

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA PEDAGOGICKÁ  
KATEDRA MATEMATIKY



## Webovská interaktivní sbírka geometrických úloh

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autorka diplomové práce: EVA PATÁKOVÁ

Učitelství matematiky a výpočetní techniky pro 2. st. ZŠ

Vedoucí diplomové práce: RNDr. MIROSLAV LÁVIČKA, Ph.D.

Plzeň, srpen 2005

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma:

*„Webovská interaktivní sbírka geometrických úloh“*

vypracovala samostatně pod odborným dohledem RNDr. Miroslava Lávičky, Ph.D. a s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne 11. srpna 2005

.....

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Seznámení s učebnicí</b>	<b>5</b>
1.1 Použité technologie	5
1.2 Členění učebnice	9
1.2.1 Teoretická část učebnice	9
1.2.2 Rozbor základních konstrukcí	10
1.2.3 Apolloniovy a Pappovy úlohy	11
1.2.4 Interaktivní cvičení	12
<b>2 CabriJava aplety</b>	<b>13</b>
2.1 Ovládání CabriJava apletu	14
2.2 Tvorba CabriJava apletů	14
<b>3 Cinderella</b>	<b>20</b>
3.1 Prostředí programu	21
3.2 Tvorba interaktivních cvičení	22
3.2.1 Vytvoření vzorové konstrukce	22
3.2.2 Vymezení vstupu, řešení a nápověd	23
3.2.3 Export interaktivního cvičení	27
<b>4 Apolloniovy úlohy</b>	<b>29</b>
4.1 Metody řešení Apolloniových úloh	31
4.2 Řešení obecné Apolloniovy úlohy	40
4.3 Vzájemné polohy vstupních prvků	44
<b>5 Uplatnění učebnice v praxi</b>	<b>50</b>
5.1 Seznámení s interaktivní tabulí	51
5.2 Prezentace učebnice na interaktivní tabuli	57

<i>OBSAH</i>	2
5.3 Využití učebnice na různých stupních škol . . . . .	58
<b>Závěr</b>	<b>59</b>
<b>Literatura</b>	<b>60</b>
<b>Seznam obrázků</b>	<b>62</b>
<b>Přílohy</b>	<b>64</b>
<b>A Parametry CabriJava apletů</b>	<b>64</b>
<b>B Popis nástrojů programu Cinderella</b>	<b>65</b>
B.1 Ovládací nástroje . . . . .	65
B.2 Geometrické nástroje . . . . .	66
<b>C Polohy vstupních prvků úlohy kkk</b>	<b>69</b>
<b>Resumé</b>	<b>72</b>

# Úvod

MOTTO:

*„Jak dlouho si ještě můžeme dovolit připravovat dnešní děti ve včerejších školách, s předvčerejšími metodami, na zítřejší problémy?“*

K. RÝDL

Geometrie je předmět vyžadující vysokou míru představivosti studentů. Ne každý však potřebnou představivost má. Mnohdy by stačil jednoduchý pohyb bodů a objektů, kterého na obyčejné tabuli nikdy nemůžeme dosáhnout. Pro tento účel byla vyvinuta dynamická geometrie, tj. geometrie na počítači, ve které je možno konstrukce dynamicky měnit a animovat pohyb prvků.

Cílem diplomové práce je zpracování dynamické učebnice geometrie a sestavení příručky pro uživatele, včetně návodu jak vytvořit vlastní webovskou učebnici s geometrickou tematikou.

Jaká by to však byla učebnice bez úloh k procvičení probrané látky? V současné době je k dispozici pro tvorbu interaktivních cvičení mocný nástroj Cinderella. Program umožňuje vytvořit www stránku, na které má student možnost nabízenými nástroji provádět geometrické konstrukce přímo v okně prohlížeče. Problematikou interaktivních cvičení se budeme zabývat ve třetí kapitole.

Práce podává kompletní přehled použitých technologií při tvorbě webovské učebnice a popisuje její jednotlivé části. Seznamuje s výhodami a nevýhodami aplikací, které byly při sestavování učebnice použity. Dále pojednává o možnosti umístění dynamických konstrukcí na Internet pomocí CabriJava apletů a uvádí konkrétní příklady, na kterých je vysvětlena tvorba apletů použitých v učebnici.

Nedílnou součástí diplomové práce je CD-ROM. Na disku naleznete webovskou učebnici, textovou část diplomové práce a aplikace, které byly použity při tvorbě učebnice.

Jedná se o programy typu freeware (volně šiřitelné) nebo trialware (časově omezené). Čtenář má tak k dispozici všechny potřebné prostředky ke správné funkci učebnice a dostává se mu možnosti vytvořit si vlastní učební materiál.

Webovská učebnice pojednává o Apolloniových a Pappových úlohách. Na úvod se student seznámí s teorií potřebnou k řešení úloh a osvojí si základní konstrukce. Hlavní část obsahuje samotné řešení jednotlivých typů úloh včetně všech fází řešení. Na závěr si student ověří získané poznatky v interaktivních cvičeních.

Apolloniovy úlohy byly zvoleny z důvodu zajímavosti a dostatečné složitosti tohoto tématu. Obecná Apolloniova úloha zaujímá mezi planimetrickými úlohami význačné místo, jelikož její řešení vyžaduje vysokou míru pochopení vztahů a vlastností geometrických objektů. Při jejich řešení v historii bylo objeveno mnoho geometrických pouček. Tato úloha zaujala geometry všech věků a bylo podáno nepřeborné množství způsobů jejího řešení. Obsah učebnice se však omezuje pouze na řešení eukleidovskými prostředky, tj. pomocí kružítka a pravítka.

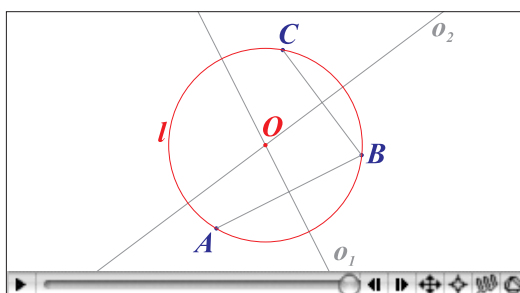
# Kapitola 1

## Seznámení s učebnicí

### 1.1 Použité technologie

V této kapitole jsou uvedeny použité technologie a postupy, které jsou v učebnici použity. Předpokladem pro vytvoření vlastní webové učebnice je základní znalost jazyka HTML, programu Cabri a Cinderella.

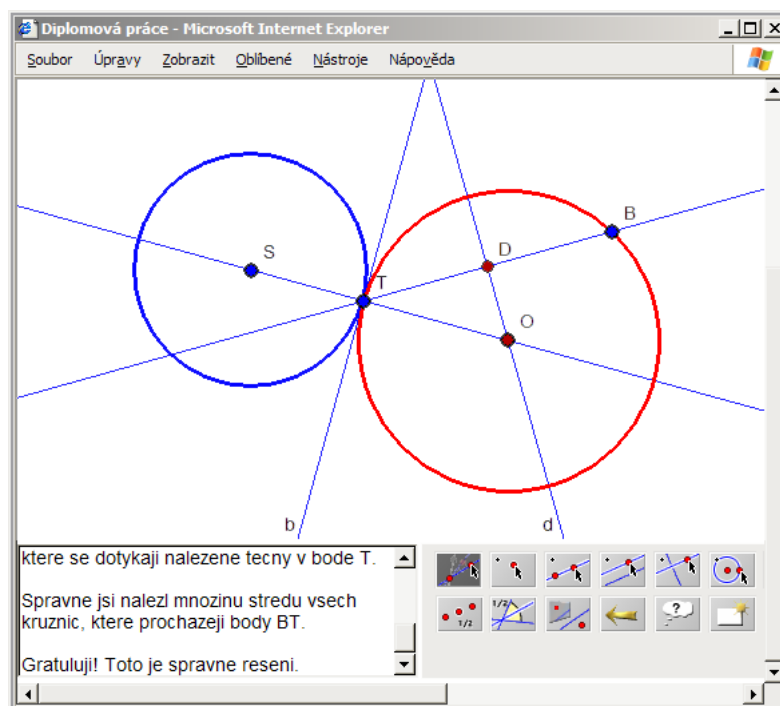
Pro tvorbu interaktivních konstrukcí i statických obrázků byl použit program **Cabri Géomètre II**. Jednotlivé konstrukce jsou do textu vkládány jako **CabriJava aplety** (viz Obrázek 1.1). Jedná se o obrázek, jehož vlastnosti lze dynamicky měnit. Poskytuje možnost automatické animace a krokování konstrukce. Další z výhod CabriJava apletů je možnost jednoduchého umístění do www stránky se zachováním všech již zmiňovaných vlastností. Bližší informace obsahuje kapitola „*Cabri Java aplety*“.



Obrázek 1.1: CabriJava aplet

Dále jsou v učebnici začleněna **interaktivní cvičení** (viz Obrázek 1.2), která byla vytvořena v programu **Cinderella**. Pomocí tohoto programu je možno zhotovit cvičení,

které po umístění do www stránky umožňuje studentovi rýsovat v okně internetového prohlížeče. Konstrukce je programem ihned vyhodnocována a poskytuje studentovi okamžitou zpětnou vazbu o správnosti dosaženého výsledku. Mimo jiné nabízí možnost vyvolání inteligentní nápovědy. Tvorba kvalitního interaktivního cvičení však klade vysoké nároky na autora. Podrobněji se touto tematikou zabývá kapitola „Cinderella“.



Obrázek 1.2: Interaktivní cvičení vytvořené v programu Cinderella

### Matematické texty

Přestože jsou v dnešní době k dispozici kvalitní internetové prohlížeče, je vkládání matematických textů složitým úkolem. Po pečlivém uvážení byl při vytváření učebnice použit **jazyk MathML**<sup>1</sup>. Výhodou je zápis přímo do HTML kódu a korektní zobrazení všech matematických symbolů, výrazů a vzorců. Kód je však velmi složitý, učení nových značek zdouhavé a náročné. Z tohoto důvodu byly vyvinuty speciální aplikace pro generování MathML kódu. Jednou z aplikací pro generování MathML, která byla v práci využita, je program **MathType**<sup>2</sup>. Tvorba matematických textů je v něm velice jednoduchá. Jedná se o rozšíření editoru rovnic aplikace Microsoft Word. Není tedy potřeba se učit pracovat se zcela novým programem.

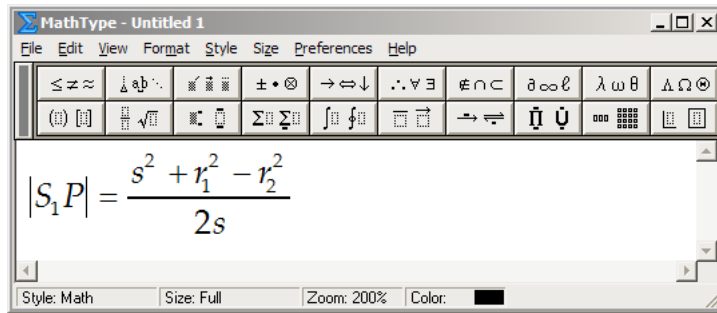
<sup>1</sup>Jazyk MathML je standard matematického značkovacího jazyka. Blíže k tomuto tématu v literatuře [14].

<sup>2</sup>Třicetidenní zkušební verze je k dispozici na <http://www.dessci.com/en/products/mathtype/>.

Následující text popisuje, jak vložit matematický výraz do www stránky

$$|S_1P| = \frac{s^2 + r_1^2 - r_2^2}{2s}.$$

Nejprve je potřeba napsat výraz v programu MathType (viz Obrázek 1.3).



Obrázek 1.3: MathType

V hlavní nabídce *Preferences* → *Translators...* → *Translation to other language (text)* nastavíme *MathML 2.0 (m namespace)*. Poté vybereme vytvořenou rovnici a zkopírujeme. Text se při vkládání do schránky přeloží do jazyka MathML. Nakonec vložíme obsah schránky do kódu HTML.

Vložený text vypadá takto:

```
<m:math display='block'>
<m:semantics>
<m:mrow>
<m:mrow><m:mo>|</m:mo> <m:mrow>
<m:msub>
<m:mi>S</m:mi>
<m:mn>1</m:mn>
</m:msub>
<m:mi>P</m:mi>
</m:mrow> <m:mo>|</m:mo></m:mrow><m:mo>=</m:mo><m:mfrac>
<m:mrow>
<m:msup>
<m:mi>s</m:mi>
<m:mn>2</m:mn>
</m:msup>
<m:mo>+</m:mo><m:msubsup>
<m:mi>r</m:mi>
<m:mn>1</m:mn>
```

```

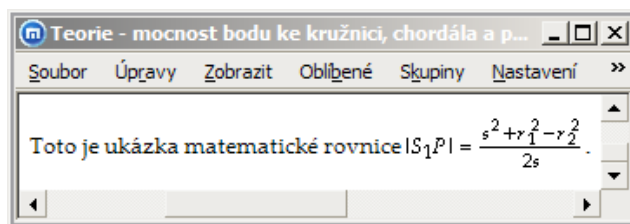
    <m:mn>2</m:mn>
  </m:msubsup>
  <m:mo>&#x2212;</m:mo><m:msubsup>
    <m:mi>r</m:mi>
    <m:mn>2</m:mn>
    <m:mn>2</m:mn>
  </m:msubsup>
</m:mrow>

<m:mrow>
  <m:mn>2</m:mn><m:mi>s</m:mi>
</m:mrow>
</m:mfrac>
</m:mrow>

<m:annotation encoding='MathType-MTEF'>
</m:annotation>
</m:semantics>
</m:math>

```

Zdrojový kód je možno dodatečně upravit. Například pokud je potřeba umístit rovnici přímo do textu (viz Obrázek 1.4), stačí pouze zaměnit značku v prvním řádku `<m:math display='block'>` za `<m:math>`. Parametr `display='block'` provede vysázení rovnice, tj. automatické centrování a oddělení od předcházejícího a následujícího textu svislými mezerami.



Obrázek 1.4: Matematická rovnice na www stránce

Ne všechny prohlížeče www stránek však umí správně interpretovat takto vytvořený kód. Pro správnou funkci je proto potřeba mít nainstalovaný **plugin MathPlayer**<sup>3</sup>. Značnou nevýhodou pluginu je, že ho podporuje pouze Internet Explorer. Z tohoto důvodu je učebnice zkompileována do spustitelného `.exe` souboru. Po otevření takto

<sup>3</sup>MathPlayer naleznete na příloženém CD. Poslední verzi lze bezplatně stáhnout na adrese <http://www.dessci.com/getmp>.

vytvořeného souboru se automaticky spustí prohlížeč založený na jádru Internet Exploreru. Není tedy nutné zabývat se funkčností stránek v jiných www prohlížečích.

Dále jsou uvedeny pouze způsoby použití uvedených technologií v jednotlivých částech učebnice.

## 1.2 Členění učebnice

Učebnice je rozdělena na dvě hlavní části. První část seznamuje s tím, jak vytvořit interaktivní cvičení v programu Cinderella a s přípravou CabriJava apletů. Tato část slouží jako návod pro učitele nebo studenty, kteří by chtěli vytvořit vlastní webovskou učebnici a podává přehled o tom, jak učebnice vznikla. Zároveň poskytuje uživateli nápovědu, jak cvičení a aplety ovládat. Problematika tvorby interaktivních cvičení a přípravy CabriJava apletů je podrobně zpracována v samostatných kapitolách.

Část druhá se zabývá samotným obsahem učebnice. Od teoretického podkladu, přes řešení konkrétních úloh, až po sbírku interaktivních cvičení vztahujících se k probrané látce. V následujících podkapitolách detailně probereme jednotlivé stati.

### 1.2.1 Teoretická část učebnice

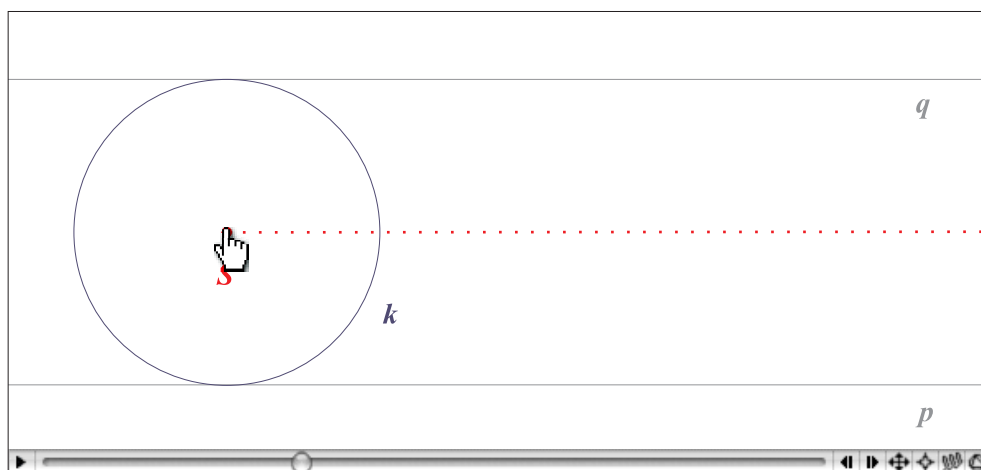
Bez znalosti teorie není možné řešit ani nejzákladnější geometrické úlohy. Proto jsou v této kapitole shrnuty potřebné podklady pro řešení Apolloniových úloh. Jelikož se práce zabývá hlavně tím, jak učebnici vytvořit a ne objevováním nových vět a definic, je text převzat z literatury [6].

Webovská učebnice předpokládá základní geometrické znalosti. Připomíná pouze látku potřebnou pro řešení Apolloniových úloh. Jsou to množiny bodů dané vlastnosti, mocnost bodu ke kružnici, rovnolehlost a kruhová inverze. Při přípravě teoretické části učebnice byly z výše uvedených technologií použity jazyk MathML a CabriJava aplety.

V teoretické části učebnice jsou využity dva typy CabriJava apletů. Jedním typem jsou statické obrázky, které mají pouze funkci ilustrační. Objekty jsou v konstrukci ukotveny a nelze jimi pohybovat, ani zde není animován žádný pohyb.

Druhý typ apletů slouží jako demonstrační. S objekty je možno pohybovat, konstrukci může student krokovat. Zmíněný aplet pomáhá lépe pochopit předloženou látku a vy-

tvořit si konkrétní představu. Např. u podkapitoly „Množiny bodů dané vlastností“<sup>4</sup> má student možnost pohybem příslušného objektu vykreslit hledanou množinu bodů (viz Obrázek 1.5).



Obrázek 1.5: Vykreslení osy pásu pohybem bodu S

### 1.2.2 Rozbor základních konstrukcí


V této části webovské učebnice jsou uvedeny konstrukce, které jsou užity při řešení Apolloniových úloh. Jedná se o základní konstrukce, které by měl mít student před samotným řešením úloh dobře zvládnuty. V průběhu řešení Apolloniových úloh se jimi nebudeme již blíže zabývat. Jedná se o následující konstrukce:

- Tečny z bodu ke kružnici
- Společné tečny dvou kružnic
- Chordála dvou kružnic
- Inverze bodu v kruhové inverzi
- Inverze přímky v kruhové inverzi
- Inverze kružnice v kruhové inverzi
- Převod dvou neprotínajících se kružnic na soustředné

Uvedené konstrukce jsou všechny zpracovány stejným způsobem. Každá z řešených úloh obsahuje zápis konstrukce a grafické provedení. Konstrukční předpis je vytvořen pomocí

<sup>4</sup>V části zabývající se příklady množin středů všech kružnic, které mají danou vlastnost.

jazyka MathML. Výhodou je možnost vkládání hypertextových odkazů přímo do textu (např. hledáme-li MBDV, odkážeme se na *Teorii*, kde je tato látka již zpracována).

Po zápisu následuje samotná konstrukce. Ta je vkládána pomocí CabriJava apletů. Pokud chce student konstrukci shlédnout, spustí ji pomocí tlačítka  na ovládací liště apletu. Pak pouze stačí sledovat automatické krokování. Aplet poskytuje nejen názornou ukázkou konstrukce postupující podle konstrukčního předpisu, ale také možnost do konstrukce zasáhnout. Zásah provedeme změnou polohy vstupních prvků buď před zahájením konstrukce, nebo po jejím dokončení. Můžeme si tak ověřit, za jakých podmínek má daná úloha řešení.

### 1.2.3 Apolloniovy a Pappovy úlohy

Apolloniovy a Pappovy úlohy jsou stěžejním geometrickým bodem této práce. Kapitola podává kompletní řešení všech úloh Pappových a velké části úloh Apolloniových pomocí eukleidovských prostředků, tj. pomocí kružítka a přímého pravítka.

V části *www* učebnice nazvané Pappovy úlohy se v úvodu student seznámí se stručnou historií Pappových úloh. Kapitola je rozdělena na šest podkapitol. V každé z nich je uvedena jedna z těchto šesti úloh nazvaná podle zadaných vstupních prvků. Podkapitoly obsahují kompletní řešení konstrukční úlohy se všemi jeho fázemi (tj. zadání, rozbor, zápis konstrukce, konstrukce, diskuse).

Apolloniovy úlohy jsou zpracovány velmi podobným způsobem. Po úvodu do problematiky Apolloniových úloh je uvedeno 10 základních typů úloh, které jsou podrobně řešeny v jednotlivých podkapitolách. V každé z těchto podkapitol naleznete tabulku *Vzájemné polohy vstupních prvků*, která uvádí systematický přehled všech možných řešení. Tabulka obsahuje vždy polohu zadaných prvků, metodu řešení a počet řešení. U úloh, které mají alespoň jedno jisté řešení, je uveden odkaz na stránku s kompletním vypracováním úlohy.

Tyto *www* stránky mají obdobnou strukturu jako kapitola předchozí (tj. *Pomocné konstrukce*), tudíž je způsob zpracování analogický. Konstrukční předpisy jsou zapsány v jazyku MathML a konstrukce vloženy jako CabriJava aplety.

### 1.2.4 Interaktivní cvičení

Nejzajímavějším, ale zároveň také jedním z nejobtížnějších úkolů je tvorba interaktivních cvičení. Cvičení jsou vytvářena pomocí programu Cinderella. Bližší informace o jejich vzniku podává kapitola *Cinderella*.

Zde je uvedeno pouze několik výhod a nevýhod cvičení. Hlavním důvodem začlenění interaktivních cvičení je poskytnout studentovi možnost ověřit si získané vědomosti. Student si bezprostředně po prostudování úlohy upevní nové znalosti. Pokud si s řešením neví rady, má možnost využít nápovědy. Cvičení mohou sloužit k opakování již dříve probrané látky. Výhodou je jednoduché ovládání vytvořeného cvičení. Tvorba cvičení rovněž není nikterak složitá, prostředí editoru cvičení je intuitivní.

Problém nastává tehdy, chceme-li vytvořit složitější příklad. Nevýhodou je nutnost stanovit pouze jedinou cestu k cíli (vytyčenou nápovědami), i když program nabízí možnost definovat více řešení u nejednoznačně řešitelných úloh. Sestavení hodnotného interaktivního cvičení vyžaduje zkušeného učitele, který dokáže vymezit všechna možná řešení a sestavit kvalitní nápovědy.

# Kapitola 2

## CabriJava aplety

Pro tvorbu konstrukcí a statických obrázků umístěných ve webovské učebnici byl použit program Cabri Géomètre II (v současné době patří mezi nejlepší programy dynamické geometrie). Výhodou tvorby obrázků v Cabri je přesnost konstrukce a možnost dynamicky měnit vlastnosti konstrukce (jedná se především o změnu polohy, tvaru a rozměrů). Oproti standardním vektorovým grafickým programům (např. CorelDraw) se v Cabri při změně vlastnosti sestrojených objektů zachovává základní určenost útvaru, se kterou byl objekt vytvořen. Základní určeností je definovaný typ objektu (přímka, vektor, mnohoúhelník, kuželosečka) a vztahy k dalším objektům, na jejichž základě byl nový objekt definován (kolmice, rovnoběžka, střed úsečky, apod.). Je proto možné dodatečně upravit narýsovanou konstrukci pouhým pohybem několika bodů a není potřeba celý obrázek vytvářet znovu.

Jedním z hlavních důvodů využití programu Cabri je možnost jednoduchého umístění konstrukce na www stránky. K tomuto účelu byl vytvořen software **CabriJava**, který je založen na jazyku Java<sup>1</sup>. Díky aplikaci CabriJava si obrázky umístěné na Internetu (předem vytvořené v programu Cabri) zachovávají všechny dynamické vlastnosti. Tvorba apletu je jednoduchá a zvládne ji téměř každý, je potřeba mít pouze základní zkušenosti s programem Cabri a ovládat základy jazyka HTML. Předpokládáme, že čtenář požadované znalosti již má<sup>2</sup> a zmíníme pouze ovládání a vlastní vytvoření CabriJava apletů.

---

<sup>1</sup>Objektově orientovaný programovací jazyk nezávislý na platformě.

<sup>2</sup>Znalosti si je možno doplnit z [http://www.pf.jcu.cz/p-mat/texty/vrba/manual\\_CabriPlus.pdf](http://www.pf.jcu.cz/p-mat/texty/vrba/manual_CabriPlus.pdf) nebo na <http://pf.jcu.cz/cabri/kurz>.

## 2.1 Ovládání CabriJava apletu









Nejprve si popíšeme ovládání CabriJava apletů. Jak jsme se již zmínili, CabriJava je prostředkem pro umístění obrázku vytvořeného v Cabri na www stránku. Na rozdíl od Cabri však neumožňuje geometrické objekty editovat (není k dispozici standardní nabídka nástrojů Cabri). S objekty můžeme pouze pohybovat, měnit jejich velikost a polohu, při zachování všech dynamických vlastností Cabri (pokud jsou tyto funkce povoleny).

Otevřeme-li internetovou stránku s apletem, nejprve se zobrazí předdefinovaný prostor, do kterého se následně načte Cabri soubor. Vzhled a možnosti práce s apletem jsou nastaveny ve zdrojovém HTML kódu stránky<sup>3</sup>. K dispozici může být také ovládací lišta (viz Obrázek: 2.1), kterou je možno zobrazit či skrýt dvojklikem na obrázek (pokud tato funkce není zakázána). Dále je možné v již hotovém apletu nastavit jazyk uživatelského prostředí kliknutím na obrázek a současným stiskem klávesy *Alt*<sup>4</sup>.



Obrázek 2.1: Ovládací lišta CabriJava apletu

Ovládací lišta má následující funkce:

-  Animace krok za krokem
-  Volba kroku konstrukce
-  Krok zpět
-  Krok vpřed
-  Přesun obrázku
-  Stopa ano/ne
-  Pohyb objektů
-  Stažení obrázku Cabri

## 2.2 Tvorba CabriJava apletů

Naskytují se dvě možnosti začlenění CabriJava apletu do www stránky. Buď přímým zápisem HTML kódu nebo pomocí aplikace CabriWeb<sup>5</sup>. Software **CabriWeb** umožňuje

<sup>3</sup>Bližší k editaci apletu v následující podkapitole „*Tvorba apletů*“.

<sup>4</sup>Na výběr je 'ca', 'cz', 'de', 'en', 'es', 'fr', 'it', 'nl', 'nn', 'no', 'pl', 'pt', 'sk', 'sv'.

<sup>5</sup>Bezplatně ke stažení na <http://www.cabri.net/cabrijava/CabriWeb.jar.zip>.

automaticky vygenerovat www stránku s CabriJava apletem podle námi nastavených parametrů. Jsou to například velikost apletu, umístění nárysny, barva pozadí, barva a tloušťka ohraničení, nastavení pružiny, zanechání stopy apod. V takto vytvořeném souboru se již nemusíme zabývat jeho HTML strukturou, stačí jen vygenerovanou www stránku umístit na Internet.

Podrobněji probereme pouze první, o něco obtížnější, variantu tvorby www stránky s apletem, tj. **přímý zápis HTML kódu**. Výchozím krokem je vytvoření konstrukce pomocí programu Cabri Géomètre II. Důležité je připravit HTML soubor s doprovodným textem, do kterého budeme aplet vkládat a opatřit si soubor *CabriJava.jar*<sup>6</sup>, který obsahuje všechny soubory CabriJavy potřebné ke správné funkci apletu.

Dalším krokem je vlastní editace zdrojového HTML kódu. Nejprve do zdrojového kódu www stránky přidáme následující řádky:

```
<applet code="CabriJava.class" archive="CabriJava.jar" width=300 height=200>
<param name="file" value="jmeno_obrazku.fig">
</applet>
```

Tento kód je nutným minimem pro správnou funkci apletu. Po spuštění prohlížeče se při načítání stránky nalezne ve zdrojovém HTML kódu párová značka `<applet>`, která zajistí nahrání zadaného obrázku z webovského serveru a spustí jej. Zmíněná značka umožňuje předání informace o apletu (název, velikost vyhrazeného prostoru, umístění vzhledem k ostatnímu textu apod.), ale o tom se zmíníme až později.

Nejprve si vysvětlíme parametry Javy<sup>7</sup>. Mezi povinné patří `CODE`, který označuje kód vykonaný po načtení apletu. V našem případě je to *CabriJava.class* (důležité je dodržet velká a malá písmena v názvu). Dále jsou to parametry `WIDTH` a `HEIGHT`, které určují velikost apletu (udává se v obrazových bodech).

Z volitelných parametrů Java apletů jsou na výběr:

- `CODEBASE` cesta ke složce, ve které je umístěn soubor *CabriJava.jar* (je-li *CabriJava.jar* ve stejné složce jako HTML soubor, v němž je umístěn aplet, nemusí se parametr uvádět)
- `ARCHIVE` název souboru s kódem potřebným ke spuštění apletu
- `ALIGN` zarovnání apletu na stránce `top`, `bottom`, `middle`, `left`, `right` (nahoru, dolů, na střed, vlevo, vpravo) - zarovnání apletu vůči textu

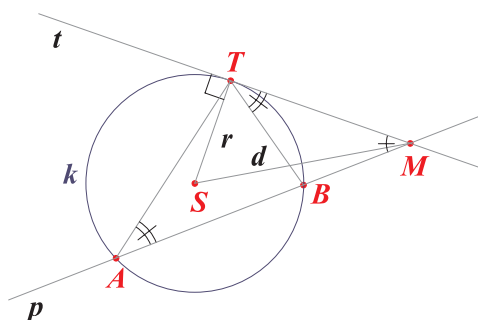
<sup>6</sup>Ke stažení na <http://www.cabri.net/cabrijava/CabriJava.jar.zip>.

<sup>7</sup>Parametry ve značce `<applet>`.

Tím jsme vyčerpali možné parametry Javy. CabriJava má též několik povinných a nepovinných parametrů, které se zapisují do nepárové značky `<param>` umístěné v párové značce `<applet></applet>`.

Povinnými parametry CabriJavy jsou `lang`, který určuje jazyk uživatelského prostředí ('ca', 'cz', 'de', 'en', 'es', 'fr', 'it', 'nl', 'nn', 'no', 'pl', 'pt', 'sk', 'sv') a `file`, udávající název a cestu ke Cabri souboru. Hodnotu "jmeno\_obrazku.fig" přepíšeme názvem `.fig` souboru, který chceme na www stránku umístit. Výčet volitelných parametrů je uveden v „Příloze A“. Podrobněji zmíníme pouze ty, které byly využity při tvorbě apletů.

Jedním z CabriJava apletů použitých ve webovské učebnici je vložení konstrukce jako statického obrázku (viz Obrázek: 2.2). Aplety pro vložení ilustračních obrázků jsou umístěny v teoretické části učebnice, kde není žádoucí možnost pohybu objekty ani zobrazení ovládací lišty.



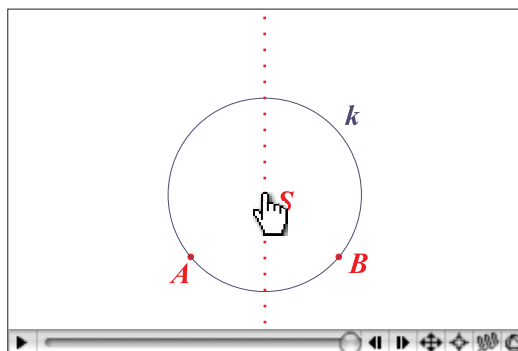
Obrázek 2.2: CabriJava aplet – statický obrázek

Zdrojový kód:

```
<applet code="CabriJava.class" archive="fig/cabrijava.jar" width=500 height=160>
<param name=file value="fig/mocnost_02.fig">
<param name=lang value="cz">
<param name="controller" value="false">
<param name="border" value=0>
</applet>
```

Mimo již uvedené parametry přidáme do zdrojového HTML kódu parametry `controller` a `border`. Parametr `border` udává tloušťku ohraničení apletu. V našem případě je nastavena hodnota `value=0`, rámeček bude mít nulovou tloušťku (bez ohraničení). Druhý parametr poskytuje informaci o zobrazení ovládací lišty. Pokud je nastavena hodnota `false`, není možno lištu zobrazit. Při vytváření `.fig` souboru nesmíme zapomenout na ukotvení klíčových bodů.

Další možností využití apletu je vložení demonstračního obrázku, ve kterém lze hýbat vybranými body, ostatní objekty jsou opět ukotveny již ve zdrojovém souboru. Definované body při pohybu zanechávají stopu, která vytváří hledanou množinu (viz Obrázek: 2.3). Pro zdůraznění dynamiky konstrukce je zobrazena ovládací lišta, kterou lze skrýt dvojklikem v okně apletu. Uvedené aplety jsou použity v teoretické části webovské učebnice<sup>8</sup>.



Obrázek 2.3: CabriJava aplet – demonstrační obrázek

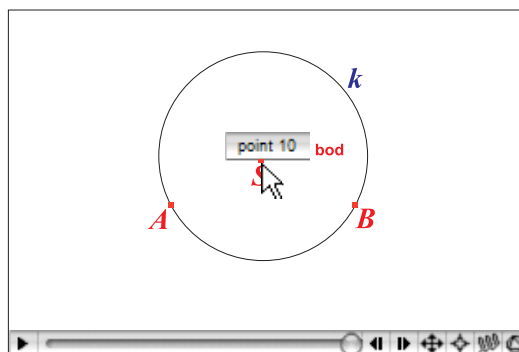
Zdrojový kód:

```
<applet code="CabriJava.class" archive="fig/cabrijava.jar" width=300 height=200>
<param name=file value="fig/mbdv_osaus.fig">
<param name=lang value="cz">
<param name="autocontrol" value="true">
<param name="trace" value="point 10">
<param name="border" value=1>
</applet>
```



Do zdrojového HTML kódu přidáme, kromě již uvedených, parametry `autocontrol` a `trace`. Parametr `autocontrol` slouží pro zobrazení ovládací lišty. Výchozí je nastavena hodnota `value="false"`, změním-li ji na `true`, nastavíme zobrazení ovládací lišty při spuštění apletu. Parametrem `trace` určíme body, které budou zanechávat při pohybu stopu. Nejprve musíme zjistit referenční název tohoto objektu<sup>9</sup>, ten zobrazíme kliknutím na objekt při současném stisku klávesy *Alt* (viz Obrázek: 2.4), ovládací lišta musí být zobrazena. Pokud bychom chtěli vykreslovat více stop, uvedeme do hodnoty `value` všechny objekty, které mají stopu zanechávat (např. `value="point 10 item 6"`).

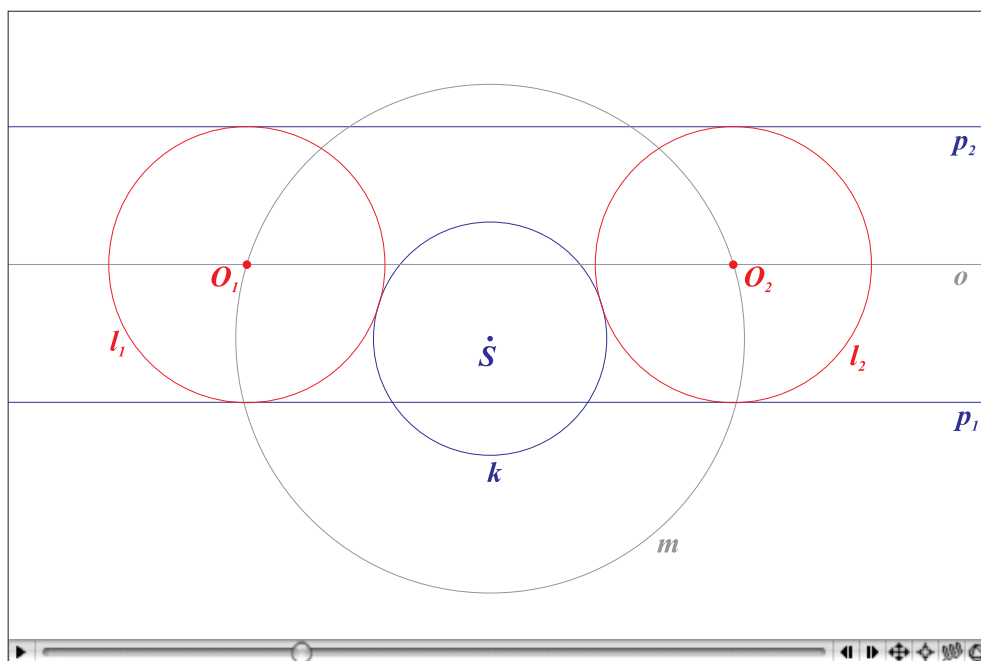
<sup>8</sup>Stejně jako předchozí typ apletu.

<sup>9</sup>Referenční název je odlišný od názvu, který se zobrazuje při umístění kurzoru nad objekt v okně apletu. Bude použit pro interní potřebu CabriJavy.



Obrázek 2.4: Zobrazení referenčního názvu objektu

Posledním a ve webovké učebnici také nejvíce používaným apletem je automaticky krokovaná dynamická konstrukce. Ta poskytuje studentovi nejen možnost shlédnout animaci konstrukce krok za krokem<sup>10</sup>, ale i průběh konstrukce dynamicky měnit. Po nahrání stránky s apletem se načte vymezený prostor pro konstrukci s ovládací lištou a v něm výchozí (zadané) objekty. Student má možnost buď spustit animaci najednou tlačítkem  nebo prohlížet jednotlivé kroky konstrukce tlačítkem . Pokud je zvolena automatická animace, její průběh se zastaví vždy, ocitne-li se kurzor mimo obrázek.



Obrázek 2.5: CabriJava aplet – automaticky krokovaná dynamická konstrukce

<sup>10</sup> Animace jednotlivých kroků konstrukce podle konstrukčního předpisu.

Zdrojový kód:

```
<applet code="CabriJava.class" archive="fig/cabrijava.jar" width="600" height="400">
<param name="file" value="fig/ppk_1c.fig">
<param name=lang value="cz">
<param name="autocontrol" value="true">
<param name="step" value="circle 14">
<param name="loop" value="false">
</applet>
```

Mezi parametry, které zde byly použity patří `step` a `loop`. Pomocí parametru `step` definujeme poslední objekt, který se ještě zobrazí po nahrání apletu<sup>11</sup>. V našem příkladě je to kružnice  $k$ , referenční název je `value="circle 14"`. Parametr určuje, v jakém stádiu rozpracování se konstrukce po načtení `www` stránky zobrazí. K tomu, aby měl student možnost spustit konstrukci sám a nespouštěla se konstrukce samovolně, slouží parametr `loop`. Nastavením hodnoty `value` na `false`, tak automatickou animaci po spuštění zakážeme. S těmito aplety se můžete setkat hlavně při konkrétním řešení Apolloniových a Pappových úloh a v části zabývající se pomocnými konstrukcemi.

---

<sup>11</sup>Ostatní objekty se zobrazují až stiskem tlačítka  nebo  na ovládací liště.

# Kapitola 3

## Cinderella

Od roku 1992 Jürgen Richter-Gebert a Ulrich Kortenkamp z Zürichu spolupracují na vývoji programu Cinderella, který prošel několika významnými fázemi proměny. V srpnu 1996 bylo učiněno odvážné rozhodnutí postavit Cinderellu na jazyce Java<sup>1</sup>, který v té době byl teprve v počátcích. Java se rozvinula v multiplatformní jazyk, jehož možnosti se neustále rozšiřují. Díky tomu může být software používán na jakémkoli počítači bez ohledu na operační systém. Ke spuštění javové aplikace je potřeba pouze tzv. Java Runtime Environment<sup>2</sup>. Z toho vyplývá i výhoda, kterou je jednoduchý export konstrukce do webové stránky. Oproti Cabri již není potřeba žádný doplňkový software k vytvoření apletu. Dalšími nadstandardními funkcemi je např. možnost tisku do Post-Scriptu, či zvolení modelu jiné než eukleidovské geometrie. Tyto vlastnosti však nejsou náplní práce, proto se jimi nebudeme blíže zabývat.

Na druhou stranu má aplikace i řadu nevýhod, mezi něž patří nezvyklé uživatelské prostředí, složitost nastavení vzhledu objektů (na rozdíl od klasických programů dynamické geometrie jako je Cabri) a cizojazyčné prostředí. Ovládání je také složitější a nenabízí tolik služeb (např. zcela chybí možnost výpočtů, nelze zobrazit název kružnice aj.). Proto není Cinderella příliš výhodná pro tvorbu ilustračních obrázků či demonstračních apletů.

Dobře využitelnou funkcí ve vyučování je export HTML stránky s interaktivním cvičením<sup>3</sup>. Interaktivní cvičení spojuje možnost číst průvodní text a současně provádět

---

<sup>1</sup>Na jazyce Java jsou založeny také CabriJava aplety.

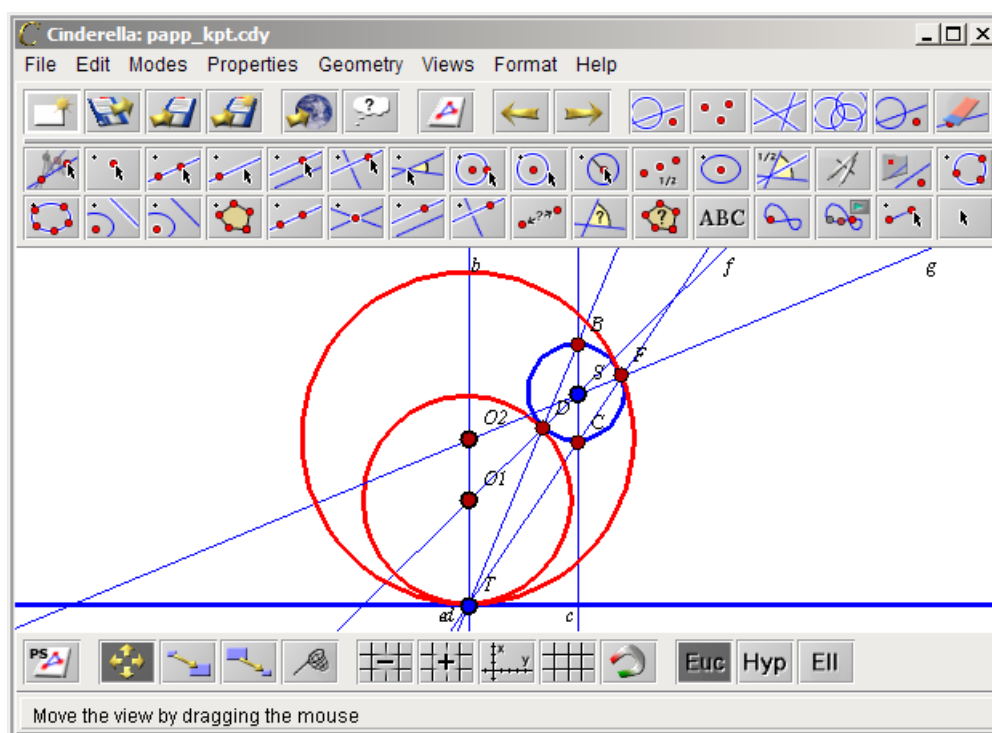
<sup>2</sup>JRE je vyvíjen firmou Sun Microsystems, která jej nabízí bezplatně ke stažení na <http://java.sun.com>.

<sup>3</sup>Interaktivní cvičení vytvořená v programu Cinderella byla využita ve webovské učebnici.

konstrukce, obdobně jako ve vlastním programu dynamické geometrie, prostřednictvím předdefinovaných nástrojů. Studenti tak mohou řešit úlohy každý na svém počítači přímo v prostředí Internetu. Každému se tím dostává možnost přijít na řešení samostatně (v rámci svých schopností a znalostí) nebo pomocí nápověd. Cinderella automaticky rozhoduje o správnosti řešení a neomezuje studentovu činnost, tím podporuje rozvoj kreativního myšlení.

### 3.1 Prostředí programu

Po spuštění programu se na ploše monitoru objeví klasické okno, pro které je charakteristické běžné prostředí, na které jsme zvyklí z aplikací pod operačním systémem Windows (viz Obrázek 3.1).



Obrázek 3.1: Prostředí programu Cinderella

Pod záhlavím okna je textová nabídka a šest sad ikon. Na ikonách jsou zobrazeny nástroje, které jsou v aplikaci k dispozici pro práci s konstrukcí (práce se soubory, tisk, export, zpět/vpřed, výběr a vytváření objektů). Výběr požadovaného nástroje se

provede kliknutím na příslušnou ikonu. V zápatí okna<sup>4</sup> se při výběru nástroje vypíše krátká nápověda.

Ně největší část zabírá rýsovací plocha, na které lze vytvářet konstrukce. Primárně je nastaveno šedé pozadí, které lze libovolně měnit, stejně jako vzhled objektů, v editoru vzhledu („*Edit Appearance*“). Pod rýsovací plochou se nalézá ještě několik nástrojů k PostScriptovému tisku a k práci s nárýsnou. Veškeré nástrojové lišty lze skrýt dvojklikem na panel s nástroji. Vlastnosti a funkce jednotlivých nástrojů jsou podrobně zpracovány v „*Příloze B*“<sup>5</sup>. Podrobným popisem prostředí a práce s programem se zde ovšem nebudeme zabývat, tyto informace naleznete v literatuře [11].

## 3.2 Tvorba interaktivních cvičení

Sestavení kvalitního cvičení je mnohem složitější než vytvoření interaktivní konstrukce. Samotný export je snadný, aby však interaktivní cvičení měla také hodnotu vzdělávací, musí mít tvůrce zkušenosti s geometrií, Cinderellou a vyučováním. Tvorbu cvičení rozdělíme do tří základních kroků: vytvoření vzorové konstrukce; vymezení vstupu, řešení a nápověd; vlastní export interaktivního cvičení.

### 3.2.1 Vytvoření vzorové konstrukce

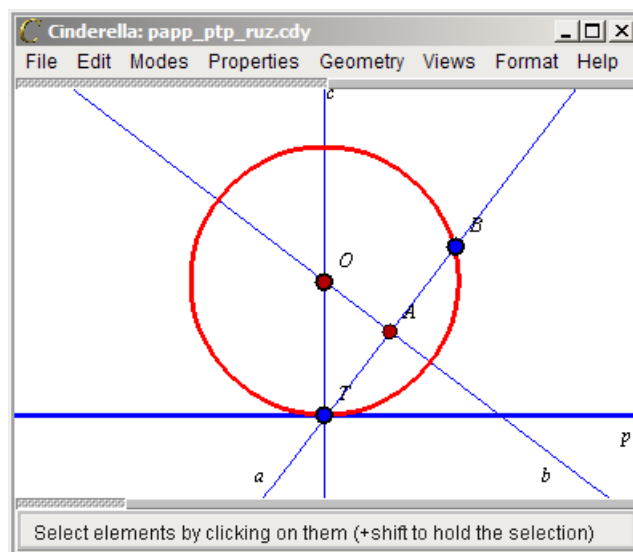
Není možné vytvořit cvičení, aniž bylo předem vyřešeno, což s sebou přináší některé technické obtíže. Velmi důležité je mít představu o všech možných řešeních a komplikacích, které mohou v průběhu konstrukce nastat, jelikož ke kontrole správnosti řešení Cinderella použije předem vytvořenou konstrukci.

Předtím než začneme s tvorbou interaktivního cvičení, je třeba sestojit vzorovou konstrukci (viz Obrázek 3.2). Zde uvedeme jednu z Pappových úloh typu  $p_TB$ : *Sestojte kružnici  $l$ , která se dotýká dané přímky  $p$  v daném bodě  $T$  a prochází dalším daným bodem  $B$ .*

---

<sup>4</sup>na místě stavového řádku


<sup>5</sup>Příloha obsahuje volný překlad části manuálu týkající se nástrojových sad.



Obrázek 3.2: Vzorová konstrukce


### 3.2.2 Vymezení vstupu, řešení a nápověd

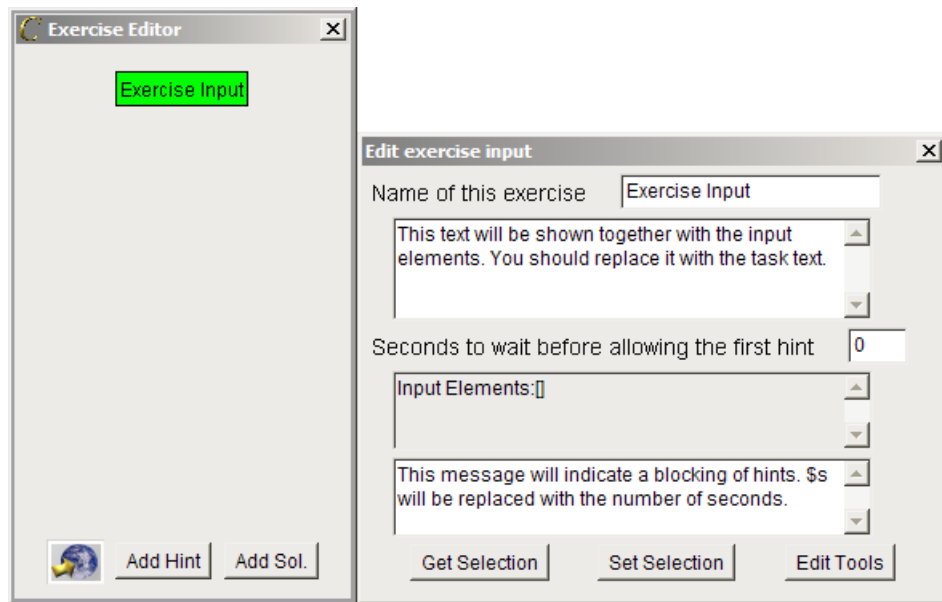
#### Vymezení vstupu

Po sestavení vzorové konstrukce otevřeme tlačítkem  na panelu nástrojů nebo z nabídky soubor – editor cvičení („*Exercise Editor*“). Dvojklikem na „*Exercise Input*“ se zobrazí editor vstupu („*Edit exercise input*“). Na ploše budou v tomto okamžiku dvě dialogová okna (viz Obrázek 3.3).

Texty v editoru vstupu změníme následovně. Jméno cvičení („*Name of this exercise*“) přepíšeme na 'Zadání pTB' (slouží pouze jako referenční, nebude zobrazeno v konečném cvičení). První text nahradíme zněním úlohy: 'Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká přímky  $p$  v bodě  $T$  a prochází dalším bodem  $B$ .', po spuštění cvičení se text zobrazí jako zadání pro studenty.

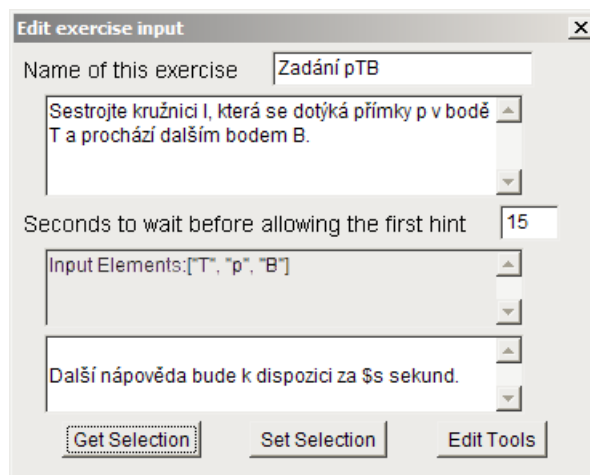
Později vytvoříme nápovědy, které povedou studenty ke správnému řešení úlohy. Pro nastavení doby, za kterou se zobrazí první nápověda po zadání úlohy, zvolíme v poli „*Seconds to wait before allowing the first hint*“ 15 sekund. Následující pole obsahuje zprávu, která se vypíše, pokud student požaduje nápovědu dříve než uplyne stanovený čas. Řetězec  $\$s$  bude zaměněn počtem sekund udávajících dobu, za kterou má student k dispozici další nápovědu.

Doposud jsme nestanovili výchozí zadané prvky konstrukce. Nástrojem výběr  vybereme v hlavním okně s konstrukcí dané prvky – přímky  $p$ ,  $q$  a bod  $T$ . Vstup



Obrázek 3.3: Editor cvičení

definujeme tlačítkem proved' výběr („*Get Selection*“) v editoru vstupu. Objekty  $p$ ,  $T$  a  $B$  se zobrazí v poli vstupní prvky („*Input Elements*“). Tímto máme hotové vymezení vstupu cvičení (viz Obrázek 3.4) a editor vstupu již můžeme zavřít.



Obrázek 3.4: Editor vstupu

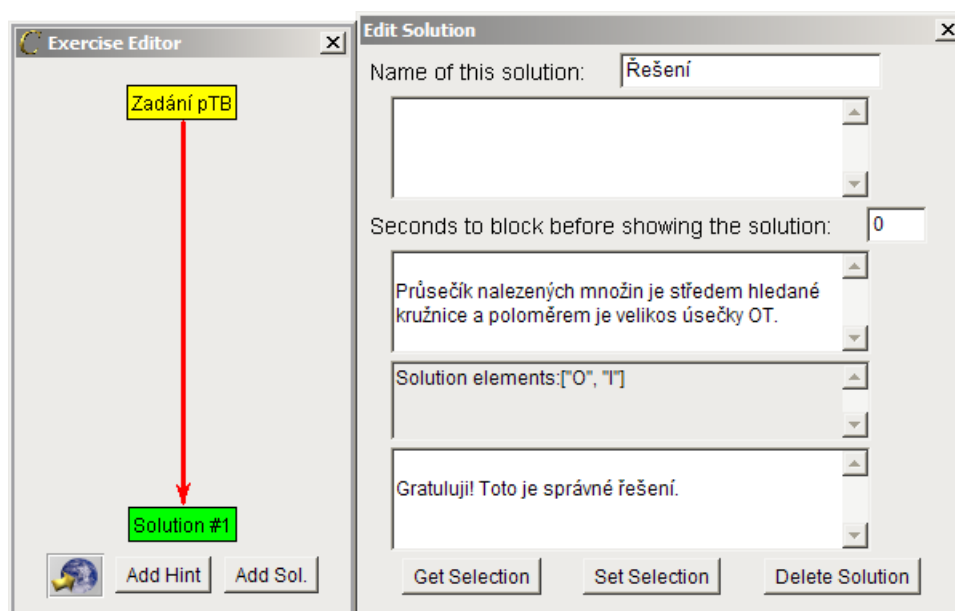
### Vymezení řešení

Dále vymežíme řešení, které bude použito pro kontrolu správnosti cvičení. U nejednoznačně řešitelných úloh (např. sestavení osy dvou přímek) máme možnost definovat řešení více.

Řešení přidáme kliknutím na tlačítko přidat řešení („Add Sol.“) v editoru cvičení. Dvojklikem na „Solution #1“ pak otevřeme editor řešení („Solution Editor“).

První textové pole obsahuje text, který bude zobrazen při vyžádání nápovědy<sup>6</sup>. Výchozí text vymažeme a nahradíme vlastním textem teprve poté, co vymežíme pomocné nápovědy. V druhém textovém poli je zpráva, která se ukáže v okamžiku zobrazení řešení (zdůvodňuje a vysvětluje řešení úlohy). Text v posledním poli je použit, pokud student dokončí cvičení sám. Zaměníme ho příznivou a povzbudivou zprávou, např. 'Gratuluj! Toto je správné řešení.'

Pak musíme vymežit výstupní prvky (tj. řešení úlohy). V našem případě je to bod  $O$  a kružnice  $l$ . Vyberte tyto objekty a klikněte na tlačítko proved' výběr („Get Selection“). Prvky se objeví jako „Solution elements“ v okně editoru (viz Obrázek 3.5).



Obrázek 3.5: Editor řešení

Pokud má cvičení více řešení, můžeme v editoru cvičení vymežit všechna tato řešení, přičemž úloha bude splněna, dosáhne-li student libovolného z nich. Pokud student využije nápovědy, je veden pouze k prvnímu řešení.

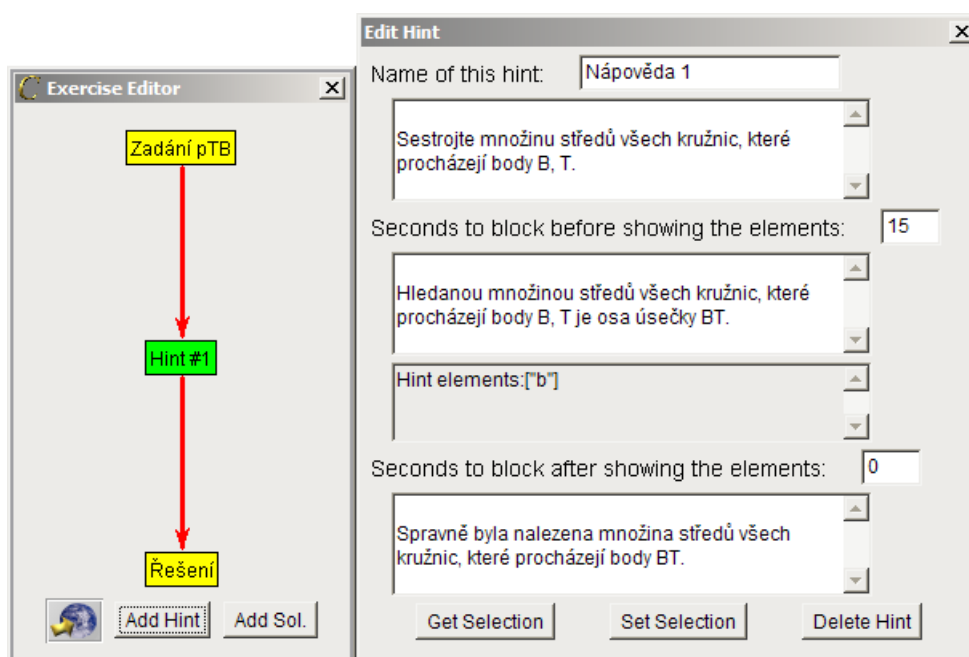
### Vymezení nápověd

Nyní bychom mohli cvičení vyexportovat. Chceme však, aby interaktivní cvičení obsahovalo i několik nápověd, které studentovi pomohou při řešení úlohy.

<sup>6</sup>Během řešení úlohy může student vyvolat nápovědu kliknutím na ikonu .

Úlohu jsme řešili metodou množin bodů dané vlastnosti. Vytvoříme proto nápovědu, která studentovi pomůže nalézt hledané množiny. V editoru cvičení pomocí tlačítka vytvoření nápovědy („Add Hint“) a následným dvojklikem na „Hint #1“ otevřeme editor nápovědy („Hint Editor“). Dialogové okno editor nápovědy je podobné editoru řešení (viz Obrázek 3.6).

Vytvoříme dvě nápovědy. Jedna studenta povede k sestrojení množiny středů všech kružnic, které procházejí body  $B, T$  (hledanou množinou je osa úsečky  $BT$ , tj. přímka  $b$ ). Druhá pak napoví, jak nalézt množinu středů všech kružnic, které se dotýkají přímky  $p$  v bodě  $T$  (hledanou množinou je kolmice k přímce  $p$  v bodě  $T$ , tj. přímka  $c$ ). Zaměníme stávající texty za vlastní, stejně jako v editoru řešení, vybereme přímku  $b$  (v druhém případě  $c$ ) a klikneme na tlačítko proved' výběr „Get Selection“.



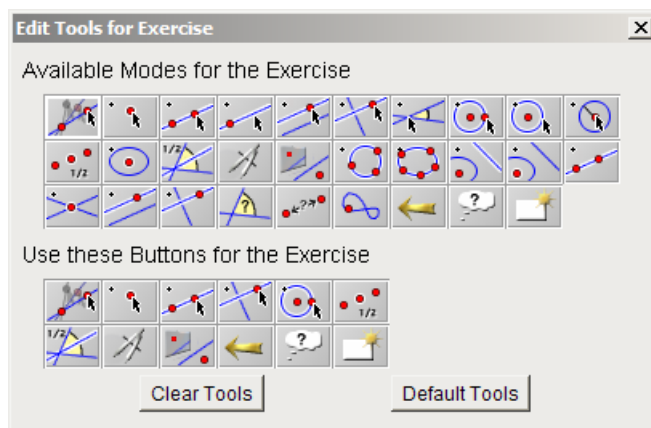
Obrázek 3.6: Editor nápovědy

Text v prvním poli se zobrazí po požadavku první nápovědy. Pokud student požádá o další nápovědu, automaticky proběhne konstrukce osy úsečky  $AB$ , ale další nápověda bude zobrazena až po uplynutí 15 sekund od zobrazení nápovědy předchozí. Další nápovědy vytvoříme obdobným způsobem.

### Výběr nástrojů


Doposud jsme neurčili nástroje, které budou k dispozici při řešení interaktivního cvičení. Editor sady nástrojů (viz Obrázek 3.7) vytvoříme v editoru vstupu pomocí tla-

čítka „*Edit Tools*“. Nástroj přidáme kliknutím na příslušnou ikonu v horní polovině editoru sady nástrojů, odstraníme ho kliknutím na odpovídající ikonu v dolní polovině. Nástroje, které jsou v dolní polovině editoru budou k dispozici na *www* stránce s interaktivním cvičením.



Obrázek 3.7: Editor sady nástrojů

### 3.2.3 Export interaktivního cvičení

Zdrojový HTML kód *www* stránky s interaktivním cvičením jednoduše vytvoříme kliknutím na tlačítko pro export . Automaticky se vygeneruje *.html* soubor, který se uloží do stejného adresáře jako vzorová konstrukce. Pro správnou funkci apletu musí být ve stejném adresáři také soubor *cindyrun.jar*<sup>7</sup>.

Po spuštění webové stránky se cvičením se zobrazí aplet, ve kterém má student možnost konstrukčně řešit zadanou úlohu. Pod konstrukcí se nalézají další dva malé aplety – jeden vymezuje místo pro načtení zpráv (zadání, nápovědy, řešení) a druhý obsahuje sadu nástrojů potřebných pro řešení cvičení. Velikost apletů je přednastavena, je však možné ji libovolně změnit přímo v HTML kódu.

#### Doladění cvičení

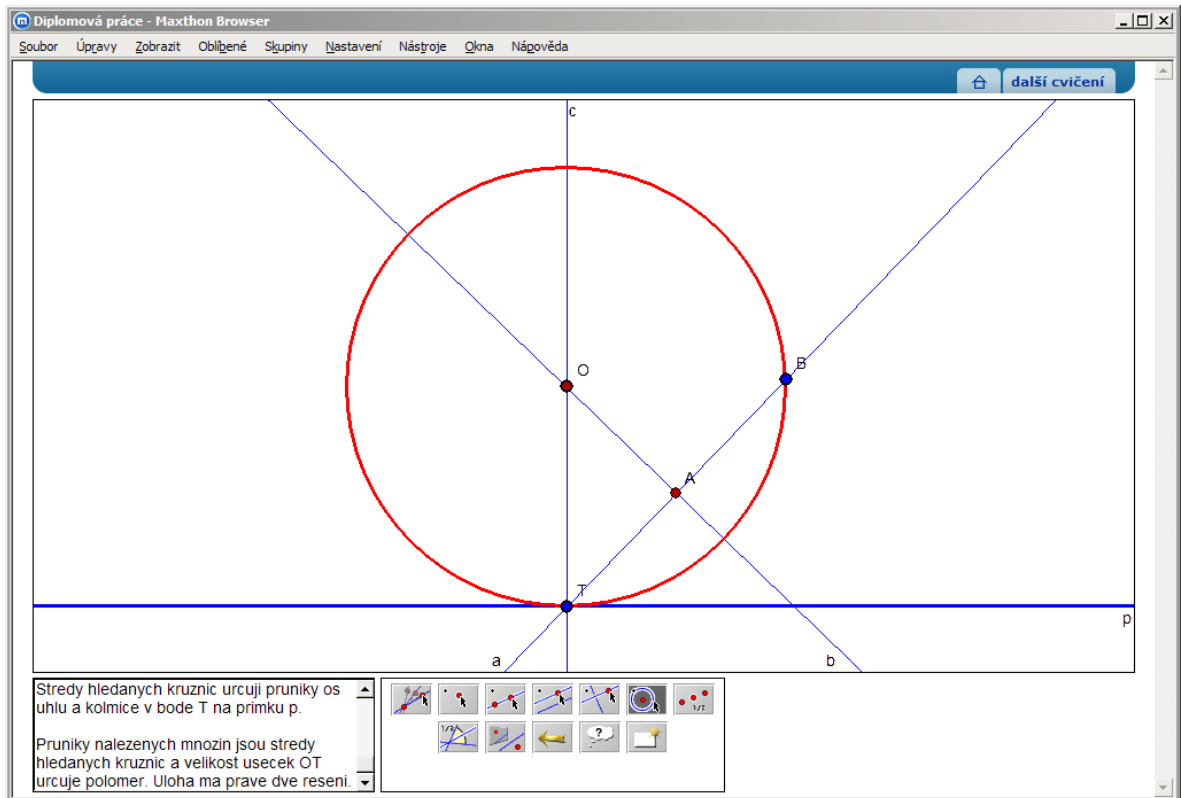
Po exportu cvičení je dobré spustit HTML soubor a vyzkoušet cvičení, zda mají nápovědy a řešení smysl. Všechna data z editoru cvičení jsou uložena v *.cdy* souboru (soubor se vzorovou konstrukcí), který je možno dodatečně upravovat. Chceme-li změnit zobrazené texty, přidat nápovědu nebo předefinovat objekty, spustíme soubor s konstrukcí

<sup>7</sup>Program Cinderella verze 1.4 soubor *cindyrun.jar* vygeneruje společně se cvičením.

a provedeme editaci původních dat v editoru cvičení. Pak stačí soubor jen uložit, není potřeba exportovat nový zdrojový HTML kód.

### Doporučení při tvorbě cvičení

- Neměli bychom poskytnout studentovi možnost neomezeně používat nápovědu.
- Znění úlohy musí jasně vymezovat řešení, které je očekáváno.
- Musí být definována všechna možná řešení.
- Jako řešení by měly být označeny pouze nezbytně nutné prvky, aby nebylo studentovi znemožněno vyřešit úlohu jiným způsobem.



Obrázek 3.8: Náhled hotového cvičení

# Kapitola 4

## Apolloniovy úlohy

MOTTO:

*„Apolloniovy úlohy jsou úlohy, které upoutaly pozornost tak, že často celé generace nejbystřejších myslitelů se jimi obíraly. Z původní úlohy vyrostl celý soubor problémů, jejichž řešení vedlo k novým objevům a myšlenkám, posílilo vydatně bádavého ducha lidského na jeho cestě za poznáním pravdy a tak se stalo důležitým činitelem vědeckého vývoje.“*

B. VLK; PROBLÉM APOLLONIŮV; PLZEŇ 1930

Apolloniova úloha má své jméno podle řeckého geometra **Apollonia z Pergy** (262 – 200 př. n. l.), který se touto úlohou zabýval a řešil ji v díle „**O dotycích**“. Jedná se o dvousvazkovou práci, která se bohužel nedochovala. Nemůžeme tudíž s určitostí říci, jakým způsobem Apollonios úlohu řešil. Podle francouzského matematika Viëta<sup>1</sup> Apollonios podal obecné řešení dilatací.

Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru). Originální znění se nezachovalo. Je však známa reprodukce úlohy v díle „*Mathématikai synagogai*“<sup>2</sup> řeckého matematika Pappa Alexandrijského (3. stol. n. l.). Paposs uvádí úlohu v následujícím znění: „*Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narýsovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímek či kruhů.*“.

---

<sup>1</sup>Obecné řešení dilatací uvedl ve svém díle „Apollonius Gallus...“ z roku 1600 n. l.

<sup>2</sup>Důležitý pramen historie matematiky obsahující výňatky ze ztracených matematických spisů.

Z výše uvedeného zadání je možno vypočítat počet možných variant úlohy. Hledáme vždy skupiny tří objektů ze třech druhů (*Bodů, přímk, kružnic*), přičemž pořadí daných objektů není podstatné. Tvoříme kombinace s opakováním třetí třídy z podmínek  $B, p, k$ , tj.  $K'(k, n) = K'(3, 3) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$ . Je tedy **10 různých případů** (nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné), přičemž obecná úloha má **nejvýše 8 řešení** (je-li počet řešení konečný).

Apolloniova úloha se těšila velkému zájmu v celé své historii. Zabývali se jí význační matematici jako například již zmiňovaný Viète, dále také Fermat, Newton, Euler a další. Již Eukleides se ve své 4. knize *Základů* věnuje vyšetřování dvou typů Apolloniových úloh. Kniha pojednává o kružnicích opsaných a vepsaných trojúhelníku, tj. nalezení kružnice procházející třemi body nebo dotýkající se třech přímk.

Speciálním případem Apolloniovy úlohy je úloha Pappova, která má následující znění: „*Jsou dány tři různé prvky (kružnice, přímky, body), z nichž alespoň jeden je kruhová křivka a alespoň jeden je bod, přičemž tento bod leží na dané kruhové křivce. Sestrojte kružnici, která se dotýká zadané kruhové křivky v daném bodě a dále se dotýká další kruhové křivky nebo prochází dalším zadaným bodem.*“

Uvědomíme-li si, že jedním ze zadaných prvků je vždy bod a druhým přímka nebo kružnice, můžeme lehce určit počet možných variant úloh. Podle kombinatorického pravidla součinu dostaneme rovnici  $\binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ . Obecná úloha se tedy dělí na **6 podúloh**. Jednoduchou konstrukcí můžeme počet variant snížit na polovinu. Máme-li v zadání bod ležící na kružnici, sestrojíme v tomto bodě tečnu a úlohu převedeme na hledání kružnice, která se dotýká přímky v tečném bodě.

Paposs ve svém díle uvádí požadavek Apollonia – řešení Apolloniovy úlohy pomocí **kružítka a pravítka**. Řešením pouze eukleidovskými prostředky se zabývá i tato webová učebnice. Jsou známé také jiné metody, např. užitím kuželoseček, cyklografie, deskriptivní geometrií, geometrií projektivní (kolineací) apod., avšak těmito metodami se zabývat nebudeme. V následujícím textu uvedeme způsoby řešení, které jsme použili ve webovské učebnici. Jedná se o konstrukci **metodou množin všech bodů dané vlastnosti** a konstrukci **metodou geometrických zobrazení** (konkrétně kruhové inverze a stejnolehlosti). Metody nejsou popsány zcela vyčerpávajícím způsobem, jedná se spíše o souhrn definic a vět<sup>3</sup> nutných pro řešení jednotlivých Apolloniových úloh.

<sup>3</sup>Věty jsou uvedeny bez důkazů, ty je možné si doplnit z literatury [6].

## 4.1 Metody řešení Apolloniových úloh

První z uvedených metod řešení je geometrická konstrukce s využitím **množin bodů dané vlastnosti**. Jedná se o poměrně snadnou a rychlou metodu, která je při řešení Apolloniových úloh hojně využívána. Při řešení vždy hledáme dvě a více množin, z nichž každá je množinou všech bodů jisté vlastnosti požadované v zadání úlohy a každý společný bod hledaných množin pak vede k řešení úlohy samotné.

DEFINICE:

*Množinou všech bodů dané vlastnosti  $V$  je množina  $M$  všech bodů základní množiny, které splňují tyto požadavky:*

1. *každý bod množiny  $M$  má danou vlastnost  $V$ ,*
2. *každý bod, který má danou vlastnost  $V$ , patří do množiny  $M$ .*

Mezi množiny, jež jsou při řešení Apolloniových úloh využívány, patří zejména množiny středů všech kružnic splňujících určitou vlastnost, jako jsou:

- *Množina středů všech kružnic, které procházejí dvěma různými body  $A, B$ , je osa úsečky  $AB$ .*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou různoběžných přímek  $p, q$ , je sjednocení os všech úhlů těmito přímkami určených, bez průsečíku přímek  $p, q$ .*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou rovnoběžných přímek  $p, q$ , je osa pásu těmito přímkami určeného. Poloměr všech dotýkajících se kružnic je roven  $\frac{1}{2}$  vzdálenosti  $v(p, q)$ .*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímky  $p$  a mají daný poloměr  $a > 0$ , jsou ekvidistanty přímky (tj. dvě přímky  $q_1, q_2$  rovnoběžné s přímkou  $p$ , pro které platí  $v(q_1, p) = a$  a  $v(q_2, p) = a$ ).*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice  $k(S; r)$  a mají daný poloměr  $a > 0$ , jsou ekvidistanty kružnice (tj. dvě kružnice  $l_1(S; r+a)$  a  $l_2(S; |r-a|)$ ). Za předpokladu  $a = r$  je to jediná kružnice  $l_1(S; r+a)$ .*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímky  $p$  v bodě  $T$ , je přímka kolmá na přímkou  $p$ , která prochází bodem  $T$ , bez bodu  $T$ .*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice  $k(S; r)$  v bodě  $T$ , je přímka  $ST$ , bez bodů  $S, T$ .*
- *Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou soustředných kružnic  $k_1(S; r_1)$  a  $k_2(S; r_2)$  ( $r_1 < r_2$ ), jsou dvě kružnice  $l_1(S; \frac{r_1+r_2}{2})$  a  $l_2(S; \frac{r_1-r_2}{2})$ . Poloměr všech dotýkajících se kružnic je roven  $\frac{r_1-r_2}{2}$ , resp.  $\frac{r_1+r_2}{2}$ .*

Další z možností řešení Apolloniových úloh je využitím **mocnosti bodu ke kružnici**. Zde připomeneme pouze definici a s ní související elementární věty, které bezprostředně užijeme k řešení úlohy.

DEFINICE:

Nechť je dán bod  $M$  a kružnice  $k(S; r)$ . Označme vzdálenost  $|MS| = d$ . **Mocností bodu  $M$  ke kružnici  $k(S; r)$**  (značíme  $\mu_k^M$ ) rozumíme číslo  $\mu_k^M = d^2 - r^2$ .

DŮSLEDEK:

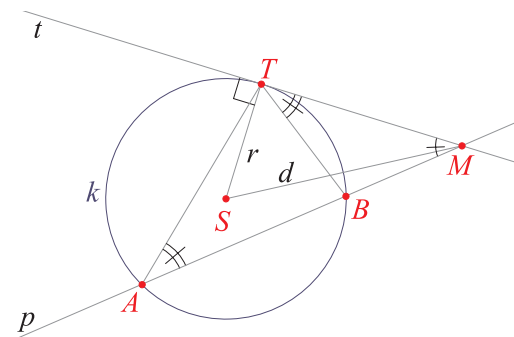
$$\begin{array}{lll} M \text{ vnější bod kružnice } k & \text{tj. } (d > r) & \Leftrightarrow \mu_k^M = d^2 - r^2 > 0 \\ M \text{ vnitřní bod kružnice } k & \text{tj. } (d < r) & \Leftrightarrow \mu_k^M = d^2 - r^2 < 0 \\ M \text{ bodem na kružnici } k & \text{tj. } (d = r) & \Leftrightarrow \mu_k^M = d^2 - r^2 = 0 \end{array}$$

VĚTA:

Nechť je dána kružnice  $k(S; r)$  a její vnější bod  $M$ . Nechť  $p$  je libovolná sečna kružnice  $k$ , která prochází bodem  $M$  a protíná kružnici v bodech  $A, B$  a  $t$  je tečna, která se dotýká kružnice  $k$  v bodě  $T$ . Potom platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MT|^2 = k,$$

kde  $k$  je konstantní číslo ( $k > 0$ ).

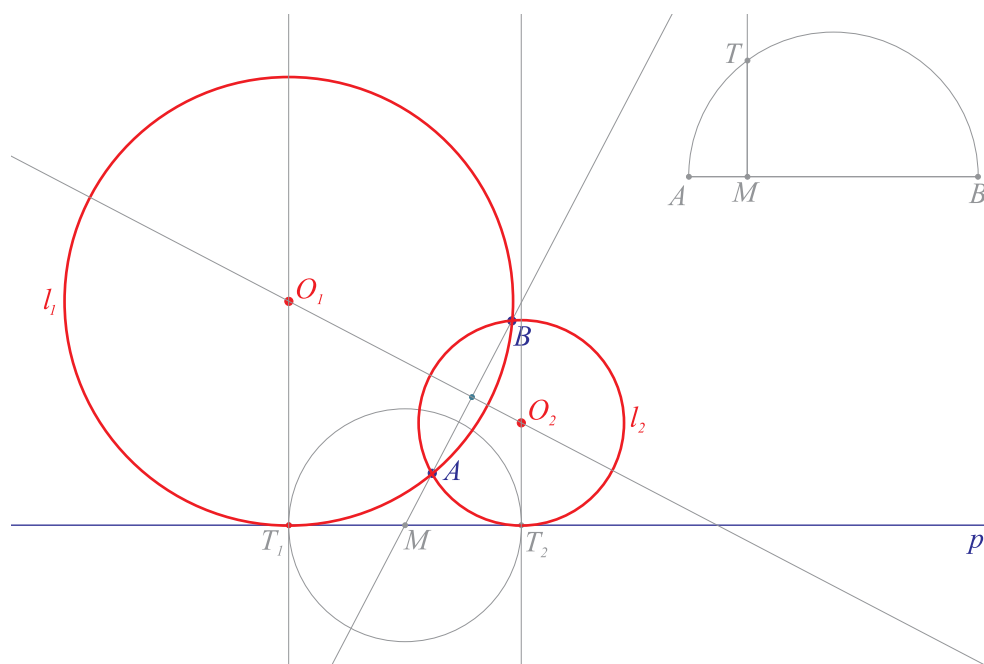


Obrázek 4.1: Mocnost bodu ke kružnici

Důkaz vyplývá z podobnosti trojúhelníků  $\triangle MAT$  a  $\triangle MTB$  (viz Obrázek 4.1).

Mocnosti bodu ke kružnici lze využít např. v úloze typu  $BBp$ , kdy je zadána přímka  $p$  a dva body  $A, B$ , které leží ve stejné polorovině, přímka  $AB$  je s přímkou  $p$  různoběžná. Se znalostí vzorečku z předchozí věty jsme schopni nalézt body dotyku hledané kružnice a přímky  $p$ <sup>4</sup>. Středů hledaných kružnic pak náleží průniku osy úsečky  $AB$  a tečen k přímce  $p$  v bodech dotyku (viz Obrázek 4.2).

<sup>4</sup>Průnikem přímek  $AB$  a  $p$  je bod  $M$ . Tím jsme získali potřebné údaje pro určení vzdálenosti  $|MT|$ , kterou určíme např. pomocí Eukleidovy věty o výšce.

Obrázek 4.2: Řešení úlohy typu  $BBp$  – s využitím mocnosti bodu ke kružnici

DEFINICE:

Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím  $k_1(S_1; r_1)$  a  $k_2(S_2; r_2)$  ( $|S_1S_2| = s \neq 0$ ) je přímka  $ch$  kolmá na přímku  $S_1S_2$ , jejíž patou je bod  $P \in S_1S_2$ , pro který platí  $|S_1P| = \frac{s_2 + r_1^2 - r_2^2}{2s}$ . Tato přímka se nazývá **chordálou** kružnic  $k_1(S_1; r_1)$  a  $k_2(S_2; r_2)$ .

DEFINICE:

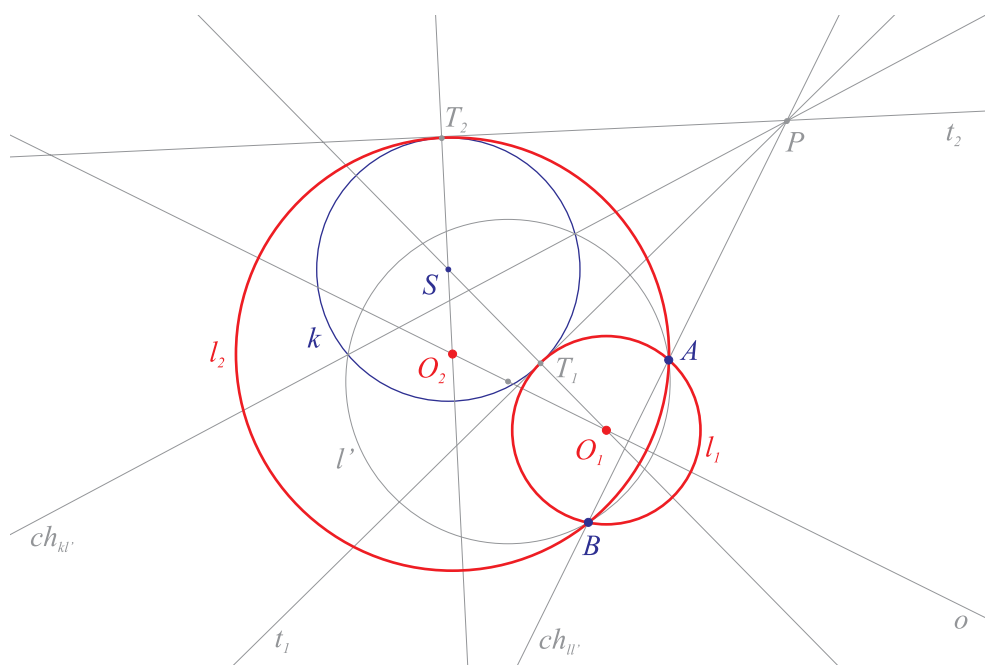
Bod, který má stejnou mocnost ke třem zadaným kružnicím se nazývá **potenční střed** kružnic.

Chordálu dvou kružnic použijeme ve webovské učebnici nejčastěji k nalezení základní kružnice  $\omega$ , podle které lze v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  převést dvě nesoustředné kružnice bez společného bodu na soustředné. O tom se však zmíníme až v části zabývající se kruhovou inverzí. Další využití chordály dvou kružnic je např. při konstrukci potenčního středu.

Na základě vlastností potenčního středu lze řešit úlohu typu  $BBk$ , kdy oba ze zadaných bodů  $A, B$  leží vně kružnice  $k$ . Ze zadání víme, že má hledaná kružnice procházet body  $A, B$ . Střed  $O$  hledané kružnice  $l$  bude proto patřit do množiny středů všech kružnic, které procházejí body  $A, B$ , tj. osa  $o$  úsečky  $AB$ . Hledaná kružnice  $l$  se dotýká zadané kružnice  $k$  v neznámém bodě  $T$ . Tečna kružnice  $k$ , která prochází bodem  $T$ , je společnou

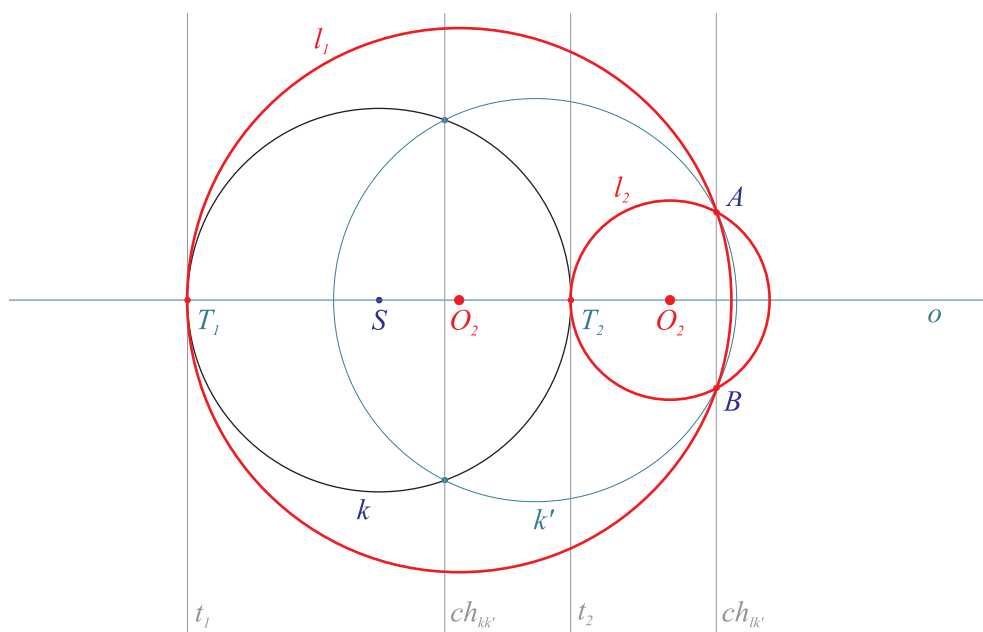
tečnou kružnic  $l$ ,  $k$  a zároveň i jejich chordálou. Zvolme kružnici  $l'$ , která prochází body  $A$ ,  $B$  a protíná kružnici  $k$  ve dvou bodech, pak přímka  $AB$  je chordálou kružnice  $l$  a  $l'$ . Najdeme-li potenční střed  $P$  kružnic  $l$ ,  $l'$  a  $k$ , potom chordála kružnic  $l$  a  $k$ , která prochází potenčním středem, je tečnou z bodu  $P$  ke kružnici  $k$ . Dotykový bod této tečny a kružnice  $k$  je bod  $T$ . Střed hledané kružnice  $l$  patří do množiny středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice  $k$  v bodě  $T$ , tj. přímka  $ST$  bez bodů  $S$ ,  $T$ .

Jestliže osa  $o$  úsečky  $AB$  neprochází středem  $S$  zadané kružnice  $k$ , jsou chordály kružnic  $l$ ,  $l'$ ,  $k$  navzájem různoběžné přímky, které se protínají právě v jednom bodě  $P$ . Z bodu  $P$  lze k dané kružnici  $k$  vést právě dvě tečny, čímž získáme dva body  $T$  a úloha má dvě řešení (viz Obrázek 4.3).



Obrázek 4.3: Řešení úlohy typu  $BBk$  – existuje-li  $P$

Jestliže osa  $o$  úsečky  $AB$  prochází středem  $S$  zadané kružnice  $k$ , jsou chordály kružnic  $l$ ,  $l'$ ,  $k$  navzájem rovnoběžné přímky, kolmé k ose  $o$ . Osa  $o$  je střednou kružnic  $k$ ,  $l$ . Potenční střed  $P$  neexistuje. Společná tečna  $t$  kružnic  $k$ ,  $l$  je kolmá na střednou těchto kružnic a hledaný dotykový bod  $T$  je průsečíkem osy  $o$  a kružnice  $k$ . Získáme tak opět dva průsečíky, úloha má dvě řešení (viz Obrázek 4.4).

Obrázek 4.4: Řešení úlohy typu  $BBk$  – neexistuje-li  $P$ 

Mezi již zmíněné metody geometrických zobrazení patří mimo kruhové inverze také **stejnolehlost**. Nejprve uvedeme definici stejnolehlosti a pak několik vět týkajících se stejnolehlosti dvou kružnic.

DEFINICE:

Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu  $S$  přiřazuje týž bod  $S$  a každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že platí  $(X'XS) = \kappa$ , kde  $\kappa \neq 0, 1$  je pevně zvolené reálné číslo, se nazývá **stejnolehlost**. Bod  $S$  se nazývá **střed stejnolehlosti**, číslo  $\kappa$  **koefficient stejnolehlosti**. Značíme  $\mathcal{H}(S, \kappa)$ .

VĚTA:

Obrazem kružnice  $k(O; r)$  ve stejnolehlosti  $\mathcal{H}(S, \kappa)$  je kružnice  $k'(O'; |\kappa|r)$ .

VĚTA:

Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé.

Mají-li kružnice  $k_1, k_2$  různé poloměry, existují právě dvě stejnolehlosti  $\mathcal{H}(E, \frac{r_2}{r_1})$  (s kladným koeficientem) a  $\mathcal{H}(I, -\frac{r_2}{r_1})$  (se záporným koeficientem), při kterých se kružnice  $k_1$  zobrazí na kružnici  $k_2$ . Střed  $E$  stejnolehlosti s kladným koeficientem se nazývá **vnější střed stejnolehlosti**, střed  $I$  stejnolehlosti se záporným koeficientem **vnitřní střed stejnolehlosti**. Mají-li různé kružnice  $k_1, k_2$  stejný poloměr, existuje právě jedna stejnolehlost zobrazující  $k_1$  na  $k_2$ , koeficient této stejnolehlosti je  $\kappa = -1$ .

VĚTA:

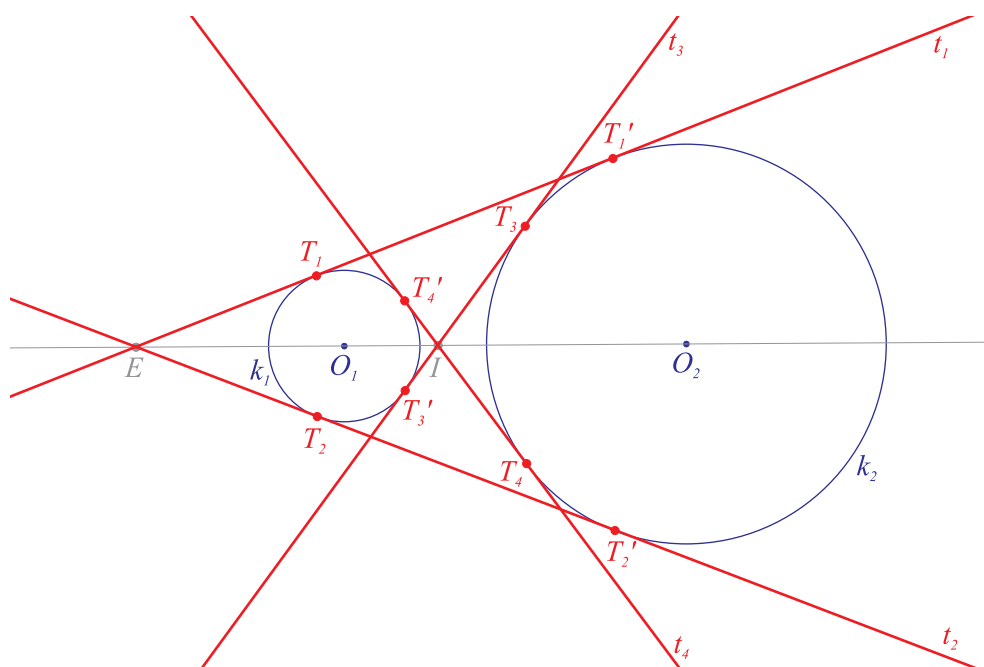
Dotýkají-li se dvě kružnice, potom bod dotyku je jedním ze středů stejnolehlosti (v případě vnějšího dotyku vnitřním středem, v případě vnitřního dotyku vnějším středem).

VĚTA:

Jsou-li dány dvě nesoustředné kružnice  $k_1, k_2$  ( $O_1 \neq O_2$ ) a přímka  $t$ , která je tečnou kružnice  $k_1$  a současně prochází jedním ze středů stejnolehlosti, potom je přímka  $t$  i tečnou kružnice  $k_2$ .

VĚTA:

Společná tečna dvou nesoustředných kružnic  $k_1(O_1; r_1), k_2(O_2; r_2)$  prochází některým ze středů stejnolehlosti kružnic  $k_1, k_2$  nebo je rovnoběžná s přímkou  $O_1O_2$ .



Obrázek 4.5: Společné tečny dvou kružnic

Z konkrétních typů úloh, které lze řešit s využitím stejnolehlosti, jsou to úlohy  $ppk$  a  $Bpp$ . Nastíníme zde pouze řešení úlohy  $BBp$ , kdy jsou zadané přímky  $p_1, p_2$  různoběžné a bod  $B$  neleží ani na jedné z nich. Nejprve sestrojíme osu úhlu určeného přímkami  $p_1, p_2$ , jemuž náleží bod  $B$ . Tím získáme střed  $O'$  kružnice  $l'$ , která se dotýká přímek  $p_1, p_2$ . Nyní musíme zajistit, aby kružnice splňovala i podmínku třetí – procházela bodem  $B$ .

Podle předchozích vět víme, že jsou každé dvě kružnice stejnohlé. Speciálně v tomto případě jsou stejnohlé hledaná kružnice  $l$  a zvolená kružnice  $l'$  – a to ve stejnolehlosti se středem  $P$  ( $P \in (p_1 \cap p_2)$ ). Bod  $B$  leží na kružnici  $l(O; r)$ , a proto s ním stejnohlý



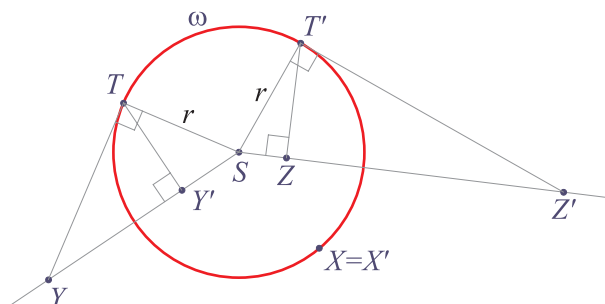
DEFINICE:

Nechť je dána kružnice  $\omega$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$ . Uvažujeme zobrazení  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  v Möbiově rovině  $\mathbb{M}_2$ , které je určeno následující předpisem:

1. Obrazem bodu  $S$  je nevlastní bod  $P_\infty$ .
2. Obrazem nevlastního bodu  $P_\infty$  je bod  $S$ .
3. Obrazem bodu  $X \neq S, P_\infty$  je bod  $X'$  takový, že  $X' \in \overleftrightarrow{SX}$  a současně  $|SX'| \cdot |SX| = r^2$ .

Zobrazení  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  se nazývá **kruhová inverze**, kružnice  $\omega$  je základní kružnice inverze, bod  $S$  je střed kruhové inverze a kladné reálné číslo  $r^2$  je koeficient kruhové inverze.

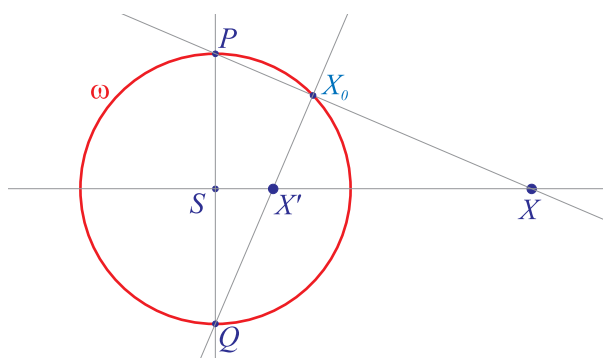
Pro sestrojení obrazu bodu v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  máme dvě možnosti. Buď můžeme využít Eukleidovu větu o odvěsně<sup>5</sup>, jelikož platí  $|SY| \cdot |SY'| = |SZ| \cdot |SZ'| = r^2$  (viz Obrázek 4.7) nebo konstrukci provedeme na základě stereografické projekce.



Obrázek 4.7: Obrazu bodu v  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  – s využitím Eukleidovy věty o odvěsně

Konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  na základě stereografické projekce je naznačena na Obrázku 4.8. Trojúhelníky  $\triangle XSP$  a  $\triangle QSX'$  jsou podobné, protože jsou pravoúhlé s pravým úhlem při vrcholu  $S$  a platí  $|\angle SXP| = 90^\circ - |\angle XPS| = |\angle SQX'|$ . Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne  $|SX| : |SP| = |SQ| : |SX'|$ , tj.  $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ . Konstrukce je výhodná oproti předchozí (metoda s využitím Eukleidovy věty o odvěsně) pro nezávislost polohy bodu  $X$  vůči základní kružnici  $\omega$ , proto jsme ji využili při řešení úloh ve webovské učebnici.

<sup>5</sup>Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka, jehož jednou stranou je přepona a druhá strana je shodná s úsekem přepony přilehlým k této odvěsně.

Obrázek 4.8: Obraz bodu v  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  – s využitím stereografické projekce

VĚTA:

Obrazem přímky  $p$  v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ , která prochází středem kruhové inverze  $S$ , je samodružná přímka ( $p' = p$ ).

VĚTA:

Obrazem přímky  $p$  v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ , která neprochází středem kruhové inverze  $S$ , je kružnice  $p'$  procházející středem kruhové inverze.

VĚTA:

Obrazem kružnice  $k$  v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ , která prochází středem kruhové inverze  $S$ , je přímka  $k'$  neprocházející středem kruhové inverze.

VĚTA:

Obrazem kružnice  $k$  v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ , která neprochází středem kruhové inverze  $S$ , je kružnice  $k'$  neprocházející středem kruhové inverze.

VĚTA:

Velikost úhlu dvou křivek se v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  nemění.

VĚTA:

Kružnice  $k \neq \omega$  je samodružná v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  právě tehdy, když  $k \perp \omega$ .

Kruhovou inverzi aplikujeme na takové typy úloh, kde lze danou úlohu převést na úlohu jednodušší, tzv. **vnitřní úlohu**. Vnitřní úlohu vyřešíme (např. metodou množin bodů dané vlastnosti nebo stejnoolehlostí) a její výsledek převedeme pomocí též kruhové inverze<sup>6</sup> na výsledek úlohy původní. Základní kružnici  $\omega$  je možné umístit libovolně, pro zjednodušení je však vhodné ji zvolit jedním z následujících způsobů:

<sup>6</sup>Kruhová inverze je involutorní zobrazení. Tzn. pro každé dva body  $A, B$  z roviny platí, že v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  je obrazem bodu  $A$  bod  $B$  a zároveň obrazem bodu  $B$  je v  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  bod  $A$ .

1. Je-li mezi zadanými prvky bod, zvolíme jej za střed základní kružnice  $\omega$ .
2. Není-li mezi zadanými prvky žádný bod, volíme za střed základní kružnice  $\omega$  společný bod zadaných kruhových křivek (bod dotyku, průsečík).
3. Neexistuje-li žádný společný bod zadaných kruhových křivek, použijeme algoritmus převedení dvou nesoustředných kružnic na soustředné.

Poloměr základní kružnice inverze volíme tak, aby ostatní zadané útvary byly buď samodružné nebo aby sestrojení jejich obrazu bylo co nejjednodušší:

- Body ležící na základní kružnici  $\omega$  jsou samodružné.
- Kružnice, která protíná základní kružnici  $\omega$  ortogonálně, je samodružná.
- Protíná-li základní kružnice  $\omega$  zadanou přímku, sestrojíme obraz přímky jednoduchou konstrukcí kružnice opsané třem bodům. Víme, že přímka neprocházející středem inverze se zobrazí na kružnici procházející středem inverze. Body průniku zadané přímky a základní kružnice  $\omega$  jsou samodružné. Tím jsme získali tři body, které náležejí obrazu přímky v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ .
- Protíná-li základní kružnice  $\omega$  zadanou kružnici a navíc prochází-li zadaná kružnice středem základní kružnice  $\omega$ , sestrojíme obraz kružnice následovně: Víme, že kružnice procházející středem inverze se zobrazí na přímku neprocházející středem inverze. Body průniku zadané kružnice a základní kružnice  $\omega$  jsou samodružné. Tím jsme získali dva body, které náležejí obrazu kružnice v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ . Stačí pak pouze proložit těmito body přímkou.

Konkrétní využití kruhové inverze při řešení Apolloniových úloh uvedeme v kapitole „Řešení obecné Apolloniovy úlohy“, kde mj. uvedeme algoritmus převedení dvou nesoustředných kružnic na soustředné.

## 4.2 Řešení obecné Apolloniovy úlohy

Popsat řešení všech deseti zvláštních případů Apolloniovy úlohy není cílem této práce. Konkrétní řešení i se všemi jeho fázemi je k dispozici ve webovské učebnici. Zde si uvedeme řešení úlohy obecné, tj. úloha typu  $kkk$ . U zbylých devíti případů zmíníme pouze přehled možných vzájemných poloh vstupních prvků (viz podkapitola „Vzájemné polohy vstupních prvků“).

### Zadání úlohy

„Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká kružnic  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$ ,  $k_3(S_3, r_3)$ .“

**Rozbor**

Podle vzájemné polohy vstupních prvků lze řešit úlohu několika způsoby. Kritériem třídění je, zda jsou některé ze zadaných kružnic soustředné, či zda se protínají a v kolika bodech. Mohou nastat následující případy:

1. kružnice  $k_1, k_2, k_3$  jsou soustředné,  $r_1 < r_2 < r_3$
2. kružnice  $k_1, k_2$  jsou soustředné,  $r_1 < r_2$ 
  - a. kružnice  $k_3$  nemá s kružnicemi  $k_1, k_2$  žádný dotyk
    - kružnice  $k_3$  neleží v mezikruží určeném kružnicemi  $k_1, k_2$
    - kružnice  $k_3$  leží v mezikruží určeném kružnicemi  $k_1, k_2$
  - b. kružnice  $k_3$  se dotýká kružnice  $k_1$  nebo  $k_2$  právě v jednom bodě
  - c. kružnice  $k_3$  protíná kružnici  $k_2$
  - d. kružnice  $k_3$  protíná kružnice  $k_1, k_2$
3. kružnice  $k_1, k_2, k_3$  jsou nesoustředné
  - a. kružnice  $k_1, k_2, k_3$  nemají žádný společný bod
  - b. kružnice  $k_1, k_2, k_3$  se protínají v jednom bodě
  - c. kružnice  $k_1, k_2$  se protínají ve dvou bodech

Jsou-li všechny tři zadané kružnice soustředné, je možno ihned říci, že zadaná úloha nemá řešení. Pokud jsou kružnice  $k_1, k_2$  soustředné, úlohu řešíme metodou množin bodů dané vlastnosti. Protože se má hledaná kružnice dotýkat soustředných kružnic, bude její střed ležet na kružnici  $m$  se středem shodným se zadanými kružnicemi, tj.  $S$  a poloměrem  $\frac{r_1+r_2}{2}$ , resp. na kružnici  $m' (S; \frac{r_1-r_2}{2})$ . Má-li se hledaná kružnice dotýkat zároveň i třetí zadané kružnice  $k_3$ , pak je jejím středem průnik soustředných kružnic  $n_1 (S_3; r_3 + \frac{r_1-r_2}{2})$  a  $n_2 (S_3; r_3 - \frac{r_1-r_2}{2})$  s množinou  $m$ , resp.  $n'_1 (S_3; r_3 + \frac{r_1+r_2}{2})$  a  $n_2 (S_3; r_3 - \frac{r_1+r_2}{2})$  s množinou  $m'$ .

V případě, že jsou kružnice  $k_1, k_2, k_3$  nesoustředné, zvolíme základní kružnici tak, aby se v kruhové inverzi  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$  převedly dvě z daných kružnic  $k_1, k_2$  na dvojici kružnic soustředných  $k'_1, k'_2$  a kružnice  $k_3$  na kružnici  $k'_3$ . Řešení vnitřní úlohy je tedy analogické s úlohou předchozí. Prochází-li kružnice  $k_3$  středem řídicí kružnice  $\omega$ , zobrazí se kružnice  $k_3$  na přímku  $k'_3$  a vnitřní úloha se stane úlohou typu  $pkk$ . Středem hledané kružnice je pak průnik množiny  $m$  a ekvidistanty přímkou  $k'_3$  ve vzdálenosti  $\frac{r_1+r_2}{2}$ , resp. množiny  $m'$  a ekvidistanty přímkou  $k'_3$  ve vzdálenosti  $\frac{r_1-r_2}{2}$ .

Mají-li zadané kružnice alespoň jeden společný bod a zvolíme-li za střed řídicí kružnice jejich průsečík, úlohu typu  $kkk$  převedeme na úlohu typu  $ppk$  nebo  $ppp$  (podle počtu

společných bodů). Přehled vzájemných poloh takto zadaných vstupních prvků a jejich vnitřních úloh s počtem možných řešení je uveden v „Příloze C“. Dále je úloha řešena pouze pro případ, kdy užíváme převodu kružnic, které nemají společný bod, na soustředné.

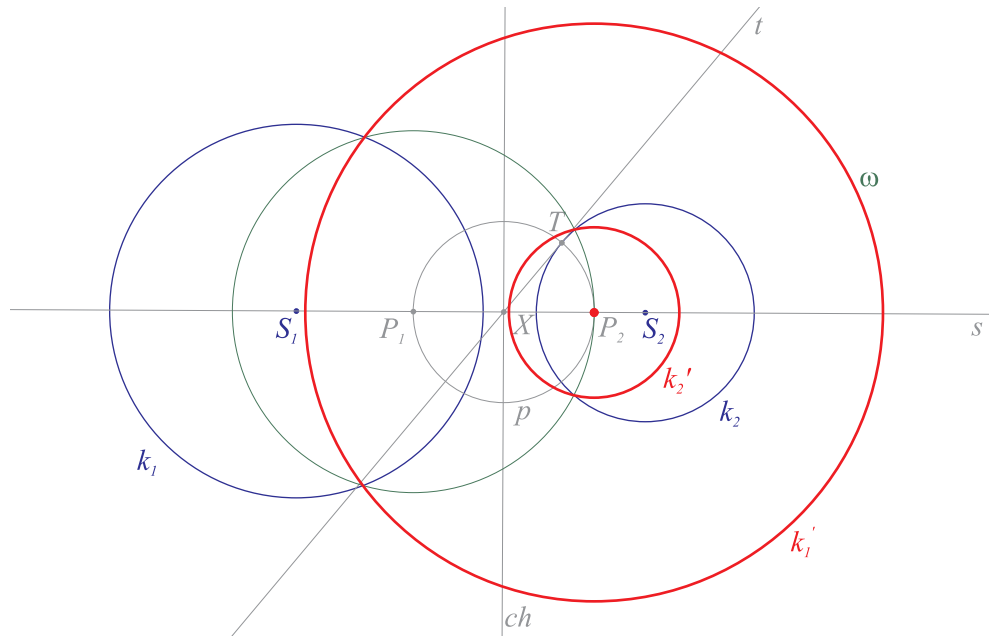
### Zápis konstrukce

1.  $ch$ ; chordála kružnic  $k_1, k_2$ 
  - a.  $s$ ; středná  $S_1S_2$
  - b.  $X$ ;  $X \in \mapsto S_1S_2 \wedge |S_1X| = \frac{s^2+r_1^2-r_2^2}{2s}$
  - c.  $ch$ ;  $ch \perp s \wedge X \in ch$
2.  $X$ ;  $X \in (ch \cap S_1S_2)$
3.  $T$ ; bod dotyku tečny  $t$  vedené z bodu  $X$  ke kružnici  $k_2$
4.  $p$ ;  $p(X; |XT|)$
5.  $P_1, P_2$ ;  $P \in (m \cap S_1S_2)$
6.  $\omega$ ;  $\omega(P_1; |P_1P_2|)$
7.  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ :  $k_{kružnice} \rightarrow k'_{kružnice}$ <sup>7</sup>
8.  $m$ ;  $m\left(S'; \frac{r_1+r_2'}{2} \left(\frac{r_1-r_2'}{2}\right)\right)$
9.  $n_1$ ;  $n_1\left(S'_3; r'_3 + \frac{r_1-r_2'}{2} \left(r'_3 + \frac{r_1+r_2'}{2}\right)\right)$
10.  $n_2$ ;  $n_2\left(S'_3; r'_3 - \frac{r_1-r_2'}{2} \left(r'_3 - \frac{r_1+r_2'}{2}\right)\right)$
11.  $O'$ ;  $O' \in (m \cap n)$
12.  $l'$ ;  $l'\left(O'; \frac{r_1-r_2'}{2} \left(\frac{r_1+r_2'}{2}\right)\right)$
13.  $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ :  $l'_{kružnice} \rightarrow l_{kružnice}$

<sup>7</sup>V kruhové inverzi  $\text{Inv}(\omega)$  přejdou kružnice  $k_1, k_2$  na soustředné kružnice  $k'_1(S'; r'_1), k'_2(S'; r'_2)$  a kružnice  $k_3$  na kružnici  $k'_3(S'_3; r'_3)$ .

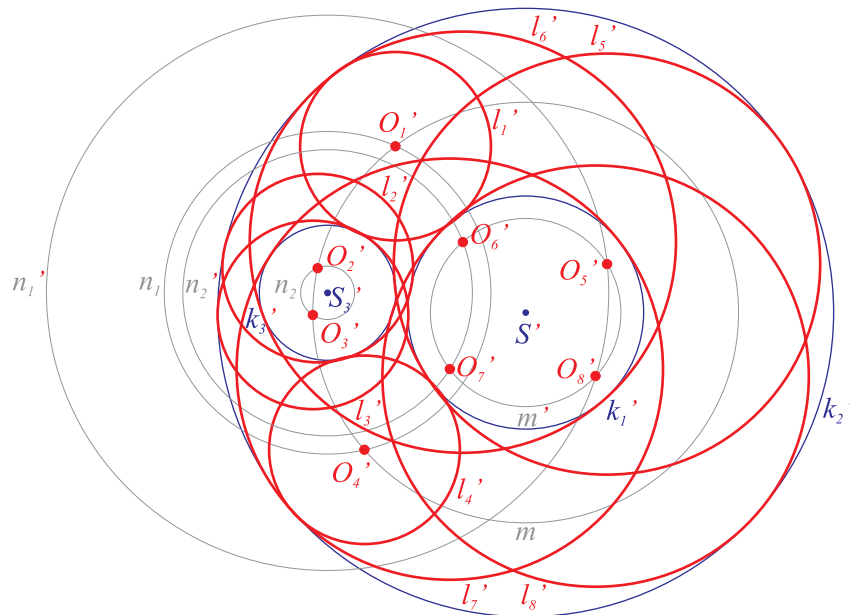
**Konstrukce**

1. krok konstrukce



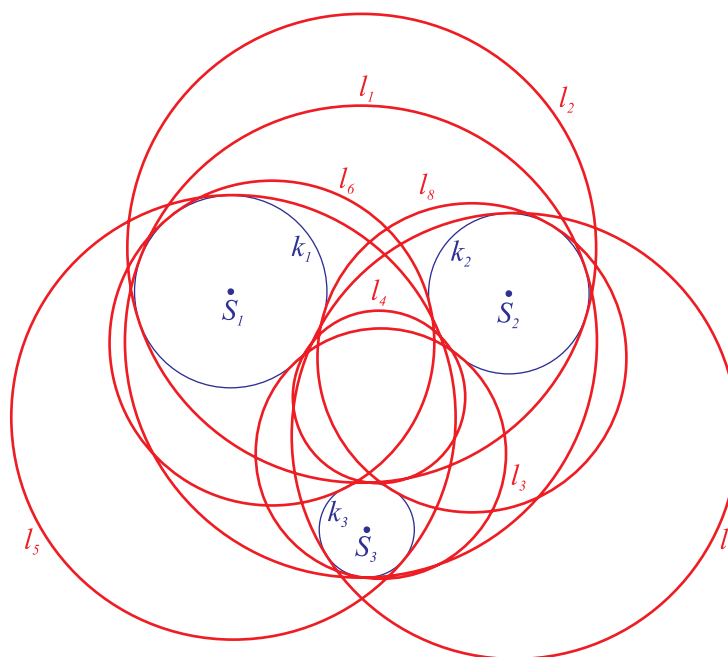
Obrázek 4.9: Převod kružnic  $k_1, k_2$  na soustředné

2. krok konstrukce



Obrázek 4.10: Vyřešení vnitřní úlohy

3. krok konstrukce



Obrázek 4.11: Výsledné řešení úlohy

### Diskuse

Soustředné kružnice  $n_1, n_2$  mohou mít s množinou  $m$  až čtyři společné body, stejně tak i kružnice  $n'_1, n'_2$  s množinou  $m'$ . Z toho vyplývá, že daná úloha může mít až osm řešení.

## 4.3 Vzájemné polohy vstupních prvků

Kapitola má za úkol seznámit čtenáře s možnými polohami vstupních prvků jednotlivých typů Apolloniovy úlohy. Uveden je pouze jejich výčet bez řešení s návrhem metody, kterou by bylo možno úlohu řešit a počet řešení, pokud ho daná úloha má. Všechny tyto speciální případy jsou k dispozici s kompletním řešením ve webovské učebnici.

### Apolloniova úloha typu BBB

Sestrojte kružnici  $l$ , která prochází body  $A, B, C$ .

1. body $A, B, C$ leží na jedné přímce		0 řešení
2. body $A, B, C$ neleží na jedné přímce	řešíme metodou MBDV	1 řešení

**Apolloniova úloha typu BBp**

Sestrojte kružnici  $l$ , která prochází body  $A, B$  a dotýká se přímky  $p$ .

1. body $A, B$ leží na přímce $p$		0 řešení
2. právě jeden z bodů $A, B$ leží na přímce $p$	Pappova úloha typu $Bp_T$	1 řešení
3. žádný z bodů $A, B$ neleží na přímce $p$		
a. body $A, B$ leží v opačné polorovině určené přímkou $p$		0 řešení
b. body $A, B$ leží ve stejné polorovině určené přímkou $p$		
přímka $AB$ je rovnoběžná s přímkou $p$	řešíme metodou MBDV	1 řešení
přímka $AB$ je různoběžná s přímkou $p$	řešíme s využitím mocnosti bodu ke kružnici nebo kruhové inverze	2 řešení 2 řešení

**Apolloniova úloha typu BBk**

Sestrojte kružnici  $l$ , která prochází body  $A, B$  a dotýká se kružnice  $k(S, r)$ .

1. body $A, B$ leží na kružnici $k$		0 řešení
2. právě jeden z bodů $A, B$ leží na kružnici $k$	Pappova úloha typu $Bk_T$	1 řešení
3. žádný z bodů $A, B$ neleží na kružnici $k$		
a. jeden z bodů leží vně a druhý uvnitř kružnice $k$		0 řešení
b. oba body leží vně nebo uvnitř kružnice $k$	řešíme s využitím potenčního středu nebo kruhovou inverzí	2 řešení 2 řešení

**Apolloniova úloha typu Bpp**

Sestrojte kružnici  $l$ , která prochází bodem  $B$  a dotýká se přímkami  $p_1, p_2$ .

1. přímky $p_1, p_2$ jsou rovnoběžné		
a. bod $B$ neleží na žádné ze zadaných přímk, leží vně pásu určeného přímkami $p_1, p_2$		0 řešení
b. bod $B$ leží na jedné ze zadaných přímk	Pappova úloha typu $pp_T$	1 řešení
c. bod $B$ neleží na žádné ze zadaných přímk, leží uvnitř pásu určeného přímkami $p_1, p_2$	řešíme metodou MBDV	2 řešení

2. přímky $p_1, p_2$ jsou různoběžné		
a. bod $B$ je průsečíkem přímek $p_1, p_2$		0 řešení
b. bod $B$ leží na jedné ze zadaných přímek	Pappova úloha typu $pp_T$	2 řešení
c. bod $B$ neleží na žádné ze zadaných přímek	řešíme pomocí stejnolehlosti	2 řešení
	nebo kruhové inverze	2 řešení

**Apolloniova úloha typu Bpk**

Sestrojte kružnici  $l$ , která prochází bodem  $B$  a dotýká se přímky  $p$  a kružnice  $k(S, r)$ .

1. bod $B$ je společným bodem přímky $p$ a kružnice $k$		
a. přímka $p$ je sečnou kružnice $k$		0 řešení
b. přímka $p$ je tečnou kružnice $k$		$\infty$
2. bod $B$ náleží přímce $p$ a nenáleží kružnici $k$	Pappova úloha typu $kp_T$	2 řešení
3. bod $B$ náleží kružnici $k$ a nenáleží přímce $p$	Pappova úloha typu $pk_T$	2 řešení
4. bod $B$ nenáleží přímce $p$ ani kružnici $k$		
a. přímka $p$ je vnější přímkou kružnice $k$		
bod $B$ leží uvnitř kružnice $k$		0 řešení
bod $B$ a kružnice $k$ leží v opačných polorovinách určených přímkou $p$		0 řešení
bod $B$ a kružnice $k$ leží v téže polorovině určené přímkou $p$ , $B$ leží vně kružnice $k$	řešíme kruhovou inverzí	4 řešení
b. přímka $p$ je tečnou kružnice $k$		
bod $B$ leží uvnitř kružnice $k$	řešíme metodou MBDV	1 řešení
bod $B$ a kružnice $k$ leží v opačných polorovinách určených přímkou $p$	řešíme metodou MBDV	1 řešení
bod $B$ a kružnice $k$ leží v téže polorovině určené přímkou $p$ , $B$ leží vně kružnice $k$	řešíme kruhovou inverzí	3 řešení
c. přímka $p$ je sečnou kružnice $k$	řešíme kruhovou inverzí	2 řešení

**Apolloniova úloha typu Bkk**

Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká kružnic  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$  a prochází bodem  $B$ .

1. kružnice $k_1, k_2$ jsou soustředné, $r_1 < r_2$		
a. bod $B$ leží uvnitř kružnice $k_1$		0 řešení

b. bod $B$ leží vně kružnice $k_2$		0 řešení
c. bod $B$ leží na jedné z kružnic $k_1, k_2$	Pappova úloha typu $kk_T$	2 řešení
d. bod $B$ leží v mezikruží	řešíme metodou MBDV	4 řešení
2. kružnice $k_1, k_2$ jsou nesoustředné, $r_1 < r_2$ , kružnice $k_1$ leží uvnitř kružnice $k_2$		
a. bod $B$ leží uvnitř kružnice $k_1$		0 řešení
b. bod $B$ leží vně kružnice $k_2$		0 řešení
c. bod $B$ leží na jedné z kružnic $k_1, k_2$	Pappova úloha typu $kk_T$	2 řešení
d. bod $B$ leží vně kružnice $k_1$ a uvnitř $k_2$	řešíme kruhovou inverzí	4 řešení
3. kružnice $k_1, k_2$ mají vnitřní dotyk		
a. bod $B$ je bodem dotyku kružnic $k_1, k_2$		$\infty$
b. bod $B$ leží na jedné z kružnic $k_1, k_2$	Pappova úloha typu $kk_T$	1 řešení
c. bod $B$ nenáleží žádné z kružnic $k_1, k_2$	řešíme kruhovou inverzí	3 řešení
4. kružnice $k_1, k_2$ mají vnější dotyk		
a. bod $B$ je bodem dotyku kružnic $k_1, k_2$		$\infty$
b. bod $B$ leží na jedné z kružnic $k_1, k_2$	Pappova úloha typu $kk_T$	1 řešení
c. bod $B$ leží vně obou kružnic $k_1, k_2$	řešíme kruhovou inverzí	3 řešení
5. kružnice $k_1, k_2$ se protínají		
a. bod $B$ je jedním z bodů průniku kružnic $k_1, k_2$		0 řešení
b. bod $B$ leží na jedné z kružnic $k_1, k_2$	Pappova úloha typu $kk_T$	2 řešení
c. bod $B$ leží vně obou kružnic $k_1, k_2$	řešíme kruhovou inverzí	2 řešení
6. kružnice $k_1, k_2$ leží vně sebe		
a. bod $B$ leží uvnitř jedné z kružnic $k_1, k_2$		0 řešení
b. bod $B$ leží na jedné z kružnic $k_1, k_2$	Pappova úloha typu $kk_T$	2 řešení
c. bod $B$ leží vně obou kružnic $k_1, k_2$	řešíme kruhovou inverzí	4 řešení

**Apolloniova úloha typu ppp**

Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká tří přímek  $p_1, p_2, p_3$ .

1. přímky $p_1, p_2, p_3$ jsou rovnoběžné		0 řešení
2. přímky $p_1, p_2, p_3$ jsou různoběžné		
a. protínají se v jednom bodě		0 řešení
b. protínají se ve třech různých bodech	řešíme metodou MBDV	4 řešení
3. dvě ze zadaných přímek jsou rovnoběžné, třetí je s nimi různoběžná	řešíme metodou MBDV	2 řešení

**Apolloniova úloha typu ppk**

Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká přímk  $p_1, p_2$  a kružnice  $k(S, r)$ .

1. přímky $p_1, p_2$ jsou rovnoběžné		
a. kružnice $k$ leží vně pásu určeného přímkami $p_1, p_2$		0 řešení
b. přímka $p_1$ nebo $p_2$ je tečnou kružnice $k$		
střed kružnice $k$ leží vně pásu určeného přímkami $p_1, p_2$	řešíme metodou MBDV	1 řešení
střed kružnice $k$ leží uvnitř pásu určeného přímkami $p_1, p_2$	řešíme metodou MBDV	3 řešení
c. jedna z přímk $p_1, p_2$ je sečnou kružnice $k$ nebo jsou $p_1, p_2$ tečnami kružnice $k$	řešíme metodou MBDV	2 řešení
d. přímky $p_1, p_2$ jsou sečnami kružnice $k$	řešíme metodou MBDV	4 řešení
e. kružnice $k$ leží uvnitř pásu určeného přímkami $p_1, p_2$	řešíme metodou MBDV	4 řešení
2. přímky $p_1, p_2$ jsou různoběžné		
a. kružnice $k$ nemá s přímkami $p_1, p_2$ žádný společný bod	řešíme pomocí stejnolehlosti	4 řešení
b. kružnice $k$ se dotýká přímk $p_1$ a/nebo přímk $p_2$ právě v jednom bodě	Pappova úloha typu $pp_T$	4 řešení
c. kružnice $k$ protíná přímk $p_1$ nebo $p_2$	řešíme pomocí stejnolehlosti	4 řešení
d. kružnice $k$ se dotýká přímk $p_1$ a protíná přímk $p_2$	řešíme pomocí stejnolehlosti	6 řešení
e. kružnice $k$ protíná přímk $p_1, p_2$	řešíme pomocí stejnolehlosti	8 řešení

**Apolloniova úloha typu pkk**

Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká kružnic  $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$  a přímk  $p$ .

1. kružnice $k_1, k_2$ jsou soustředné		
a. přímka $p$ je tětivou alespoň jedné z kružnic $k_1, k_2$	řešíme metodou MBDV	4 řešení
b. přímka $p$ neprotíná ani jednu z kružnic $k_1, k_2$		0 řešení
2. kružnice $k_1, k_2$ jsou nesoustředné		

a. přímka $p$ má s kružnicemi $k_1, k_2$ jeden společný bod		$\infty$
b. přímka $p$ má s kružnicemi $k_1, k_2$ dva společné body		0 řešení
c. přímka $p$ má s kružnicemi $k_1, k_2$ tři společné body		0 řešení
d. přímka $p$ nemá s kružnicemi $k_1, k_2$ žádný společný bod		
kružnice leží ve stejné polorovině řešíme	kruhovou inverzí	8 řešení
kružnice leží v opačných polorovinách		0 řešení

**Apolloniova úloha typu kkk**

Sestrojte kružnici  $l$ , která se dotýká kružnic  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$ ,  $k_3(S_3, r_3)$ .

1. kružnice $k_1, k_2, k_3$ jsou soustředné, $r_1 < r_2 < r_3$		0 řešení
2. kružnice $k_1, k_2$ jsou soustředné, $r_1 < r_2$		
a. kružnice $k_3$ nemá s kružnicemi $k_1, k_2$ žádný dotyk		
kružnice $k_3$ neleží v mezikruží určeném kružnicemi $k_1, k_2$		0 řešení
kružnice $k_3$ leží v mezikruží určeném kružnicemi $k_1, k_2$	řešíme metodou MBDV	8 řešení
b. kružnice $k_3$ se dotýká kružnice $k_1$ nebo $k_2$ právě v jednom bodě	řešíme metodou MBDV	6 řešení
c. kružnice $k_3$ protíná kružnici $k_2$		4 řešení
d. kružnice $k_3$ protíná kružnice $k_1, k_2$		4 řešení
3. kružnice $k_1, k_2, k_3$ jsou nesoustředné		
a. kružnice $k_1, k_2, k_3$ nemají žádný společný bod		8 řešení
b. kružnice $k_1, k_2, k_3$ se protínají v jednom bodě		4 řešení
c. kružnice $k_1, k_2$ se protínají ve dvou bodech		4 řešení

# Kapitola 5

## Uplatnění učebnice v praxi

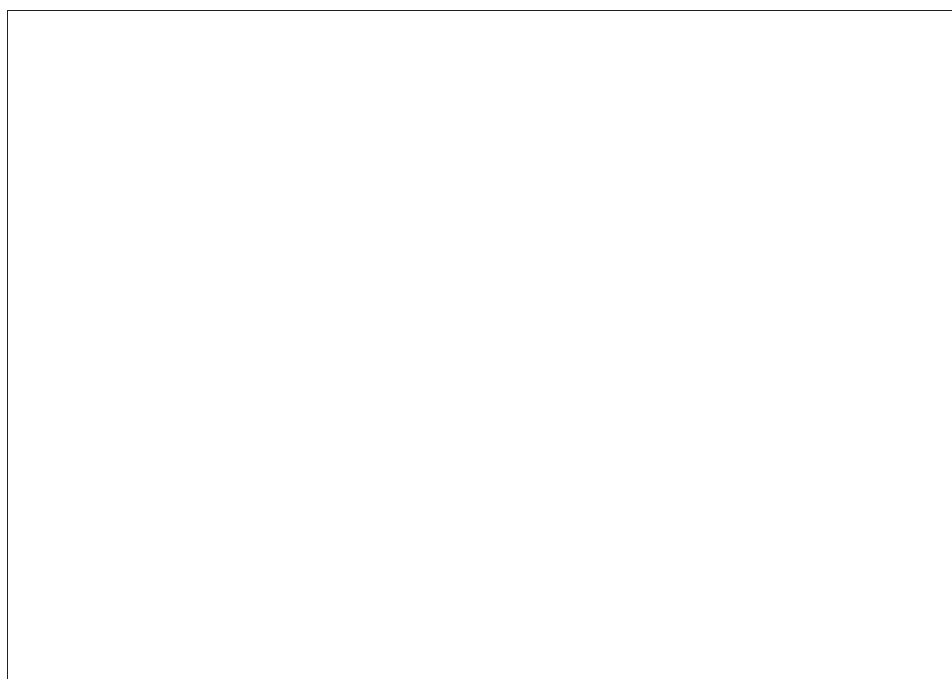
Webovskou učebnici lze využít ve dvou oblastech vyučování – při **samostudiu** nebo pro **podporu běžné výuky**. Samostudiem se rozumí buď distanční výuka, kdy nemá student z jistých důvodů možnost návštěvy klasické školy (např. nemoc) nebo samostatná činnost v rámci výuky řízené a organizované učitelem. Samostatná práce je nejefektivnější formou vyučování. Podněcuje studenty používat vědomosti a dovednosti ve chvíli, kdy se student spoléhá jen sám na sebe. Nedílnou součástí studia je také okamžitá zpětná vazba, která zajišťuje získání vědomostí bez mezer až do osvojení učiva. Funkci zpětné vazby v učebnici mají interaktivní cvičení vytvořená v programu Cinderella. Vedle výkladu teorie, potřebné pro řešení Apolloniových úloh a jejich samotné řešení, student nalezne také praktické příklady, na kterých si ověří probranou látku.

Podpora běžné výuky závisí na technickém vybavení, které má vyučující k dispozici. Přednáška je vždy vedena učitelem, webová učebnice slouží pouze ke zvýšení efektivity výuky. Umožňuje studentovi vytvořit si konkrétní představu a ulehčuje tím učiteli výklad. Vizualizace hraje velmi významnou roli a s pomocí počítače přináší nové možnosti v učení. Člověk má neomezenou schopnost si pamatovat, ale zároveň má také omezenou tzv. aktivní paměť, kterou při učení nedokáže překročit. Učíme-li se nějaký nový abstraktní pojem, spotřebováváme velkou část své aktuální paměťové kapacity na představování si dané situace, na které je pojem vysvětlován. Vizualizace pomáhá část aktuální paměti uvolnit ve prospěch dalších mentálních činností (jako je indukce, abstrakce, dedukce apod). Je všeobecně známo, že čím více smysly člověk vnímá skutečnost, tím lépe je jeho mozek stimulován a tím lépe se učí. Zapojení dominantní zrakové složky přispívá k lepšímu vnímání skutečnosti. Přínos dynamiky obsažené v geometrickém software je především v poskytnutí bohatšího prostředí pro učení.

## 5.1 Seznámení s interaktivní tabulí

V závislosti na technickém vybavení se nabízí několik možností využití webovské učebnice. Jednou z nich je prostá prezentace promítaná dataprojektorem, která slouží učitelům pouze jako doplnění výkladu. Druhou možností, kterou se zde budeme podrobněji zabývat, je využití interaktivní tabule.

Současný trh nabízí několik typů interaktivních tabulí. Webovská učebnice byla vyzkoušena na SMART Board interaktivní bílé tabuli pro přední projekci (typ SMART Board 580PRO<sup>1</sup>, viz Obrázek 5.1) v gymnáziu na Mikulášském náměstí v Plzni. Základní informace o interaktivní tabuli a možnost jejího vyzkoušení zajistil pan učitel Mgr. Petr Zrostlík. Interaktivní bílá tabule SMART Board je výrobkem kanadské firmy SMART Technologies<sup>2</sup>, který spojuje výhody projekční plochy, bílé popisovatelné tabule a dotykové obrazovky. Zvyšuje přehlednost výkladu a tím i pozornost a zájem žáků či studentů.



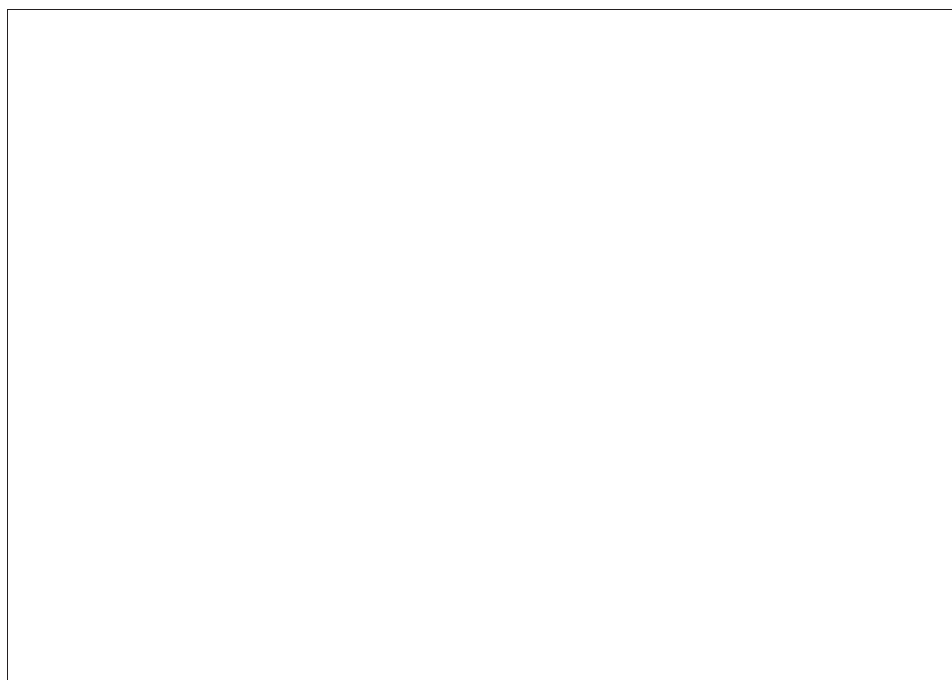
Obrázek 5.1: SMART Board interaktivní bílá tabule

<sup>1</sup>Technické údaje naleznete na adrese <http://www.avmedia.cz/User/Prodej/InteraktivniTabule/InteraktivniTabuleProduktovyList.asp?id=SMASB580PRO>.

<sup>2</sup>Společnost SMART Technologies Inc., se sídlem v Calgary, byla založena v srpnu 1987 a jako první zahájila rozvoj trhu s interaktivními tabulemi. Je leaderem mezi výrobci interaktivních tabulí i dalších pomůcek. Pro ČR zajišťuje distribuci interaktivní tabule SMART Board firma AV Media, s.r.o.

Interaktivní tabule má odolný povrch s antireflexní vrstvou a může být zavěšena na stěně nebo na speciálním mobilním stojanu, který je velmi stabilní. Tabule tak vyhovuje potřebám klasické školní třídy a není třeba se obávat jejího poškození. Obraz je na tabuli přenášen běžným dataprojektorem, umístěným většinou pod stropem místnosti. Počítač je ovládán dotykem ruky nebo fixu přímo na tabuli, která funguje jako velký tablet, na který se promítá obraz.

Tabule se skládá z bílé projekční plochy (o rozměrech  $109,2 \times 146,1$  cm) a poličky s nástroji (viz Obrázek 5.2), které slouží k ovládní tabule a editaci poznámek. Poznámky se na povrch tabule píše pomocí fixů<sup>3</sup> z poličky na fixy a mažou elektronickým zmizíkem. Stačí pouze sejmout zvolený nástroj z poličky, čímž se funkce pera či zmizíku aktivuje a pak je možno psát či kreslit jako na obyčejnou tabuli.

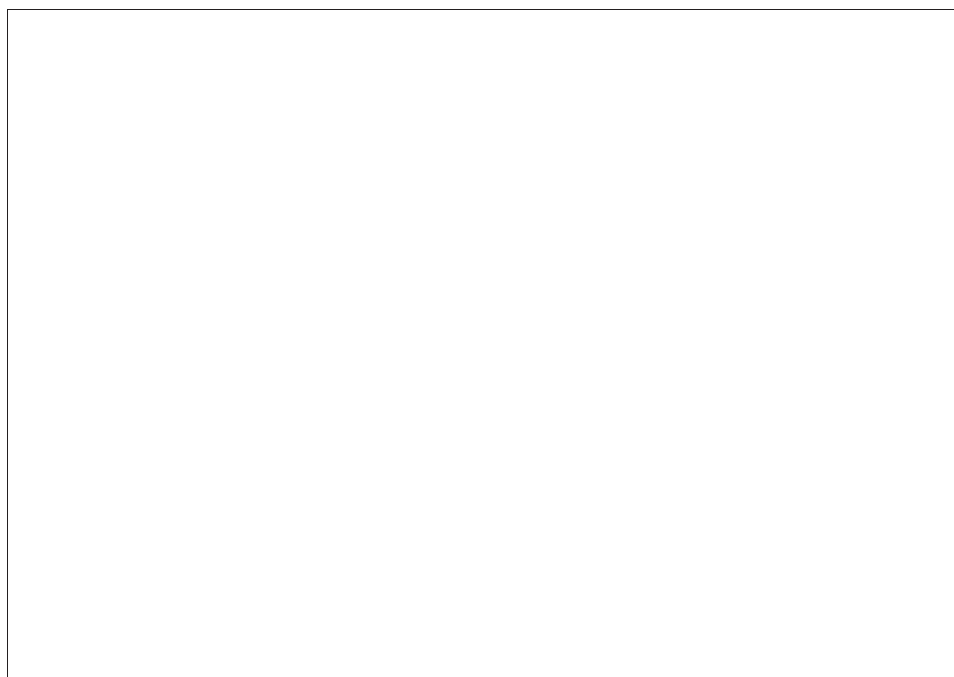


Obrázek 5.2: Polička s nástroji

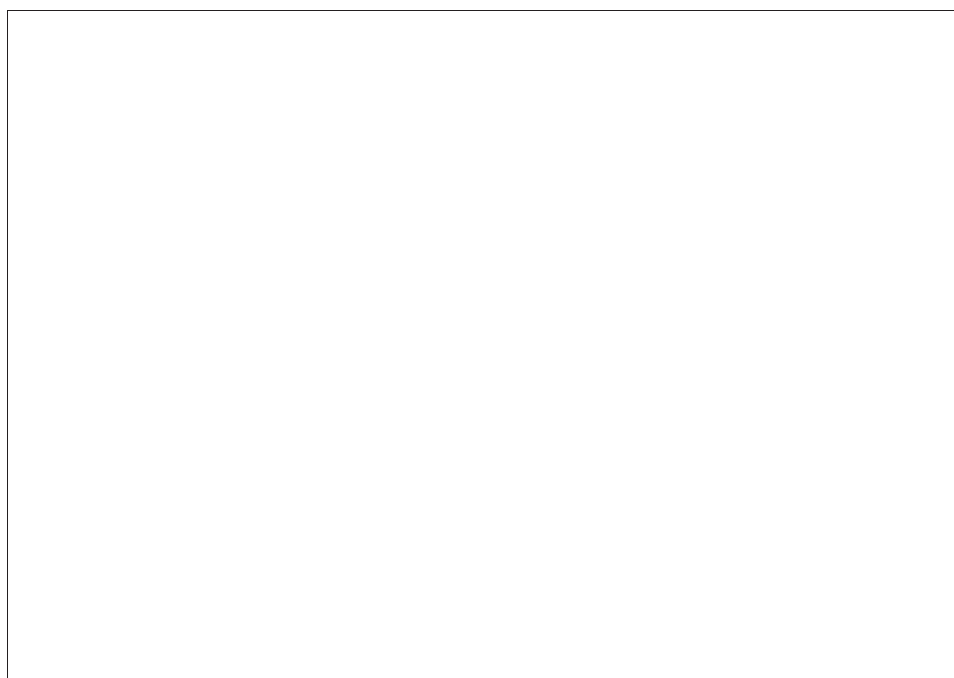
Jakoukoli aplikaci, která je promítána na tabuli, je možno ovládat prstem (viz Obrázek 5.4) stejně dobře jako myší. To zajišťuje software SMART Board Software Service<sup>4</sup> dodávaný společně s interaktivní tabulí. Jedná se o ovládací prvek, který běží na pozadí a převádí kontakt s tabulí na kliknutí myši a poznámky psané fixem z poličky na fixy na virtuální elektronický inkoust (viz Obrázek 5.3).

<sup>3</sup>K dispozici jsou čtyři základní barvy – černá, modrá, červená a zelená.

<sup>4</sup>Více na <http://www.smarttech.com/sbsoftware>.

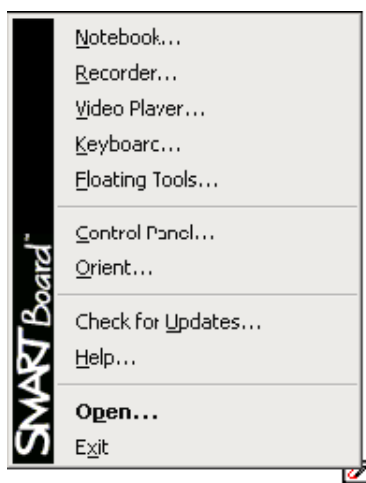


Obrázek 5.3: SMART Board – psaní na tabuli



Obrázek 5.4: SMART Board – ovládání dotykem

Širokou nabídku aplikací, které usnadňují konfiguraci a práci s tabulí, poskytuje panel SMART Board (viz Obrázek 5.5). Umožňuje snadný přístup k nastavení a ovládacím panelům tabule a jednoduché spuštění aplikací pro práci s tabulí a vytváření interaktivních výukových hodin. Mezi nabízené aplikace patří poznámkový blok, záznam, přehrávač, virtuální klávesnice a plovoucí panel nástrojů, který obsahuje ikony pro přístup k pokročilým funkcím softwaru pro SMART Board.



Obrázek 5.5: Panel nástrojů SMART Board

Pro obousměrný přenos a zpracování informací mezi interaktivní dotykovou plochou a počítačem slouží aplikace *SMART Notebook*. Software umožňuje vytváření, organizování, ukládání a tisknutí poznámek a je možné ho použít nejen při práci na interaktivní tabuli, ale také na osobním počítači. Obsahuje nástroje pro vytváření objektů, textu a obrázků a galerii obrázků a schémat (cca 5000 objektů). Podobně jako v Microsoft PowerPoint lze pomocí tohoto programu vytvářet a následně i spouštět prezentace.

Program *SMART Recorder* zaznamenává vše, co se děje na interaktivní bílé tabuli SMART Board bez ohledu na to, které aplikace jsou používány. Pokud je k počítači navíc připojen mikrofón, je možné nahrávat i zvuk synchronizovaný s činností na tabuli. Následné přehrání záznamu zajišťuje software Windows Media Player<sup>5</sup>.

Praktickou pomůckou pro přehrávání a anotování video záznamu a grafiky je aplikace *SMART Video Player*, která je určena nejen pro přehrávání záznamu, ale i pro současnou tvorbu poznámek na právě spuštěný videozáznam. Navíc poskytuje možnost promítat výstup z obrazového hardwaru připojeného k počítači<sup>6</sup>. Aplikaci je možné

<sup>5</sup>Volně dostupný přehrávač záznamů.

<sup>6</sup>Např. z video kamery, projektoru, scanneru nebo vizualizéru.

nakonfigurovat tak, aby se přehrávání videa vždy při tvorbě poznámky přerušilo, nebo aby poznámky během přehrávání videa pomalu mizely.

Dalším významným pomocníkem je virtuální klávesnice *SMART Keyboard*. Ta je určena pro zápis typizovaného písma do spuštěných aplikací<sup>7</sup>, použitím klávesnice promítané na interaktivní tabuli. Pokud neradi píšete na klávesnici, je možno psát rukou do oblasti pro rozpoznání rukopisu. Klávesnice rozpozná a převede rukopis na typizovaný text, který lze dále upravit, nebo rovnou vložit do dialogového okna nebo aplikace (stejně jako přímým zápisem z klávesnice).

Kdykoli je aktivní software pro SMART Board, běží v pozadí software *SMART Aware*. V takovém případě poznámky napsané nebo nakreslené na tabuli fixem z poličky na fixy nebudou pouhými poznámkami napsanými na soubor, ale automaticky se změní v komponent souboru. Je-li aplikace aktivní a použijeme fixy z poličky na fixy, zobrazí se panel nástrojů pro zaznamenání a uložení. Pomocí tohoto panelu nástrojů je možno poznámky v aktuálním dokumentu nebo sešitu uložit jako typizovaný text nebo jako grafiku. *Smart Aware* funguje s mnoha oblíbenými konferenčními, grafickými, textovými, tabulkovými a prezentačními aplikacemi. I v aplikacích, které program *Aware* nepodporuje, lze konvertovat rukou psaný text a vložit jej do souboru jako typizované písmo. Stačí zatlačit na poznámky přibližně na tři vteřiny a ze zobrazené nabídky vybrat „Inject notes here“ (vložit poznámky zde, viz Obrázek 5.6). Rukopis se převede na typizované písmo a vloží se na pozici kurzoru do podkladové aplikace.



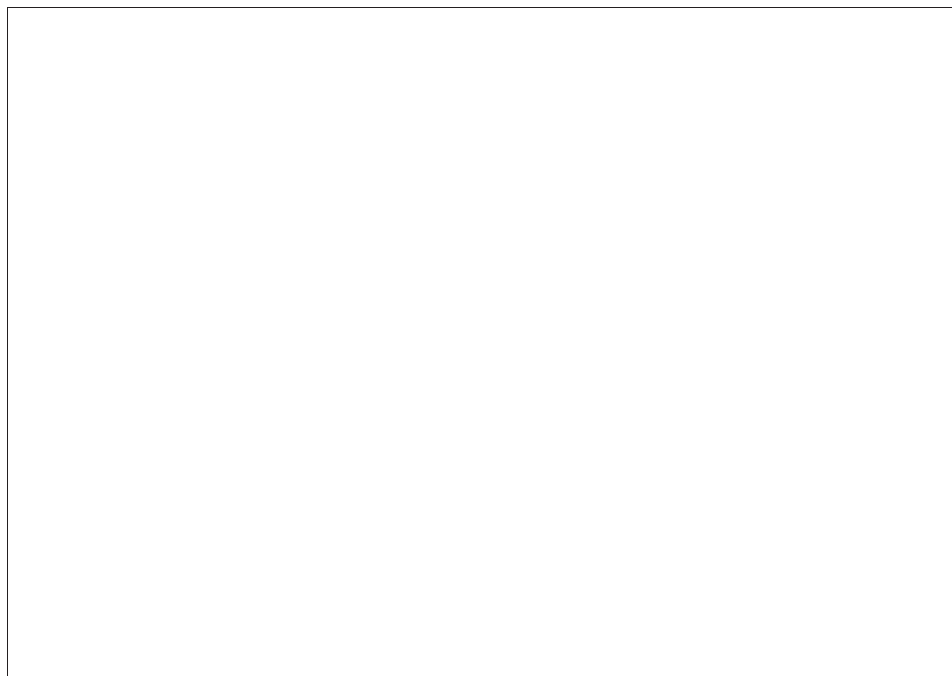
Obrázek 5.6: Vložení typizovaného textu

Další výhodou je snadný přístup k ovládacímu panelu (*Control Panel*), kde je možné nastavit vlastnosti nástrojů z poličky na fixy, plovoucího panelu nástrojů, aplikace *Aware* apod. Např. lze kterémukoli fixu změnit sílu, barvu a průhlednost čáry, změnit velikost zmizíku, funkce tlačítek na poličce, či přiřadit nástroje plovoucímu panelu nástrojů (*Floating Tools*).

Pro samotnou prezentaci pak obsahuje software SMART Board několik užitečných nástrojů, jako je např. lupa, ukazovátko, či stahovací roleta. Roletu je vhodné použít k zacílení pozornosti posluchačů. Je možno ji umístit na aktuální stranu souboru Notebook

<sup>7</sup>Např. je-li potřeba pojmenovat soubor, přejmenovat složku apod.

u které nechceme, aby studenti viděli celý obsah najednou a postupným stahováním odkrývat další text a grafiku (viz Obrázek 5.7).



Obrázek 5.7: SMART Board – nástroj roletka

Interaktivní tabule má celou řadu výhod. Vyžaduje však zkušeného učitele, který je přístupný novým věcem a je ochotný experimentovat. Hodina s využitím interaktivní tabule dostává zcela jiný ráz a i časové rozvržení je odlišné od hodiny s využitím klasických pomůcek. Příprava dobré hodiny s interaktivní tabulí stojí zhruba třikrát více času než příprava hodiny klasické. Jen málo učitelů je ochotno věnovat přípravě své volno a hodinu si připravit do posledního detailu. Bez kvalitní přípravy však interaktivita tabule ztrácí smysl a hodina nepřináší požadované výsledky.

Ačkoli jádrem programu Státní informační politiky je zásadní změna postavení učitele a jeho další vzdělání jako nezbytná součást rozvoje, jsou náklady na přípravu učitelů a samotné pořízení interaktivní tabule natolik vysoké, že si málokterá škola v současné době může takový „luxus“ dovolit. Navíc podle metodického pokynu č.j. 27 419/2004-55 vydaného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy stanovující „Standard ICT služeb ve škole“ a náležitosti dokumentu „ICT plán školy“ je čerpání účelově určených finančních prostředků státního rozpočtu v rámci SIPVZ vztahujících se k interaktivní tabuli následující: *Zařízení typu dotyková tabule (nebo jiné odpovídající zařízení) se zatím uvažuje jako nadstandardní a s jeho zařazením do standardu se počítá v budoucnu.*

I přesto je však v České republice několik desítek škol, které již dotykovou tabuli využívají. Projekt implementace interaktivních tabulí do škol je podpořen MŠMT informačním centrem SIPVZ a Mezinárodním grantem SMART Board 2004 vypsaném společností AV Media, s.r.o. společně s kanadskou společností SMART Technologies Inc. Díky tomuto grantu bylo školám v České republice předáno 100 interaktivních tabulí SMART Board. Obdobný projekt proběhl i v roce 2003, kdy bylo mezi školy rozděleno 50 interaktivních tabulí. Rozvoj českého školství tak byl během dvou let podpořen částkou dosahující 10 mil. Kč.

## 5.2 Prezentace učebnice na interaktivní tabuli

Ve srovnání s pouhým promítáním prezentace dataprojektorem má prezentace na interaktivní tabuli řadu výhod. Jednou z největších výhod je ovládání počítače přímo na tabuli. Učitel tak může vykládat látku jako před běžnou tabulí, aniž by se skláněl k monitoru počítače, s využitím všech vlastností dynamické geometrie. Vzhledem k odolnosti povrchu tabule se učitel nemusí obávat přizvat k tabuli studenty, u kterých zapojením do výuky roste motivace a hodina se pro ně stává zajímavější.

Učebnici lze s úspěchem uplatnit nejen při přednáškách, ale i při cvičeních. Učitel může studenty pozvat k tabuli, kde mají možnost načrtnout řešení konstrukce ještě před tím, než učitel spustí animaci apletu. Pokud se učitel nespokojí s pouhým náčrtem, může otevřít aplikaci Cabri, která je na interaktivní tabuli velmi dobře ovladatelná. Student pomocí tohoto programu narýsuje požadovanou konstrukci stejně lehce jako klasickými pomůckami do sešitu, avšak konstrukce je mnohem přesnější a zachovává si všechny dynamické vlastnosti (pokud student rýsuje korektně).

Interaktivní cvičení vytvořená v programu Cinderella se dají využít spíše při zkoušení nebo ještě lépe při samostatné práci. Řešení interaktivních cvičení na tabuli ztrácí efektivitu, jelikož zaměstnává pouze jediného žáka. Nejlepších výsledků při řešení interaktivních cvičení lze dosáhnout, pokud má každý student k dispozici vlastní počítač.

Webovská učebnice byla vyzkoušena na interaktivní tabuli pouze mimo výuku. Z vlastností tabule a jejích funkcí však plyne předpoklad, že by se dala dobře využít při výkladu i procvičování látky týkající se Apolloniových úloh. Výuka obohacená prezentací učebnice na interaktivní tabuli ve spojení s programem Cabri se stává zajímavější nejen pro studenty, ale i pro učitele.

### 5.3 Využití učebnice na různých stupních škol

Webovská učebnice je primárně určena pro studenty vysokých škol. Některé z úloh lze však využít na školách základních či středních. Již v šesté třídě ZŠ se žáci učí sestrojít kružnici opsanou a vepsanou trojúhelníku, což jsou Apolloniovy úlohy typu  $BBB$  a  $ppp$ . V úloze  $ppp$  se žáci zabývají pouze případem, kdy jsou přímky různoběžné a protínají se ve třech různých bodech. Nalézt v tomto ročníku dokáží pouze jediné řešení a tím je kružnice vepsaná vzniklému trojúhelníku. S názvem Apolloniova úloha ani s jejím zadáním se však žáci neseťkají. Úlohy jsou zadávány ve formě slovní úlohy, např.:

*Mezi třemi záhony je trojúhelníkový trávník. Babička na něm chce napást kozu.*

- Kam má zarazit kolík  $k$  uvázání kozy, když chce aby koza spásla co největší kus trávníku, ale nedosáhla na žádný záhon?*
- Narýsuj plánec trávníku a sestroj takový bod – místo pro kolík.*
- Vyznač ten kus trávníku, který přivázaná koza může spást.*

V osmém ročníku ZŠ se žáci seznámí s definicí kružnice jako množiny bodů dané vlastností<sup>8</sup>. Dozví se o vlastnostech kružnice, vzájemných polohách kružnice a přímky (sečna, tečna, vnější přímka) a vzájemných polohách dvou kružnic. Dále se naučí konstrukci tečny v bodě dotyku a konstrukci tečny z bodu ke kružnici s využitím Thaletovy věty. Kromě kružnice žáci umí sestrojovat i další množiny bodů dané vlastnosti jako je osa úsečky, osa úhlu, osa pásu a ekvidistanta přímky. Tím se žákům dostávají znalosti potřebné pro řešení Papových úloh typu  $Bp_T$ ,  $pp_T$ ,  $Bk_T$ ,  $pk_T$  a speciálních případů úloh Apolloniovy, jež lze řešit metodou množin bodů dané vlastnosti. Bohužel však většina žáků není schopna operací s množinami bodů a složitější úlohy jsou tudíž předmětem pouze matematických soutěží, které jsou určeny pro žáky nadanější.

Složitějších úvah jsou schopni až studenti gymnázií, kteří řeší i úlohy s využitím geometrického zobrazení – stejnolehlosti. Obecnou úlohu Apolloniovu však řeší pouze studenti, kteří mají rozšířenou výuku matematiky a v jejichž učebním plánu je zařazena kruhová inverze.

---

<sup>8</sup>Kružnice  $k(S; r)$  je množina všech bodů  $X$  v rovině, které mají od bodu  $S$  vzdálenost  $|SX| = r > 0$ .

# Závěr

Cílem webovské učebnice spolu s tímto textem bylo podat kompletní přehled možností využití a zpracování dynamické geometrie na počítači. Zároveň by měla práce také sloužit jako návod jak vytvořit vlastní webovskou učebnici. Snahou bylo vybrat co nejvhodnější a nejefektivnější technologie k prezentaci geometrických témat na Internetu.

Téma Apolloniovy úlohy bylo záměrně zvoleno z důvodu jeho rozsáhlosti a oblibě, které se již staletí těší. Apolloniovy úlohy jsou problémem, při jehož řešení lze využít široké spektrum znalostí a vědomostí, jež si při jejich řešení student do značné míry upevní. Problematika těchto úloh mj. pomáhá uspořádat geometrické znalosti studentů do určitého systému.

Řešení některých typů Apolloniových úloh, zvláště využitím metody geometrického zobrazení – kruhové inverze, je velmi náročné jak na samotnou konstrukci, tak na vytvoření představ, které jsou důležité pro správné pochopení tématu. To usnadňují zejména dynamické konstrukce, které nejsou pouhými statickými obrázky, na které jsme zvyklí z klasických učebnic. Do konstrukce lze v kterémkoli okamžiku zasáhnout a ovlivnit tak zcela její průběh. Význam webovské učebnice navíc umocňuje zpětná vazba, která je zprostředkována interaktivními cvičeními.

*Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu diplomové práce RNDr. Miroslavu Lávičkovi, Ph.D. za čas, který věnoval konzultacím a za jeho konstruktivní připomínky při vzniku diplomové práce.*

# Literatura

- [1] AV MEDIA: *AV Media – Komunikace obrazem*. 2002 [online]. Dostupné na WWW <<http://www.avmedia.cz>>
- [2] AV MEDIA: *SMART Board – Návod k použití*. 2004 [online]. Dostupné na WWW <<http://www.avmedia.cz/CustomerData/KeStazeni/UzivatelскеPrirucky/SMARTBoard2003.pdf>>
- [3] BOČEK, L. – ZHOUF, J.: *Praxe učitele matematiky – fyziky – informatiky*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1995, ISBN 80-85849-90-9, 48s.
- [4] HLADÍKOVÁ, A.: *Diplomová práce – Apolloniovy úlohy*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 1998, 86 s.
- [5] HOLUBÁŘ, J.: *O metodách rovinných konstrukcí – Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků v Praze, 1940, 110 s.
- [6] LÁVIČKA, M.: *Geometrie I. – Základy geometrie v rovině*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2002, ISBN 80-7082-861-7, 189 s.
- [7] KOLMAN, A.: *Dějiny matematiky ve starověku*. 1. vyd. Praha: Vydala Academia, Československá akademie věd, 1969, 224 s.
- [8] KUNTZ, G.: *CabriJava Project*. 2004 [online]. Dostupné na WWW <<http://www.cabri.net/cabrijava/>>
- [9] ODVÁRKO, O. – KADLEČEK, J.: *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 3. díl – Úhel, trojúhelník; Osová souměrnost; Krychle a krádr*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997, ISBN 80-7196-092-6, 88 s.
- [10] ODVÁRKO, O. – KADLEČEK, J.: *Matematika pro 8. ročník ZŠ, 3. díl – Kruh, kružnice, válec; Konstrukční úlohy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000, ISBN 80-7196-183-3, 79 s.

- [11] RICHTER-GEBERT, J. – KORTENKAMP, U. H.: *The Interactive Geometry Software Cinderella*. Berlin: Springer-Verlag, 1999, ISBN 3-540-14719-5, 138 s.
- [12] SEKANINA, M. – BOČEK, L. – KOČANDRLE, M. – ŠEDIVÝ, J. : *Geometrie II*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1988, 200 s.
- [13] SMART TECHNOLOGIES INT.: *SMART Technologies*. 2005 [online]. Dostupné na WWW <<http://www.smarttech.com>>
- [14] VOKURKA, O. – LÁVIČKA, M.: *Jazyk XML, tvorba geometricky orientovaných stránek*. [online]. Dostupné na WWW <<http://www.pef.zcu.cz/pef/kmt/projekt/xml/>>
- [15] VANÍČEK, J.: *Dynamická geometrie*. [online]. Dostupné na WWW <[http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat\\_mat/modules/external/index.php?kod\\_kurzu=kat\\_mat\\_4296](http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_4296)>
- [16] VANÍČEK, J.: *Počítačem podporovaná výuka matematiky*. [online]. Dostupné na WWW <[http://www.eamos.cz/amos/kat\\_mat/modules/external/index.php?kod\\_kurzu=kat\\_mat\\_9782](http://www.eamos.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_9782)>

# Seznam obrázků

1.1	CabriJava aplet . . . . .	5
1.2	Interaktivní cvičení vytvořené v programu Cinderella . . . . .	6
1.3	MathType . . . . .	7
1.4	Matematická rovnice na www stránce . . . . .	8
1.5	Vykreslení osy pásu pohybem bodu S . . . . .	10
2.1	Ovládací lišta CabriJava apletu . . . . .	14
2.2	CabriJava aplet – statický obrázek . . . . .	16
2.3	CabriJava aplet – demonstrační obrázek . . . . .	17
2.4	Zobrazení referenčního názvu objektu . . . . .	18
2.5	CabriJava aplet – automaticky krokovaná dynamická konstrukce . . . . .	18
3.1	Prostředí programu Cinderella . . . . .	21
3.2	Vzorová konstrukce . . . . .	23
3.3	Editor cvičení . . . . .	24
3.4	Editor vstupu . . . . .	24
3.5	Editor řešení . . . . .	25
3.6	Editor nápovědy . . . . .	26
3.7	Editor sady nástrojů . . . . .	27
3.8	Náhled hotového cvičení . . . . .	28
4.1	Mocnost bodu ke kružnici . . . . .	32
4.2	Řešení úlohy typu $BBp$ – s využitím mocnosti bodu ke kružnici . . . . .	33
4.3	Řešení úlohy typu $BBk$ – existuje-li $P$ . . . . .	34
4.4	Řešení úlohy typu $BBk$ – neexistuje-li $P$ . . . . .	35
4.5	Společné tečny dvou kružnic . . . . .	36
4.6	Řešení úlohy typu $Bpp$ – s využitím stejnolehlosti . . . . .	37
4.7	Obrazu bodu v $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ – s využitím Eukleidovy věty o odvěsně . . . . .	38

4.8	Obraz bodu v $\mathcal{IN}\mathcal{V}(\omega)$ – s využitím stereografické projekce . . . . .	39
4.9	Převod kružnic $k_1, k_2$ na soustředné . . . . .	43
4.10	Vyřešení vnitřní úlohy . . . . .	43
4.11	Výsledné řešení úlohy . . . . .	44
5.1	SMART Board interaktivní bílá tabule . . . . .	51
5.2	Polička s nástroji . . . . .	52
5.3	SMART Board – psaní na tabuli . . . . .	53
5.4	SMART Board – ovládání dotykem . . . . .	53
5.5	Panel nástrojů SMART Board . . . . .	54
5.6	Vložení typizovaného textu . . . . .	55
5.7	SMART Board – nástroj roletka . . . . .	56

# Příloha A

## Parametry CabriJava apletů

Parametr	Typ hodnoty	Popis
file	URL / řetězec	Cabri II soubor (stand. soubor nebo ziparchiv)
lang	řetězec	jazyk uživatelského prostředí: 'cz', 'de', 'es', 'en', 'fr', 'it', 'nl', 'pl', 'pt', 'sk'
zipfile	URL	zip archive Cabri II souborů
background	URL	obrázek zobrazený v pozadí apletu (formát <i>.gif</i> , <i>.jpeg</i> )
bgcolor	řetězec	barva pozadí apletu (#RRGGBB, výchozí bílá)
border	číselná hodnota	tloušťka ohraničení apletu (výchozí 1)
bordercolor	číselná hodnota	barva ohraničení apletu (#RRGGBB, výchozí černá)
controller	logická hodnota	zobrazení ovládací lišty (výchozí true - pravda)
autocontrol	logická hodnota	zobrazení ovládací lišty při spuštění apletu (výchozí false, true – pokud je uveden parametr step)
trace	řetězec	objekty, které mají zanechávat stopu (př. "point 12")
spring	řetězec	popis natažení pružiny (př. "point 5 size -14,-12")
step	řetězec	poslední objekt, který se zobrazí po načtení apletu (př. "point 12")
loop	logická hodnota	animace konstrukce krok po kroku (výchozí false)
xposition	číselná hodnota	horizontální posun konstrukce (v obrazových bodech, kladné vpravo)
yposition	číselná hodnota	vertikální posun konstrukce (v obrazových bodech, kladné dolů)
opaque	logická hodnota	neprůhlednost výplně mnohoúhelníků a kružnic (výchozí false - nepravda)

# Příloha B

## Popis nástrojů programu Cinderella

### B.1 Ovládací nástroje

Na panelu ovládacích nástrojů je k dispozici několik skupin ikon, jejichž prostřednictvím lze pracovat se soubory, exportovat konstrukce, provádět kroky zpět/vpřed a vybírat objekty. Jednotlivé nástroje mají následující funkce:

#### Práce se soubory

Práce se soubory je standardní (jako u většiny běžných programů). Konstrukce jsou ukládány ve speciálním formátu souboru s příponou „.cdy“.



*Nový*

Vytvoření nové konstrukce. Program se uvede do výchozího nastavení.



*Otevřít*

Otevření již existující konstrukce.



*Uložit*

Pojmenování a uložení konstrukce.



*Uložit jako*



Uložení konstrukce pod novým názvem (odlišným od stávajícího).

#### Export a tisk






*Tisk konstrukce*






Vytištění viditelné části nárysny. Z důvodu omezení Javy je tiskový výstup méně kvalitní, než při použití nástroje „Vygenerovat PS“ a následném tisku PostScriptového obrázku.

	<i>Export do HTML</i>	Automatické vygenerování interaktivní HTML stránky.
	<i>Tvorba cvičení</i>	Vygenerování cvičení, která lze spustit v internetovém prohlížeči, více v kapitole <i>Tvorba cvičení</i> .

### Zpět/Vpřed

	<i>Zpět</i>	Provedení kroku zpět. Vratné jsou kroky konstrukce, pohyby objektů, změny vzhladu objektů, přibližování, posun (případně rotace) nárysny a smazání objektů. Počet kroků zpět není omezen.
	<i>Vpřed</i>	Obnovení kroku zpět. Obnovit lze libovolný počet kroků.
	<i>Smazat</i>	Vymazání všech vybraných objektů a objektů na nich závislých. Smazané objekty lze obnovit nástrojem „Zpět“.

### Výběrové nástroje

	<i>Vybrat vše</i>	Výběr všech geometrických objektů.
	<i>Vybrat body</i>	Výběr všech bodů.
	<i>Vybrat přímky</i>	Výběr všech přímek.
	<i>Vybrat kuželosečky</i>	Výběr všech kružnic a kuželoseček.
	<i>Odznačit</i>	Zrušení aktuálního výběru.

## B.2 Geometrické nástroje

Po zvolení geometrického nástroje je očekáváno od uživatele provedení akce v nárysň. Při stisku ikony nedojde na nárysň k žádné změně, program pouze čeká na další vstup a vybraná ikona je zvýrazněna tmavým pozadím. Ve stavovém řádku se zobrazí stručný popis, kterou akci by měl uživatel po zvolení nástroje provést. Geometrické nástroje můžeme rozdělit do pěti kategorií:

## Přesun a výběr



*Přesun objektu*

Klíčový nástroj Cinderelly. Umožňuje přemísťování základních objektů konstrukce se zachováním dynamických vlastností.



*Výběr*

Výběr objektů myši. Vybrané objekty mohou být použity jako vstup konstrukce (např. pokud máme vybrány dva body a zvolíme nástroj „*Střed úsečky*“, dojde k vytvoření požadovaného bodu). Po výběru objektu může být změněn jeho vzhled v editoru vzhledu („*Appearance Editor*“).

## Konstrukce metodou „táhni a pusť“

Nástroje založené na sekvenci kliknutí → tažení → uvolnění tlačítka myši umožňují sestavit více objektů v jediném kroku. Nové objekty jsou vytvářeny s ohledem na aktuální pozici kurzoru myši. Například při konstrukci přímky se kliknutím vytvoří bod a tažením mění směr přímky. Konstrukce přímky se dokončí po uvolnění tlačítka myši.



*Bod*



*Přímka svírající daný úhel*



*Přímka*



*Kružnice bodem*



*Přímka bodem*



*Kružnice*



*Rovnoběžka*



*Kružnice daného poloměru*



*Kolmice*



*Střed úsečky*

## Konstrukce na základě výběru

Při použití těchto nástrojů není vyžadován pohyb myši v průběhu konstrukce. Po zvolení nástroje je nutné vybrat vstupní prvky. Ve stavovém řádku se zobrazuje nápověda, které objekty mohou být zvoleny. Prvky musí být předem vytvořeny, na rozdíl od konstrukce metodou „táhni a pusť“.



*Střed kuželosečky*



*Pól*



*Osa úhlu*



*Mnohoúhelník*



*Kružítko*



*Přímka určená dvěma body*



*Osová souměrnost*



*Průsečík dvou přímek*



*Kružnice opsaná*



*Rovnoběžka*



*Kruželosečka určená 5 body*



*Kolmice*



*Polára*

### Nástroje pro měření

Nástroje umožňují určit základní metrické vlastnosti objektů.



*Vzdálenost a délka*



*Velikost úhlu*



*Obsah obrazce*

### Doplňkové nástroje



*Text*



*Množina*



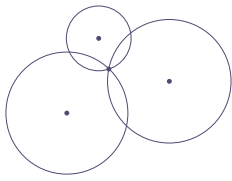
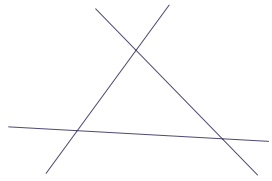
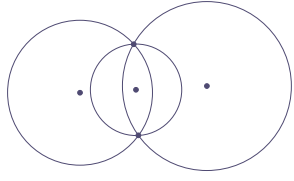
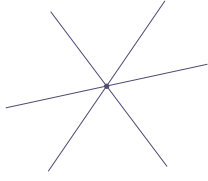
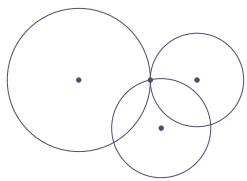
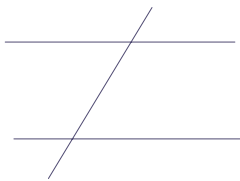
*Pohyb objektů*

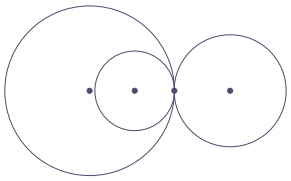

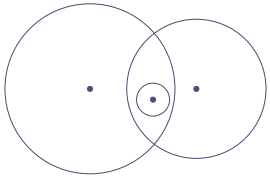
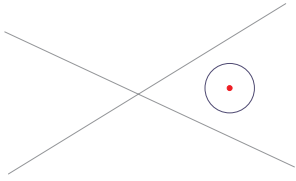
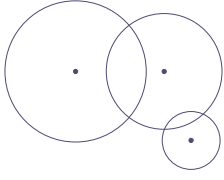
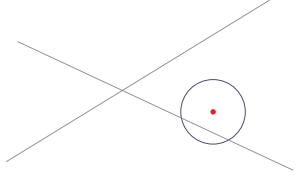
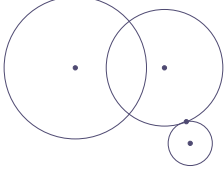
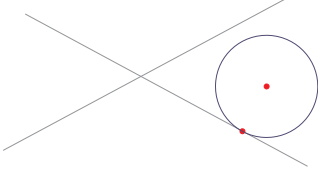
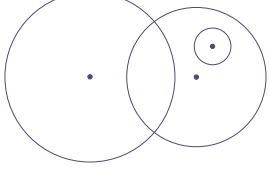
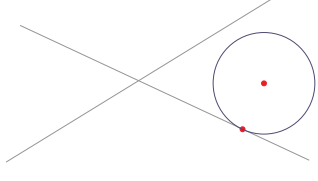
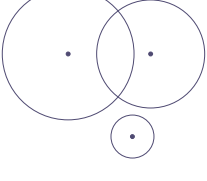
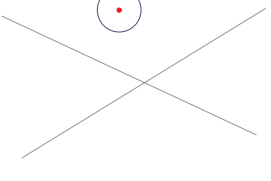


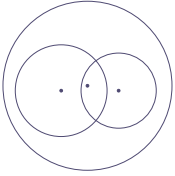
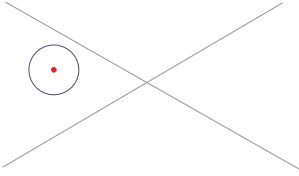
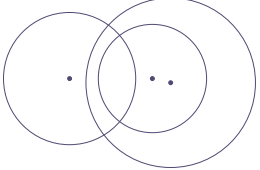
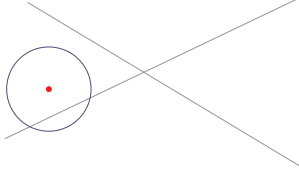
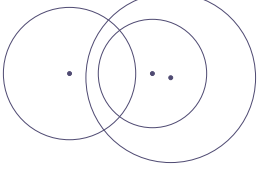
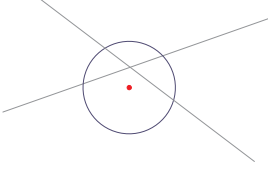
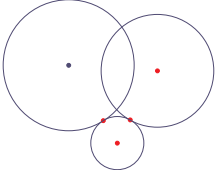
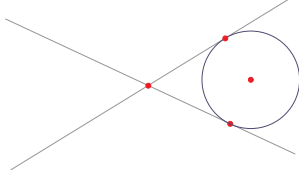
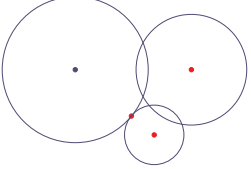
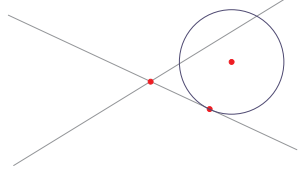
*Úsečka*

# Příloha C

## Polohy vstupních prvků Apolloniovy úlohy typu kkk

Poloha vstupních prvků	Vnitřní úloha	Počet řešení
kružnice $k_1, k_2, k_3$ se protínají v jednom bodě		
		4 řešení
		0 řešení
		2 řešení

Poloha vstupních prvků	Vnitřní úloha	Počet řešení
		0 řešení
<p>kružnice <math>k_1, k_2</math> se protínají ve dvou bodech</p>		
		4 řešení
		4 řešení
		4 řešení
		4 řešení
		4 řešení

Poloha vstupních prvků	Vnitřní úloha	Počet řešení
		4 řešení
		4 řešení
		8 řešení
		4 řešení
		6 řešení

# Resumé

The aim of this diploma thesis is the elaboration of a dynamic textbook with user handbook including the manual for how to make your own website textbook with geometric theme. The work presents a complete list of used technologies for making the website textbook and describes its individual parts. It deals with the possibility of placing the dynamic constructions to Internet through CabriJava applets and making the interactive exercises in a programme Cinderella. Its integral part is a CD-ROM. The disc includes the website textbook, the textual part of the diploma thesis and its applications, which were used when making the textbook on the theme of Apollonius and Pappos problem. The website textbook content consists of the theory necessary for task solving, basic construction, the initial solution of the individual tasks; including all phases of problem-solving and the interactive exercises.