čili řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 87 \cdot 10^{-2n-1}$$

Jde o nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = 10^{-2}$. Tato řada je konvergentní ($|q| < 1$) a její součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{87 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{-2}} = \frac{\frac{87}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{87}{990}$$

Takže číslo $5{,}4\overline{87}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{54}{10} + \frac{87}{990} = \frac{5\,433}{990} = \frac{1811}{330}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\frac{1811}{330}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Periodické číslo $0;\overline{8}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

Řešení: $\frac{8}{9}$

2.) Periodické číslo $0,\overline{370}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

Řešení: $\frac{370}{999}$

3.) Periodické číslo $1{,}0\overline{32}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

Řešení: $\frac{511}{495}$

4.) Periodické číslo $25{,}6\overline{7}$ zapište zlomkem v základním tvaru.

Řešení: $\frac{2\,311}{90}$

Nekonečná geometrická řada

Varianta B

Určete, pro která $x \in R$ je nekonečná geometrická řada konvergentní a potom určete její součet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x+4)^{2-3n}$$

***Příklad*:**

Řadu můžeme rozepsat

$$(x+4)^{-1} + (x+4)^{-4} + (x+4)^{-7} + \cdots$$

Kvocient tedy je

$$q = (x+4)^{-3} = \frac{1}{(x+4)^3}$$

Aby byla řada konvergentní, musí platit $|q| < 1$.

$$\left|\frac{1}{(x+4)^3}\right| < 1$$

Najdeme nulový bod absolutní hodnoty $\Rightarrow\ x = -4$

1.) V intervalu $(-\infty;\ -4)$ je výraz v absolutní hodnotě záporný, takže řešíme nerovnici

$$-\frac{1}{(x+4)^3} < 1$$

Jmenovatel na levé straně je záporný, takže při vynásobení nerovnice tímto jmenovatelem musíme změnit znaménko nerovnosti

$$-1 > (x+4)^3$$

$$-1 > x+4 \quad \Rightarrow \quad x < -5 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty;\ -5)$$

2.) V intervalu $(-4;\ \infty)$ je výraz v absolutní hodnotě kladný, takže řešíme nerovnici

$$\frac{1}{(x+4)^3} < 1$$

Jmenovatel na levé straně je kladný, takže při vynásobení nerovnice tímto jmenovatelem neměníme znaménko nerovnosti

$$1 < (x+4)^3$$

$$1 < x+4 \quad \Rightarrow \quad x > -3 \quad \Rightarrow \quad x \in (-3;\ \infty)$$

Řada je tedy konvergentní pro $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-3;\ \infty)$.

Pak můžeme určit její součet

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{x+4}}{1 - \frac{1}{(x+4)^3}} = \frac{(x+4)^2}{(x+4)^3 - 1}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $x \in (-\infty;\ -5) \cup (-3;\ \infty);\ s = \frac{(x+4)^2}{(x+4)^3-1}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete, pro která $x \in R$ je nekonečná geometrická řada konvergentní a potom určete její součet.

$$2 + 4x + 8x^2 + 16x^3 + \cdots$$

Řešení: $x \in \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right);\ s = \frac{2}{1-2x}$

2.) Určete, pro která $x \in R$ je nekonečná geometrická řada konvergentní a potom určete její součet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-2x)^n$$

Řešení: $x \in (0; 1); s = \frac{1-2x}{2x}$

3.) Určete, pro která $x \in R$ je nekonečná geometrická řada konvergentní a potom určete její součet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2logx + 3)^n$$

Řešení: $x \in (0{,}01; 01); s = -\frac{2logx+3}{2logx+2}$

4.) Řešte rovnici s neznámou $x \in R$

$$1 + 3x + 9x^2 + \cdots = 10$$

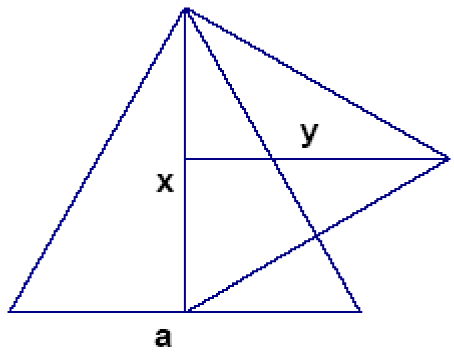
Řešení: $x = 0{,}3$

Nekonečná geometrická řada

Varianta C

Nad výškou rovnostranného trojúhelníka ABC je sestrojen rovnostranný trojúhelník $A_1B_1C_1$, nad jeho výškou je sestrojen rovnostranný trojúhelník $A_2B_2C_2$ atd. Postup se stále opakuje. Jak velký je součet obsahů všech trojúhelníků, má-li strana trojúhelníka ABC délku a?

Příklad:



Výška v trojúhelníku ABC je

$$x = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Obsah tohoto trojúhelníku tedy je

$$S_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}a}{4}$$

Výška v trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je

$$y = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$$

Obsah tohoto trojúhelníku je

$$S_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$$

Určíme kvocient jako podíl obsahů

$$q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}a^2}{16}}{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}} = \frac{3}{4}$$

Pak součet řady je

$$s = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \sqrt{3}a^2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $s = \sqrt{3}a^2$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Do čtverce o délce strany d je vepsána kružnice, do ní je znovu vepsán čtverec, do tohoto čtverce je vepsána opět kružnice atd. Vypočítejte součet obsahů všech takto získaných čtverců.

Řešení: $s = 2d^2$

2.) Vypočítejte délku „nekonečné“ spirály, která vznikne spojením bodů $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ čtvrtkružnicemi. Střed první čtvrtkružnice je v bodě $S_1[0; 0]$, krajní body jsou $A_1[-4; 0]$; $A_2[0; 4]$. Střed druhé čtvrtkružnice je v bodě $S_2[0; 2]$, krajní body jsou $A_2[0; 4], A_3[2; 2]$. Střed třetí čtvrtkružnice je v bodě $S_3[1; 2]$, krajní body jsou $A_3[2; 2]$; $A_4[1; 1]$. Střed čtvrté čtvrtkružnice je v bodě $S_4[1; 1{,}5]$, krajní body jsou $A_4[1; 1]$; $A_5[0{,}5; 1{,}5]$. Tento postup stále opakujeme.

Řešení: $s = 4\pi$

3.) Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry, která se skládá z úseček $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, \ldots$. Souřadnice krajních bodů úseček jsou $B_1[1; 0]$; $B_2[1; 1]$; $B_3[0; 1]$; $B_4[0; 0{,}5]$; $B_5[0{,}5; 0{,}5]$; $B_6[0{,}5; 0{,}75]$; $B_7[0{,}25; 0{,}75]$; $B_8[0{,}25; 0{,}625]$ ...

Řešení: $s = 4$

4.) V daném rovnostranném trojúhelníku ABC o straně $a = 6\ cm$ sestrojte kolmici z vrcholu C na stranu AB, patu kolmice označte B_1. Bodem B_1 veďte rovnoběžku se stranou AC, průsečík této rovnoběžky se stranou BC označte C_1. Patu kolmice z bodu C_1 na stranu AB označte B_2, průsečík strany BC a rovnoběžky se stranou AC vedené bodem B_2 označte C_2. Patu kolmice z bodu C_2 na stranu AB označte B_3, průsečík strany BC a rovnoběžky s AC vedené bodem B_3 označte C_3. Tento postup stále opakujte. Vypočítejte délku „nekonečné“ lomené čáry $ACB_1C_1B_2C_2B_3C_3\ldots$, která vznikne uvedeným způsobem.

Řešení: $12 + 6\sqrt{3}$