FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Matematický seminář

Garant předmětu:
RNDr. Petr Fuchs, Ph.D.

Autoři textu:
RNDr. Edita Kolářová

Obsah

Seznam tabulek

1 Přehled použité symboliky

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množina všech přirozených čísel

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ množina všech celých čísel

$\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ množina všech racionálních čísel

$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel

$\mathbb{R}^+$ množina všech reálných kladných čísel

$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ množina všech komplexních čísel

$\{\,\}, \emptyset$ prázdná množina

$a \in \mathcal{M}$ a je prvek množiny $\mathcal{M}$

$a \notin \mathcal{M}$ a není prvek množiny $\mathcal{M}$

$\{x \in \mathcal{M}; v(x)\}$ množina všech prvků množiny $\mathcal{M}$ s vlastností v

$P \wedge Q$ konjunkce výroků P, Q

$P \vee Q$ disjunkce výroků P, Q

$P \Rightarrow Q$ P implikuje Q

$P \Leftrightarrow Q$ ekvivalence výroků P a Q

$\forall$ obecný kvantifikátor (každý...)

$\exists$ existenční kvantifikátor (existuje...)

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{M}$ je podmnožina $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} = \mathcal{N}$ $(\mathcal{M} \subset \mathcal{N}) \wedge (\mathcal{N} \subset \mathcal{M})$; $\mathcal{M}$ se rovná $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}\}$ – sjednocení množin

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{N}\}$ – průnik množin

$\mathcal{M} - \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N}\}$

$A[a_1; a_2; a_3]$ bod o souřadnicích a_1, a_2, a_3

$\vec{u} = (u_1; u_2)$ vektor o složkách u_1, u_2

$|AB|$ vzdálenost bodů A, B; velikost úsečky AB

$|a|, |z|$ absolutní hodnota reálného resp. komplexního čísla

2 Základní pojmy matematické logiky a teorie množin

2.1 Elementy matematické logiky

Výrok je vyslovená nebo napsaná myšlenka, která sděluje něco, co může být pouze pravdivé, nebo nepravdivé. Jednoduché výroky označujeme velkými písmeny, např. $A, B, V, \ldots$. Pomocí logických spojek dostáváme složené výroky.

Nejdůležitější jsou:

$\overline{A}$ ($nonA$; A'; $\neg A; \ldots$) **negace** výroku A (není pravda, že A)
$A \wedge B$ **konjunkce** (A a zároveň B)
$A \vee B$ **disjunkce** (A nebo B; platí alespoň jeden)
$A \Rightarrow B$ **implikace** (jestliže A, pak B; z A plyne B)
$A \Leftrightarrow B$ **ekvivalence** (A platí tehdy a jen tehdy, když platí B;
A platí právě tehdy, když platí B)

Kvantifikované výroky jsou výroky, udávající počet:

$\forall$ **obecný kvantifikátor** (čteme: ke každému, pro každé, pro všechna) vyjadřující, že každý (všichni, libovolný, kterýkoliv) uvažovaný objekt má - nebo nemá - požadovanou vlastnost.

$\exists$ **existenční kvantifikátor** (čteme: existuje alespoň jeden) vyjadřuje, že některé (alespoň jeden, někteří, lze nalézt, existuje,...) objekty mají vlastnost, o kterou jde.

Příklad 2.1 *Výrok A je "rok má 13 měsíců" a výrok B je "$2 \times 2 = 4$." Utvořte $\overline{A}, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ a rozhodněte, jsou - li pravdivé nebo nepravdivé.*

Řešení:
$\overline{A}$: *"rok nemá 13 měsíců", pravdivý výrok*
$A \vee B$: *"rok má 13 měsíců nebo $2 \times 2 = 4$" , pravdivý výrok*
$A \wedge B$: *"rok má 13 měsíců a $2 \times 2 = 4$" , nepravdivý výrok*
$A \Rightarrow B$: *" má-li rok 13 měsíců, pak $2 \times 2 = 4$" , pravdivý*
$A \Leftrightarrow B$: *"rok má 13 měsíců, právě tehdy, je-li $2 \times 2 = 4$, nepravdivý výrok*

Příklad 2.2 *Vyslovte negaci výroku A:*
a) Všechny kořeny mnohočlenu jsou rovny nule.
b) Ne všechna reálná čísla jsou kladná.
c) $2 < -7$
d) Levná výroba proudu.

Řešení:
a) Alespoň jeden kořen mnohočlenu je nenulový;
b) Všechna reálná čísla jsou kladná;
c) $2 \geq -7$;
d) není výrok

Příklad 2.3 *Výrok A "číslo a je dělitelné osmi", výrok B "číslo a je dělitelné dvěma". Formulujte $A \Rightarrow B$, a rozhodněte zda je pravdivý.*

Řešení:
Je-li číslo a dělitelné osmi, pak je dělitelné dvěma. Pravdivá implikace

2.2 Základní operace s množinami

Množinou rozumíme souhrn libovolných, navzájem různých objektů, které mají určitou vlastnost. Základní operace s množinami :

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ inkluze množin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ rovnost množin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sjednocení množin

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ průnik množin

$\mathcal{A} - \mathcal{B}$ rozdíl množin $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B})$

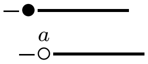
$\mathcal{A}'_{\mathcal{B}}$ doplněk množiny $\mathcal{A}$ v množině $\mathcal{B}$

Připomínáme ješte **intervaly**, jejich názvy, znázornění na číselné ose:

uzavřený interval $\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \le x \le b\}$ 

otevřený interval $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ 

polootevřený interval $(a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \le b\}$ 
(polouzavřený) $\langle a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x < b\}$ 

neomezený interval $\langle a; \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \le x\}$ 
$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$ 
$(-\infty; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \le b\}$ 
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ 

oboustranně neomezený interval $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$

Příklad 2.4 *$\mathcal{M}$ je množina všech sudých čísel, $\mathcal{P}$ množina všech lichých čísel, která nejsou dělitelná třemi, $\mathcal{R}$ množina všech čísel, která jsou dělitelná třemi. Určete $\mathcal{M} \cap \mathcal{R}, \mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R}, \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.*

Řešení:
$\mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R} = \mathbb{Z}$
$\mathcal{M} \cap \mathcal{R}$ *množina všech celých čísel dělitelných šesti*
$\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \{\ \}$

Příklad 2.5 *$\mathcal{M}$ je množina všech sudých přirozených čísel menších deseti. Najděte všechny její podmnožiny.*

Řešení:
$\mathcal{M} = \{2, 4, 6, 8\}$
jednoprvkové $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}$
dvouprvkové $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$
trojprvkové $\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}$
čtyřprvkové $\{2, 4, 6, 8\}$
množina prázdná

2.3 Axiomy, definice, věty a důkazy

Základem logické výstavby matematiky je soubor **axiomů**, t.j. matematických výroků, které se považují za pravdivé a nedokazují se. K zavedení nových pojmů slouží **definice**, která stanoví název pojmu a určí jeho základní vlastnosti. **Věta** v matematice je pravdivý výrok, který musíme logicky odvodit - dokázat - z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Podle použitých postupů rozlišujeme důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí.

Příklad 2.6 *Věta: Součin dvou libovolných sudých čísel je dělitelný čtyřmi.*

Důkaz přímý:
Jde o součin $2l \cdot 2k = 4lk$ $(l, k \in \mathbb{Z})$ *a to bylo dokázat.*

Příklad 2.7 *Věta: Nechť rovnice* $ax^2 + bx + c = 0$ *má celočíselné koeficienty,* $a \neq 0, b$ *je číslo liché. Dokažte, že rovnice nemůže mít dvojnásobný kořen.*

Důkaz sporem:
Předpokládáme, že rovnice má dvojnásobný kořen. Pak diskriminant je nulový. Víme, že $b = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$. *Tedy* $D = (2k + 1)^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4ac$. *Na levé straně rovnice je liché číslo, na pravé straně sudé a to je spor. Neplatí tedy předpoklad, že kvadratická rovnice má za daných podmínek dvojnásobný kořen.*

Příklad 2.8 *Matematickou indukcí dokažte, že součet čtverců prvních n přirozených čísel je roven* $S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

Důkaz:
Matematickou indukcí dokazujeme výrok $V(n)$ *tak, že nejprve dokážeme platnost* $V(a)$, *kde* a *je nejmenší přirozené číslo pro danou úlohu. Pak předpokládáme platnost* $V(n)$ *a ukážeme platnost implikace* $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$. *Pak* $V(n)$ *platí pro všechna* n.
V našem případě:
$V(1) : S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, *což odpovídá* $S_1 = 1^2$.
Předpokládáme $V(n) : S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.
Počítáme $V(n + 1)\ :\ S_(n + 1) = S_(n) + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}(n + 1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3)$.

Příklad 2.9 *Nechť množina* $\mathcal{M}$ *je množina všech řešení rovnice* $\cos\frac{\pi x}{2} = 0$, *množina* $\mathcal{N}$ *je množina všech řešení rovnice* $\sin \pi x = 0$. *Najděte* $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

[$\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{Z}$; $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} =$ *kladná a záporná lichá čísla*]

Příklad 2.10 *Najděte sjednocení a průnik intervalů:*

a) $\langle 2; 3)$ *a* $\langle -1; \infty)$

b) $(-\infty; 3\rangle$ *a* $(-8; 15)$

[*a)* $\langle -1; \infty), \langle 2; 3)$ *b)* $(-\infty; 15), (-8; 3\rangle$]

Příklad 2.11 *Přímým důkazem dokažte:*

a) Zvětší-li se číslo a *o* x, *zvětší se jeho druhá mocnina o* $x(2a + x)$.

b) Zvětší-li se číslo x *o* h, *zvětší se jeho dekadický logaritmus o* $\log(1 + \frac{h}{x})$.

c) Součet dvou čísel lichých je sudé číslo.

Příklad 2.12 *Sporem dokažte:*

a) Rovnice $ax = b$, *kde* $a \neq 0$, *má jediné řešení.*

b) V každém trojúhelníku leží proti stejným úhlům stejné strany.

Příklad 2.13 *Metodou matematické indukce dokažte:*

a) $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$

3 Vektorová algebra a analytická geometrie

3.1 Základní operace s vektory

Vektorem nazýváme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.
Je-li $\vec{u} = \vec{AB}$ libovolný nenulový vektor s počátečním bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a koncovým bodem $B[b_1; b_2; b_3]$, pak **souřadnice vektoru** $\vec{u}$ jsou:

$$u_1 = b_1 - a_1,\ u_2 = b_2 - a_2,\ u_3 = b_3 - a_3.$$

Zapisujeme $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$.

Je-li $A = B$, pak dostáváme vektor nulový $\vec{o}(0; 0; 0)$.

U vektorů v rovině vypustíme třetí souřadnici.

Pro vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ zavádíme:

velikost vektoru $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

rovnost vektorů $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1) \wedge (u_2 = v_2) \wedge (u_3 = v_3)$

součet vektorů $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$

rozdíl vektorů $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$

opačný vektor k $\vec{u}$ $-\vec{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$

k**-násobek vektoru** $k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3),\ k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

úhel φ **dvou vektorů** $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},\ \varphi \in \langle 0; 2\pi)$

3.2 Přímka v rovině

Přímka p **v rovině:**

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2)$ jsou její **parametrické rovnice**

$$x = a_1 + ts_1, y = a_2 + ts_2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Budeme používat i zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2],\ t \in \mathbb{R}\}$. Vyloučením parametru t z parametrických rovnic dostaneme **obecnou rovnici** přímky

$$p \equiv ax + by + c = 0.$$

Je-li v této rovnici $b \neq 0$, lze najít **směrnicový tvar** $p \equiv y = kx + q;\ k, q \in \mathbb{R}$.

Vzdálenost bodu $M[x_0; y_0]$ **od přímky** $p \equiv ax + by + c = 0$ je dána

$$d(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro **odchylku dvou přímek** $p_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lze odvodit

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \ \varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Jsou-li přímky p_1 a p_2 kolmé, pak pro jejich směrnice k_1 a k_2 platí $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Příklad 3.1 *Přímka je určena body $A[6; -1], B[2; 3]$. Najděte všechny tvary rovnice této přímky.*

Řešení:
Směrový vektor této přímky je $\vec{s} = (-4; 4)$. Parametrické rovnice tedy jsou

$$\underline{\underline{x = 6 - 4t, \ y = -1 + 4t, \ t \in \mathbb{R}.}}$$

Sečtením těchto rovnic a vyloučením parametru t dostaneme obecnou rovnici

$$\underline{\underline{x + y - 5 = 0.}}$$

Jednoduchou úpravou dostáváme

$$\underline{\underline{\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1,}}$$

připomínáme tímto úsekový tvar rovnice přímky. Úseky, které přímka vytíná na souřadnicových osách jsou stejné a rovny pěti.

Z obecného tvaru odvodíme směrnicový

$$\underline{\underline{y = -x + 5.}}$$

Vidíme, že směrnice $k = -1$, úhel přímky s kladným směrem osy x je $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Příklad 3.2 *V trojúhelníku ABC, kde $A[7; 8], B[5; -2], C[-3; -6]$, určete velikost výšky v_a a napište rovnici přímky, na níž leží výška v_a.*

Řešení:
Výška v_a má velikost rovnou vzdálenosti bodu A od přímky p, na níž leží strana BC.
Je $\vec{BC} = C - B = (-8; -4)$.
Parametrické rovnice přímky p jsou:

$$x = -3 - 8t, \ y = -6 - 4t.$$

Odtud obecná rovnice $x - 2y - 9 = 0$. Tedy

$$d(A, p) = \frac{|1 \cdot 7 - 2 \cdot 8 - 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \underline{\underline{\frac{18\sqrt{5}}{5}}}.$$

Směrnicová rovnice přímky p je $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$, směrnice výšky v_a je tedy

$$k = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Rovnice přímky rovnoběžné s výškou pak je $y = -2x + q$ a posunutí q dostaneme z podmínky, že výška v_a bodem A prochází, tedy $8 = -2 \cdot 7 + q \Rightarrow q = 22$.

Je tedy $\underline{\underline{-2x + 22 = y}}$ rovnice přímky na níž výška v_a leží.

Příklad 3.3 *Určete odchylku přímek*

$$p_1 \equiv 3x - 2y + 10 = 0 \text{ a } p_2 \equiv 5x + y - 13 = 0.$$

Řešení:
Je $\cos\varphi = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \dfrac{|3 \cdot 5 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{9+4}\sqrt{25+1}} = \dfrac{|13|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *tedy* $\underline{\underline{\varphi = \dfrac{\pi}{4}}}$.

3.3 Přímka v prostoru a rovnice roviny

Přímka p v prostoru:

Je-li přímka p určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2; s_3)$ jsou její **parametrické rovnice**

$$x = a_1 + ts_1,\ y = a_2 + ts_2,\ z = a_3 + ts_3,\ t \in \mathbb{R}.$$

Zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2; a_3 + ts_3],\ t \in \mathbb{R}\}$.

Přímku v prostoru lze také zadat jako průsečnici dvou různoběžných rovin.

Rovina ϱ v prostoru:

Je-li rovina ϱ určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a dvěma nenulovými, nekolineárními vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ jsou její **parametrická rovnice**

$$x = a_1 + tu_1 + rv_1, y = a_2 + tu_2 + rv_2, z = a_3 + tu_3 + rv_3,\ t, r \in \mathbb{R}.$$

Zkrácený zápis $\varrho \equiv \{[a_1 + tu_1 + rv_1; a_2 + tu_2 + rv_2; a_3 + tu_3 + rv_3],\ t, r \in \mathbb{R}\}$.

Vyloučením parametrů t, r z parametrických rovnic dostaneme **obecnou (normálovou) rovnici** roviny ϱ ve tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde alespoň jeden z koeficientů a, b, c je nenulový.

Vektor $\vec{n}(a; b; c)$ je normálový vektor roviny ϱ.

Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od roviny ϱ je

$$d(X, \varrho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Příklad 3.4 *Najděte rovnici roviny ϱ, která prochází bodem $A[5;-1;0]$ a má normálový vektor $\vec{n}(-1;1;2)$.*

Řešení:
Souřadnice normálového vektoru jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici roviny. Tedy

$$\varrho \equiv -x + y + 2z + d = 0.$$

Bod A leží v rovině, potom $-5 - 1 + 0z + d = 0 \ \Rightarrow d = 6$.

$$\underline{\underline{\varrho \equiv -x + y + 2z + 6 = 0}}$$

Příklad 3.5 *Rovina ϱ je určena body $A[4;0;3], B[4;1;5], C[1;2;-3]$. Najděte parametrické vyjádření a obecnou (normálovou) rovnici ϱ.*

Řešení:
Je $\vec{AB} = (0;1;2), \vec{AC} = (-3;2;-6)$. Pak parametrické rovnice roviny ϱ jsou

$$\underline{\underline{x = 4 + 0t - 3r,\ y = 0 + t + 2r,\ z = 3 + 2t - 6r,\ t, r \in \mathbb{R}.}}$$

Vyloučením parametrů t, r z těchto rovnic dostaneme

$$\underline{\underline{\varrho \equiv 10x + 6y - 3z - 31 = 0.}}$$

Příklad 3.6 *Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin:*
$\varrho_1 \equiv 4x - 2y - 2z - 3 = 0,\ \varrho_2 \equiv 2x - y - z - 1 = 0.$

Řešení:
V rovině ϱ_1 volíme například bod $X(0;0;-\frac{3}{2})$ a počítame

$$d(X, \varrho_2) = \frac{|\frac{3}{2} - 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{12}}}.$$

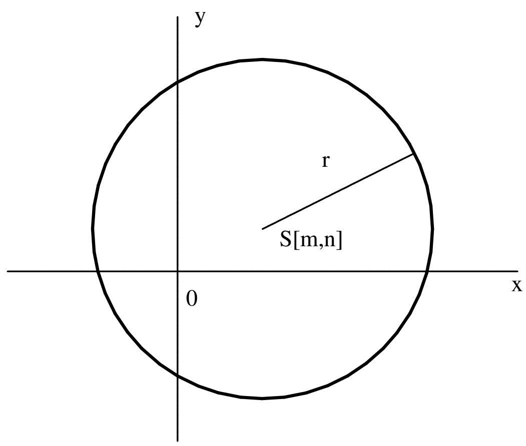
3.4 Kuželosečky v rovině

Kružnice $k(S, r)$ se středem v $S[m; n]$ a poloměrem $r > 0$ má středovou rovnici

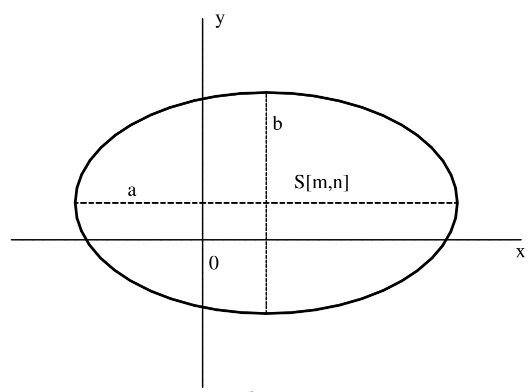
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Elipsa se středem v bodě $S[m; n]$ a poloosami (rovnoběžnými se souřadnicovými osami) velikosti a a b má středovou rovnici

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$



Kružnice $k(S, r)$



Elipsa

Příklad 3.7 *Určete rovnici kružnice k, je-li určena středem S a poloměrem r :*

a) $S[0; -3],\ r = \sqrt{2}$ *b)* $S[-1; 1],\ r = 1$

Řešení:
Dosazením do středového tvaru rovnice kružnice dostaneme:

a) $(x - 0)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{2})^2 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{x^2 + (y + 3)^2 = 2}}$

b) $\underline{\underline{(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1}}$

Příklad 3.8 *Najděte střed a poloměr kružnice* $k \equiv x^2 + y^2 - 5x + 4y = 2.$

Řešení:
Rovnici kružnice upravíme doplněním na úplný čtverec:

$$x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 + y^2 + 4y + 4 = 2 + (\frac{5}{2})^2 + 4$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 + (y + 2)^2 = (\frac{7}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S[\frac{5}{2}; -2],\ r = \frac{7}{2}.}}$$

Příklad 3.9 *Rozhodněte, zda rovnice*

a) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 40y + 152 = 0$

je rovnicí elipsy. Určete střed a délku poloos.

Řešení:
a) Upravíme:

$25(x^2+4x+4)+16(y^2-6y+9) = 156+100+144 \quad \Rightarrow 25(x+2)^2+16(y-3)^2 = 400 \Rightarrow$

$$\frac{(x+2)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{5^2} = 1$$

Je tedy $\underline{\underline{S[-2;3],\ a=4,\ b=5.}}$

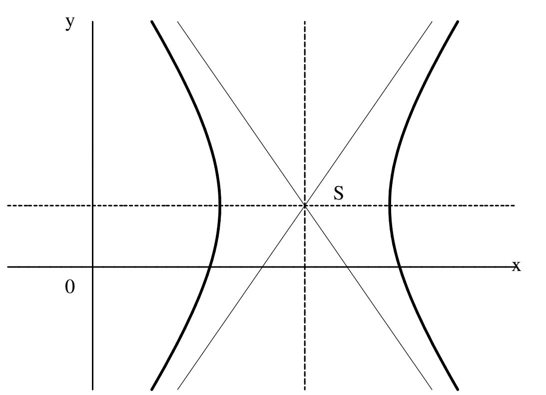
b) Podobně

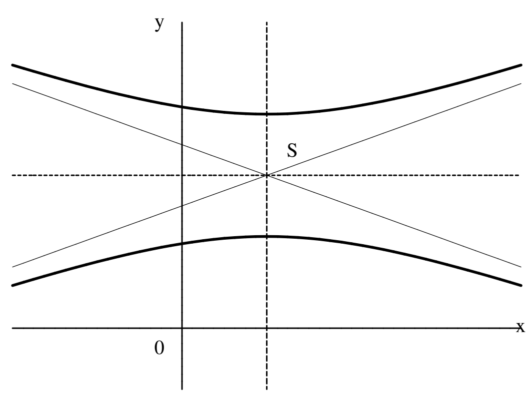
$9(x^2-4x+4)+4(y^2+10y+25) = -152+36+100 \quad \Rightarrow 9(x-2)^2+4(y+5)^2 = -16.$

Na levé straně je číslo nezáporné, na pravé záporné, <u>daná rovnice není rovnici elipsy.</u>

Hyperbola se středem v bodě $S[m;n]$ a poloosami (rovnoběžnými se souřadnicovými osami) a a b má středovou rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{nebo} \quad -\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$





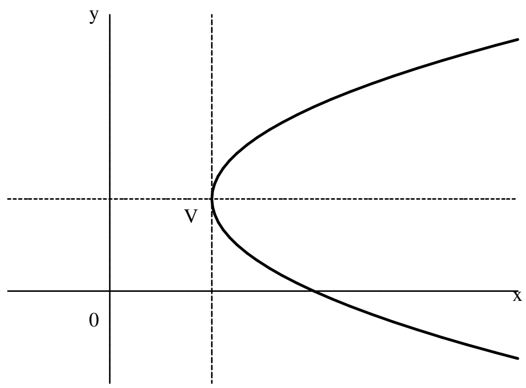
Příklad 3.10 *Najděte průsečíky hyperboly* $-49x^2 + 16y^2 = -25$ *s osou* O_x *(vrcholy hyperboly).*

Řešení:
Rovnice osy O_x *je* $y = 0$, *pak* $-49x^2 = -25 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{5}{7}$.

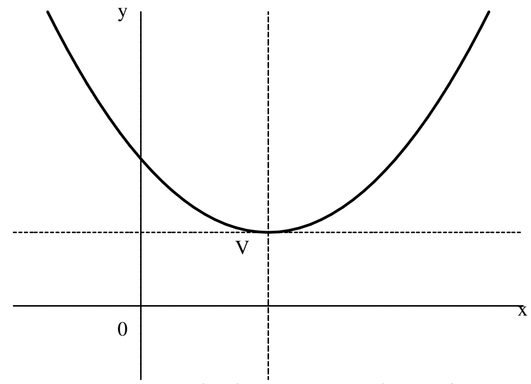
Je tedy $\underline{\underline{V_1[\frac{5}{7};0],\ V_2[-\frac{5}{7};0].}}$

Parabola je nestředová kuželosečka. Je-li její vrchol $V[m;n]$, pak rovnice paraboly je

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \qquad \text{nebo} \qquad (x-m)^2 = 2p(y-n).$$



osa paraboly je rovnoběžná
s osou x, $p > 0$



osa paraboly je rovnoběžná
s osou y, $p > 0$

Příklad 3.11 *Najděte vrchol a osy paraboly* $3y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$.

Řešení:
Upravíme na vrcholový tvar $3(y^2 + 4y + 4) = 6x - 15 + 12$, *tedy* $(y+2)^2 = 2(x - \frac{1}{2})$.

Vrchol paraboly je $\underline{\underline{V[\frac{1}{2}; -2]}}$, *osa je* $\underline{\underline{\text{ rovnoběžná s osou } O_x}}$, *parametr* $\underline{\underline{p = 1.}}$

Příklad 3.12 *Jsou dány tři po sobě jdoucí vrcholy rovnoběžníka* $ABCD$, *kde* $A[2;-2;2]$, $B[4;2;0]$, $C[7;4;3]$. *Určete vrchol* D.

[$D[5;0;5]$*]*

Příklad 3.13 *Najděte vnitřní úhly trojúhelníku o vrcholech* $A[2;-4;9]$, $B[-1;-4;5]$, $C[6;-4;6]$.

[$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$*]*

Příklad 3.14 *Pro jakou hodnotu parametru a jsou přímky p a q rovnoběžné, je-li* $p \equiv 3ax - 8y + 13 = 0$ *a* $q \equiv (a+1)x - 2ay - 21 = 0$.

[$a \in \{2, -\frac{2}{3}\}$*]*

Příklad 3.15 *Přímka* $p \equiv ax + 3y - 1 = 0$.
Určete a tak, aby přímka svírala s kladným směrem osy x úhel $\frac{3}{4}\pi$.

[$a = 3$*]*

Příklad 3.16 *Najděte rovnici přímky, která prochází bodem* $A[4;-2]$ *a má od počátku vzdálenost* $d = 2$.

[$p_1 \equiv y + 2 = 0,\ p_2 \equiv 4x + 3y - 10 = 0$*]*

Příklad 3.17 *Najděte obecnou rovnici přímky, která prochází bodem* $M[15; -3]$ *a průsečíkem přímek* $3x - 5y + 12 = 0,\ 5x + 2y - 42 = 0$.

[$x + y - 12 = 0$]

Příklad 3.18 *Určete množinu bodů, které mají od bodů* $A[7; -3],\ B[-2; 1]$ *stejnou vzdálenost.*

[$18x - 8y - 53 = 0$]

Příklad 3.19 *Přímka p je dána rovnicemi* $x = 1 + 2t, y = 3 - t, t \in \mathbb{R}$.
Určete parametrické rovnice přímky q, je-li $p \perp q$ *a dále q prochází bodem* $Q[1; 3]$.

[$x = 1 + t, y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}$]

Příklad 3.20 *Najděte číslo n, aby body* $A[3; -4],\ B[1; n],\ C[-1; 2]$ *ležely na jedné přímce.*

[$n = -1$]

Příklad 3.21 *Najděte parametrické rovnice přímky procházející bodem* $A[4; -5; 7]$ *rovnoběžně*

a) *s osou* O_x,

b) *s osou* O_y,

c) *s osou* O_z,

d) *s přímkou* $p \equiv x = 3 - t, y = 2 + 2t, z = 3,\ t \in \mathbb{R}$.

[*a)* $x = 4 + t, y = -5, z = 7, t \in \mathbb{R}$; *b)* $x = 4, y = -5 + t, z = 7, t \in \mathbb{R}$;
c) $x = 4, y = -5, z = 7 + t, t \in \mathbb{R}$; *d)* $x = 4 - t, y = -5 + 2t, z = 7, t \in \mathbb{R}$]

Příklad 3.22 *Určete odchylku* φ *rovin* $\varrho \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ *a* $\sigma \equiv x - y + z = 0$.

[$\varphi = \frac{\pi}{2}$]

Příklad 3.23 *Rozhodněte, která z rovin* $\varrho \equiv x - y - 3 = 0, \sigma \equiv x + y - z + 1 = 0$ *má větší vzdálenost od počátku souřadnic.*

[*rovina* ϱ]

Příklad 3.24 *Určete rovnici průsečnice rovin* $\varrho \equiv 3x + y - z = 0$ *a* $\sigma \equiv y + z = 0$.

[$p \equiv x = 2t, y = -3t, z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$]

Příklad 3.25 *Najděte rovnici kružnice opsané trojúhelníku o vrcholech* $A[1; -1],\ B[7; 7],\ C[11; -1]$.

[$k \equiv x^2 + y^2 - 12x - 3y + 7 = 0$]

Příklad 3.26 *Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadnicových os a prochází bodem* $M[2;4]$.

[$k_1 \equiv (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100,\ k_2 \equiv (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ *]*

Příklad 3.27 *Jsou dány body* $A[1;-3],\ B[1;4],\ C[-3;5]$.
Popište jejich polohu vzhledem k elipse $25x^2 + 9y^2 = 450$.

[A je uvnitř, B je uvnitř, C je bod elipsy]

Příklad 3.28 *Najděte rovnici elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnicovými, jestliže se osy* O_x *dotýká v bodě* $A[-4;0]$ *a osy* O_y *v bodě* $B[0;5]$.

[$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$ *]*

Příklad 3.29 *Hyperbola má rovnici* $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$.
Najděte její střed a délky poloos.

[$S[1,-1], a = 2, b = 3$ *]*

Příklad 3.30 *Najděte rovnici hyperboly, jsou-li její vrcholy* $V_1[0;2],\ V_2[8;2]$ *a prochází bodem* $M[-1;5]$.

[$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ *]*

Příklad 3.31 *Najděte rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází body* $A[8;3],\ B[-8;3]$.

[$x^2 = \frac{64}{3}y$ *]*

Příklad 3.32 *Najděte rovnici paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou* O_x, *vrchol* $V[8;5]$, *parametr* $p = 4$.

[$(y-5)^2 = 8(x-8)$ *]*

Příklad 3.33 *Najděte rovnici přímky, která prochází průsečíky paraboly* $y^2 = 18x$ *a kružnice* $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$.

[$p \equiv x - 2 = 0$ *]*

4 Úpravy agebraických výrazů a rovnice

4.1 Úpravy agebraických výrazů

Algebraický výraz je zápis, který je správně vytvořen z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Při úpravách používame poznatků o mocninách, odmocninách, zlomcích a mnohočlenech tak, abychom výraz převedli na nejjednodušší tvar. Nutnou součástí řešení jsou podmínky, které stanoví, kdy jsou výrazy definovány.

Pravidla pro počítání s mocninami:

Pro každé reálné r, s a každé $a > 0,\ b > 0$, (respektive pro každé celé r, s a každé $a \neq 0,\ b \neq 0$) platí:

$a^0 = 1$ $\qquad (a^r)^s = a^{rs}$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r},\ a \neq 0$ $\qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

$a^r : a^s = a^{r-s}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$

Pravidla pro počítání s odmocninami:

Nechť $m, n \in \mathbb{N},\ a \geq 0$. Pak platí:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Pro $a = 0$ je $\sqrt[n]{0} = 0$.
Pro $n = 1$ je $\sqrt[1]{a} = a$.
Pro $n = 2$ zapisujeme $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad a \geq 0 \wedge b \geq 0$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, \quad a \geq 0 \wedge b > 0$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a \geq 0$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad a \geq 0$

Rozklady nejjednodušších mnohočlenů:

$$
\begin{aligned}
&(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \\
&(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
&a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \\
&a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
&a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)
\end{aligned}
$$

Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:

Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, pak platí:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Připomínáme **definici absolutní hodnoty:**

Každému reálnému číslu a přiřazujeme právě jedno nezáporné číslo $|a|$ takto:

$$|a| = \left\langle \begin{array}{ll} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{array} \right.$$

Jestliže a, b jsou reálná čísla, pak absolutní hodnota má tyto vlastnosti:

1) $|a| = max\{a, -a\}$

2) $|a| = |-a|$

3) $a \leq |a|$

4) $|a| = \sqrt{a^2}$

5) $|ab| = |a| \cdot |b|$

6) $|a^n| = |a|^n$, pro každé přirozené n

7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, pro každé $b \neq 0$

8) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (trojuhelníková nerovnost)

9) Nechť $\varepsilon > 0$, pak pro libovolná reálná čísla a, x platí:

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Longleftrightarrow |x - a| < \varepsilon$$

Příklad 4.1 *Upravte výraz V na nejjednodušší tvar:*

a) $V = |-2x|^3 - |(-2x)^2| + |-2x|^2 + \dfrac{|2x|}{x}, \quad x \neq 0$

Řešení:

Pro $x > 0: \quad V = [-(-2x)]^3 - 4x^2 + [-(-2x)]^2 + \dfrac{2x}{x} = \underline{\underline{8x^3 + 2}}$

Pro $x < 0: \quad V = (-2x)^3 - 4x^2 + (-2x)^2 + \dfrac{-2x}{x} = \underline{\underline{-8x^3 - 2}}$

b) $V = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

Řešení:

$$V = \frac{x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 3)}{x(x + 1)(x - 3)} = \underline{\underline{\frac{x - 1}{x}}},$$

platí pro $x \neq 0, \ x \neq -1, \ x \neq 3$.

$$c)\ V = \frac{a^2b^{-2} - ab^{-1} + a^{-2}b^2 - a^{-1}b}{(a^{-1} - b^{-1})(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)}$$

Řešení:

$$V = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a}}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1)} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^4 - a^3b + b^4 - ab^3}{(b-a)(a^2 + b^2 + ab)} =$$

$$= \frac{a^3(a-b) - b^3(a-b)}{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{(a-b)(a^3 - b^3)}{-(a^3 - b^3)} = \underline{\underline{b - a}},$$

pro $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b.$

$$d)\ V = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2} + 1} + \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - \sqrt{x^2}}$$

Řešení:

$$\frac{(x^3 + x^2 - x - 1)(1 - \sqrt{x^2}) + (x^3 - x^2 - x + 1)(1 + \sqrt{x^2})}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2|x| + 2|x|}{1 - x^2} = 2\frac{x(x^2 - 1) - |x|(x^2 - 1)}{1 - x^2} = 2(|x| - x);$$

Pro $x \neq 1\ \wedge x \geq 0\ :\ \underline{\underline{V = 0}}$

Pro $x \neq 1\ \wedge x < 0\ :\ \underline{\underline{V = -2x}}$

4.2 Rovnice

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce proměnné x definované na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, pak úloha najít všechna $x \in \mathcal{D}$ pro něž $f(x) = g(x)$ znamená řešit rovnici o jedné neznámé.

Lineární rovnici o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$ax + b = 0,$$

kde $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$.

Graficky tento kořen určíme jako průsečík přímky $y = ax + b$ s osou x.

Příklad 4.2 *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$\frac{2(x-1)}{11} - \frac{x-3}{2} = 9 - \frac{5(x+1)}{8}.$$

Řešení:

Celou rovnici vynásobíme $8 \cdot 11$, *tím se zbavíme zlomků:*

$$16(x-1) - 44(x-3) = 792 - 55(x+1)$$

a po roznásobení je:

$$16x - 16 - 44x + 132 = 792 - 55x - 55,$$

sloučíme $-28x + 116 = 737 - 55x,$

k oběma stranám rovnice přičteme $55x - 737$

$$27x - 621 = 0$$

a to je rovnice tvaru $ax + b = 0$. *Takže*

$$x = \frac{621}{27} = \underline{\underline{23.}}$$

Nemusíme provádět zkoušku, veškeré úpravy (násobení rovnice nenulovým číslem, přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice) jsou ekvivalentní. Zkouška pak má jen charakter kontroly výpočtu.

Příklad 4.3 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici:*

a) $2 + \dfrac{3}{x+7} = \dfrac{x+10}{x+7}$ *b)* $\dfrac{3+2x}{2} - (\dfrac{7}{6} - \dfrac{12x-1}{3}) = 5x.$

Řešení:

a) Řešíme za předpokladu $x + 7 \neq 0$, *tzn.* $x \neq -7$, *úpravou:*

$$\begin{aligned} 2(x+7)+3 &= x+10 \\ 2x+14+3 &= x+10 \\ x &= -7 \qquad \textit{což je spor} \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{\ \}}} \end{aligned}$$

b) Zbavíme se zlomků

$$\begin{aligned} 3(3+2x) - 7 + 2(12x-1) &= 30x \\ 9 + 6x - 7 + 24x - 2 &= 30x \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice má nekonečně mnoho řešení $\underline{\underline{x = t, t \in \mathbb{R}.}}$

Kvadratickou rovnici o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Kořeny této rovnice vypočítáme pomocí diskriminantu $D = b^2 - ac$.

Pro $D > 0$ dostaneme dva reálné různé kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Pro $D = 0$ dostaneme jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$.

Pro $D < 0$ nemá rovnice v $\mathbb{R}$ řešení.

Graficky kořeny určíme jako průsečíky paraboly $y = ax^2 + bx + c$ s osou x.

Příklad 4.4 *Řešte v $\mathbb{R}$ následující kvadratické rovnice:*

a) $x^2+4x-5=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\dfrac{-4\pm 6}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_1=1}} \vee \underline{\underline{x_2=-5}}$

b) $x^2-6x+9=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\underline{\underline{3}}$ *dvojnásobný kořen*

c) $5x^2-4x+8=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-160}}{10}$ *v* $\mathbb{R}$ $\underline{\underline{\textit{ nemá rovnice řešení}}}$

d) $x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}} \vee \underline{\underline{x_2=-6}}$

e) $5x^2-4=0 \Rightarrow (\sqrt{5}x-2)(\sqrt{5}x+2)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}}} \vee \underline{\underline{x_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$

f) $x^2+16=0$ *v* $\mathbb{R}$ $\underline{\underline{\textit{neřešitelná rovnice}}}$

Příklad 4.5 *Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou* $x_1=-3\sqrt{3}$ *a* $x_2=2\sqrt{3}$.

Řešení:

$(x-x_1)(x-x_2)=0 \Rightarrow (x+3\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0 \Rightarrow \underline{\underline{x^2+\sqrt{3}x-18=0}}$

Nebo podle vztahů mezi kořeny x_1, x_2 *a koeficienty* p, q *kvadratické rovnice*

$$x^2+px+q=0 \quad kde \quad x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q$$

pak

$$x^2+(+3\sqrt{3}-2\sqrt{3})x-3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}=0$$

a úpravou dostaneme

$$\underline{\underline{x^2+\sqrt{3}x-18=0}}.$$

Při řešení **rovnic s absolutní hodnotou** vycházíme z definice absolutní hodnoty a řešíme rovnice v intervalech, které dostaneme pomocí tzv. kritických bodů.

Příklad 4.6 *V oboru reálných čísel řešte rovnice s absolutními hodnotami:*

a) $3+4|x-2|=5x$ *b)* $|2x-7|+|x-2|=3$

c) $3x-|2x-1|=x+1$ *d)* $|3x-2|+4=2x+3$

Řešení:

a) Pro $x\in(-\infty,2)$, *rovnice přejde v rovnici* $3-4(x-2)=5x$.
Tato má řešení $x=\dfrac{11}{9}$, *které patří do daného intervalu.*

Pro $x \in \langle 2, \infty) :\ 3 + 4(x-2) = 5x \Rightarrow x = -5 \notin \langle 2, \infty)$

Sjednocení řešení pak je $\underline{\underline{x = \dfrac{11}{9}}}.$

b) $x \in (-\infty, 2) : -2x + 7 - x + 2 = 3 \Rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 2)$

$x \in \langle 2, \frac{7}{2}) : -2x + 7 + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 2 \in \langle 2, \frac{7}{2})$

$x \in \langle \frac{7}{2}, \infty) : 2x - 7 + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 4 \in \langle \frac{7}{2}, \infty)$

Závěr: $\underline{\underline{x \in \{2, 4\}}}$

c) $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) : 3x + 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin (-\infty, \frac{1}{2})$

$x \in \langle \frac{1}{2}, \infty) : 3x - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow 0 = 0$

Závěr: $\underline{\underline{x \in \langle \frac{1}{2}, \infty)}}$

d) $x \in (-\infty, \frac{2}{3}) : -3x + 2 + 4 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \in (-\infty, \frac{2}{3})$

Závěr: $\underline{\underline{x \in \{1, \dfrac{3}{5}\}}}$

Rovnice s parametrem jsou rovnice, které kromě neznámých obsahují ještě další proměnné - parametry.

Řešení rovnic s parametry spočívá v určení kořenů v závislosti na parametrech a v úplném rozboru všech možností parametrů.

Příklad 4.7 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $\quad x + 1 - \dfrac{2x + a + 1}{a} = \dfrac{a - x}{a}, \quad$ *kde* $a \in \mathbb{R}$ *je parametr.*

Řešení:

Pro $a = 0$ *rovnice nemá smysl.*
Pro $a \neq 0$ *dostaneme* $ax + a - 2x - a - 1 = a - x \Rightarrow$

$$(a-1)x = a + 1 = \left\langle \begin{array}{l} \textit{pro } a = 1 :\ \ 0 \cdot x = 2,\ \textit{spor} \\[2ex] \textit{pro } a \neq 1 :\ \ x = \frac{a+1}{a-1} \end{array} \right.$$

Závěr: $a = 0$ *rovnice nemá smysl*
$a = 1$ *rovnice nemá řešení*
$a \neq 0 \wedge a \neq 1$ *rovnice má jediné řešení* $\underline{\underline{x = \dfrac{a+1}{a-1}}}$

Příklad 4.8 *Pro které hodnoty reálného parametru* m *má kvadratická rovnice* $x^2 + 3x - 2m^2 + m + 3 = 0$ *o neznámé* $x \in \mathbb{R}$ *jeden kořen rovný nule? Najděte druhý kořen.*

Řešení:

Absolutní člen $-2m^2 + m + 3 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{m = -1}} \vee \underline{\underline{m = \dfrac{3}{2}.}}$

Druhý kořen $\underline{\underline{x = -3.}}$

Příklad 4.9 *Pro které hodnoty parametru t má kvadratická rovnice* $2x^2 + tx + 2 = 0$ *reálné různé kořeny?*

Řešení:
Reálné různé kořeny $\Rightarrow D = t^2 - 16 > 0 \Rightarrow t^2 > 16 \Rightarrow |t| > 4 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{t \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)}}$$

Algebraické rovnice vyššího stupně řešíme převodem na součinový tvar, někdy jako rovnice binomické.

Příklad 4.10 *V oboru reálných čísel řešte rovnice:*

a) $x^4 = 16$ *b)* $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Řešení:

a) $x^4 - 16 = 0$, *upravíme na součinový tvar* $(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0 \Rightarrow$ *reálné kořeny jsou* $\underline{\underline{x_1 = 2, x_2 = -2}}$

b) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{\ \}}}$

Iracionální rovnice obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Odmocniny odstraňujeme neekvivalentní úpravou - umocněním, proto je nutně součastí řešení zkouška.

Příklad 4.11 *V oboru reálných čísel řešte iracionální rovnici:*

a) $x - 4 = \sqrt{2x}$ *b)* $\sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 3$

Řešení:

a) Řešíme za předpokladu $x - 4 \geq 0 \wedge 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$
Umocněním dostaneme

$$(x-4)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

Podmínce řešitelnosti vyhovuje pouze $x = 8$.
Umocnění je neekvivalentní operace, provedeme zkoušku:

$$\left.\begin{array}{l} L(8) = 8 - 4 = 4 \\ P(8) = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{x = 8}}$$

b) Řešíme za předpokladu $x - 7 \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \in \{\}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\textit{rovnice nemá řešení.}}}$

Logaritmické rovnice jsou rovnice, v nichž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$. Jestliže stanovíme podmínky řešitelnosti a řešíme ekvivalentními úpravami, pak zkouška není nutná.

Příklad 4.12 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *logaritmické rovnice:*

a) $\log x + \dfrac{3}{\log x} = 4$ *b)* $\dfrac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$

Řešení:

a) Podmínky: $x > 0 \wedge \log x \neq 0 \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
Rovnici vynásobíme $\log x$, *dostaneme*

$$\log^2 x - 4\log x + 3 = 0$$

Odtud $\log x_1 = 3 \vee \log x_2 = 1$, *je tedy* $\underline{\underline{x_1 = 10^3 \vee x_2 = 10^1.}}$

Obě řešení patří do oboru řešitelnosti.

b) Podmínky $x > \frac{3}{2} \wedge x > 3 \Rightarrow x > 3$.

Úpravou $\log(2x-3) = 2\log(x-3)$.

Pak $2x - 3 = (x-3)^2$, *neboli* $2x - 3 = x^2 - 6x + 9$.

Z toho $0 = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$.

Podmínkám vyhovuje pouze $\underline{\underline{x_1 = 4.}}$

Exponenciální rovnice jsou rovnice, kde neznámá $x \in \mathbb{R}$ se vyskytuje v exponentu nějaké mocniny. Rovnice řešíme buď logaritmováním, nebo porovnáním exponentu při stejném základu, často až po úpravách.

Příklad 4.13 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *exponenciální rovnice.*

a) $(\dfrac{4}{25})^{x+3} \cdot (\dfrac{125}{8})^{4x-1} = \dfrac{5}{2}$ *b)* $3 \cdot 2^x + 2^{3-x} = 10$ *c)* $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

Řešení:

a) Upravíme vše na mocniny o základu $a = \frac{5}{2}$.

$$(\frac{5}{2})^{-2(x+3)} \cdot (\frac{5}{2})^{3(4x-1)} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$-2x - 6 + 12x - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 10x = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

b) Položíme $2^x = y$, *pak* $3y + 8 \cdot \frac{1}{y} = 10$, *neboli* $3y^2 - 10y + 8 = 0$.
Kořeny

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

Pak je $2^{x_1} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1.}}$

Druhý kořen $2^{x_2} = \frac{4}{3}$ *a logaritmováním* $\underline{\underline{x_2 = 2 - \log_2 3.}}$

c) *Položíme* $3^x = y$, *pak* $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+3) = 0$.

$y_1 = 1 \Rightarrow 3^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$y_2 = -3$ *není možné, neboť* $3^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Zůstává $\underline{\underline{x = 0.}}$

Příklad 4.14 *Užitím rozkladu kvadratického trojčlenu převeďte na součin:*

a) $x^5 - x^4 - 56\,x^3$ *b)* $x^4 + 2\,x^2 - 3$ *c)* $x^4 - 13\,x^2 + 40$

[a) $x^3(x-8)(x+7)$; *b)* $(x-1)(x+1)(x^2+3)$; *c)* $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$*]*

Příklad 4.15 *Zjednodušte následující výrazy:*

a) $\dfrac{x-2y}{x+y} - \dfrac{2x-y}{y-x} - \dfrac{2x^2}{x^2-y^2}$ *b)* $\dfrac{a^2-x^2}{a+b} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2} \cdot \left(a + \dfrac{ax}{a-x}\right)$

c) $\left(\dfrac{2x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y} - \dfrac{y^2}{x^2-y^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{x}{x^2-y^2}\right)$

d) $\dfrac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)}{\left(\frac{a^4}{b^2} - \frac{b^4}{a^2}\right) : (a^2-b^2)}$

e) $1 + \dfrac{(4-a^2)^{-\frac{1}{2}} - (2-a)^{-\frac{1}{2}}}{(2+a)^{-\frac{1}{2}} + (4-a^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{1-a}{1-\sqrt{2-a}}$

f) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) \cdot \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]$

g) $\left(v + \dfrac{u-v}{1+uv}\right) : \left(1 - \dfrac{v(u-v)}{1+uv}\right)$ *h)* $\dfrac{\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1}}{\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{x^2-x+1}} : \dfrac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x^2-x}{x+1}}$

[a) $\frac{x-y}{x+y}$, $x \neq \pm y$; *b)* $\frac{a^2(a-b)}{x}$, $x \neq 0 \wedge x \neq -a \wedge a \neq -b$; *c)* x, $x \neq \pm y \wedge 2x \neq y$;

d) 1, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b$; *e)* $\sqrt{a+2}$, $a \in (-2;1) \cup (1;2)$;

f) $\frac{xy^2}{x-y}$, $x \neq y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$; *g)* u, $uv \neq -1$; *h)* $\frac{1}{x^3}$, $x \neq 0 \wedge x \neq -1$*]*

Příklad 4.16 *Usměrněte zlomky:*

a) $\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ *b)* $\dfrac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$

[a) $5 + 2\sqrt{6}$; *b)* $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}, x > 2$*]*

Příklad 4.17 *Na základě vět o absolutní hodnotě reálného čísla zjistěte, pro která čísla x platí rovnosti:*

a)$|(x-2)(x-4)| = (x-2)(x-4)$ *b)*$|(x-4)(x-3)| = |x-4||x-3|$

c) $|(x-2)(x-5)| = -(x-2)(x-5)$

d) $\left|\dfrac{x-0,5}{x-1,2}\right| = \dfrac{|x-0,5|}{|x-1,2|}$ *e)* $|\dfrac{3-x}{x-2}| = \dfrac{3-x}{x-2}$

[a) $x \geq 4 \vee x \leq 2$ *b)* $\forall x \in \mathbb{R}$ *c)* $x \in \langle 2, 5\rangle$; *d)* $\forall x \in \mathbb{R} - \{1{,}2\}$ *e)* $x \in (2, 3\rangle$*]*

Příklad 4.18 *Rozhodněte, který z výroků je pravdivý:*

a) $-2 < x < 2 \iff |x| < 2$

b) $-1 \leq x < 3 \iff |x-1| \leq 2$

c) $|2x-1| < 3 \iff |x| < 4$

d) $x \in \langle -3; 5) \iff |x| < 5$

[a) pravdivý; b) není pravdivý; c) není pravdivý; d) není pravdivý]

Příklad 4.19 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $\dfrac{1-x}{x-2} - \dfrac{x-2}{1-x} = -\dfrac{8}{3}.$

[$x_1 = \frac{5}{2} \vee x_2 = \frac{5}{4}$*]*

Příklad 4.20 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *následující rovnice:*

a) $x^2 + 2|x-1| - 6 = 0$ *b)* $|2x+1| - |2x| + 1 = 2x$

c) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-1}{x-5} = 4$ *d)* $3x^2 - 5x - 2 = 0$

e) $x^2 - 0,2x + 0,01 = 0$ *f)* $2(1-x)^2 = x - 3$

[a) $x_1 = 1 - \sqrt{5} \vee x_2 = 2$; *b)* $x = 1$; *c)* $x_1 = 9 \vee x_2 = 4$; *d)* $x_1 = 2 \vee x_2 = -\frac{1}{3}$;
e) $x_{1,2} = 0,1$ *f)* $x \in \{\ \}$*]*

Příklad 4.21 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $x - \dfrac{2}{a^3} = \dfrac{1}{a^2}(4x+1)$, *parametr* $a \in \mathbb{R}$.

[$a \neq 0$; *pro* $a = 2$ *rovnice nemá řešení;*
$a = -2$ *nekonečně mnoho řešení* $x = t, t \in \mathbb{R}$; $a \neq -2, 0, 2$ *je* $x = \frac{1}{a(a-2)}$*]*

Příklad 4.22 *Určete reálnou hodnotu parametru a tak, aby rovnice* $6a - ax + 2x = 15, x \in \mathbb{R}$ *měla kladný kořen.*

[$x = \frac{3(2a-5)}{a-2} > 0, a \in (-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$*]*

Příklad 4.23 *Pro které reálné hodnoty parametru má rovnice*

a) $x^2 - tx + 1 - 2t^2 = 0$ *reálné různé kořeny?*

b) $x^2 - x + m^2 - m = 1$ *jeden kořen roven nule?*

[a) $t \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$; *b)* $m = -3 \vee m = 4$; $x_1 = 0, x_2 = 1$*]*

Příklad 4.24 *Najděte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou* $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3.$

[$2x^2 - 7x + 3 = 0$*]*

Příklad 4.25 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *iracionální rovnice:*

a) $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$ *b)* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

c) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$ *d)* $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 2$

e) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{3}{2}$

[a) $x = 3$; *b)* $x = \frac{5}{2}$; *c)* $x = 16$ *d)* $x \in \{\}$; *e)* $x = \frac{5}{3}$*]*

Příklad 4.26 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *logaritmické rovnice:*

a) $\log(4x+6) - \log(2x-1) = 1$ *b)* $2\log(x-2) = \log(14-x)$

c) $\log(x+1) + \log(x-1) = \log x + \log(x+2)$ *d)* $\frac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$

[a) $x = 1$; *b)* $x = 5$; *c)* $x \in \{\ \}$; *d)* $x = 6$*]*

Příklad 4.27 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *exponenciální rovnice:*

a) $5^x + 1 - 3 \cdot 5^x = -49$

b) $3^{x+1} + 3^x = 4^{x-1} + 4^x$

c) $3 \cdot 2^{2x+1} + 2 \cdot 3^{2x+3} = 3 \cdot 2^{2x+4} - 3^{2x+2}$

d) $\dfrac{64}{25} \cdot \left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\dfrac{125}{512}\right)^{3-x}$

[a) $x = 2$; *b)* $x = 4{,}0408$; *c)* $x = -\frac{1}{2}$; *d)* $x = 4 \vee x = \frac{2}{3}$*]*

5 Soustavy rovnic

5.1 Soustavy lineárních rovnic

Několik rovnic o dvou a více neznámých, které mají být současně splněny, tvoří **soustavu rovnic**. Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic.

Při řešení soustavy se používají **ekvivalentní úpravy soustavy rovnic,** tj. takové úpravy, jimiž se nemění řešení soustavy. V takovém případě není nutná zkouška, ale je vhodná pro kontrolu.

Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic:

Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj.má totéž řešení.

Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.

Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

My se budeme zabývat **soustavou lineárních rovnic.** Základním typem metod řešení lineárních algebraických rovnic jsou eliminační metody, jejichž podstatou je postupná eliminace (vylučování) neznámých z rovnic soustavy. Podle způsobu, jimž eliminujeme jednu neznámou, rozlišujeme několik metod řešení:

Metoda sčítací - rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.

Příklad 5.1 *Metodou sčítací řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavu rovnic.*

$2x - y = 1$
$x + 3y = 11.$

Řešení:

První rovnici vynásobíme třemi, dostávame rovnici $6x - 3y = 31$. *Získali jsme tímto způsobem ekvivalentní soustavu*

$6x - 3y = 3$
$x + 3y = 11.$

Rovnice teď sečteme, tím vyloučíme neznámou y *a pro neznámou* x *dostáváme rovnici*

$$7x = 14,\ x = 2.$$

Obdobně lze vyloučit neznámou x *vynásobením druhé rovnice minus dvěma a sečtením s první rovnicí. Dostáváme rovnici*

$$-7y = -21,\ y = 3.$$

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y]$, $\underline{\underline{x = 2,\ y = 3.}}$

Metoda dosazovací - vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do dalších rovnic, čímž se jedna neznámá ze soustavy vyloučí.

Příklad 5.2 *Metodou dosazovací řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavu rovnic.*

$2x - y = 5$
$3x + 4y = -9.$

Řešení:

Z první rovnice vyjádříme $y = 2x - 5$, *a dosadíme do druhé rovnice. Dostáváme*

$$3x + 4(2x - 5) = -9,\ \ 11x = -9 + 20,\ \ x = 1.$$

Potom $y = 2x - 5 = 2 - 5 = -3$. *Dostali jsme řešení* $\underline{\underline{x = 1,\ y = -3.}}$

Metodu sčítací a dosazovací můžeme také kombinovat.

Příklad 5.3 *V* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *řešte soustavy rovnic:*

a) $x + y = 4$	*b*) $14x + 4y = 13$	*c*) $2x - 3y = 5$
$2x + 3y = 7$	$7x + 2y = 12$	$4x - 6y = 10$

Řešení:

$$a)\ \begin{array}{l} x + y = 4 \quad / \cdot (-3) \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -3x - 3y = -12 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 5,\ y = -1}}$$

$$b)\ \begin{array}{r} 14x + 4y = 13 \quad\quad \\ 7x + 2y = 12 \quad / \cdot 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 14x + 4y = 13 \\ 14x + 4y = 24 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\textit{soustava nemá řešení}}}$$

$$c)\ \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \quad / \cdot 2 \\ 4x - 6y = 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 4x - 6y = 10 \\ 4x - 6y = 10 \end{array}$$

$\Rightarrow$ *soustava má nekonečně mnoho řešení* $\underline{\underline{x = t,\ y = \frac{1}{3}(2t - 5), t \in \mathbb{R}}}$

5.2 Gaussova eliminační metoda

Při řešení více než dvou rovnic je nejvýhodnější použití **Gaussovy eliminační metody,** která spočívá v postupném převedení dané soustavy rovnic ekvivalentními úpravami na tzv. trojúhelníkový tvar.

Příklad 5.4 *Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavu rovnic.*

$$\begin{array}{ll} 9x + 5y - 2z = 15 & (1) \\ 8x + 6y + 3z = 15 & (2) \\ 3x - 7y + 4z = 27 & (3) \end{array}$$

Řešení:

Nejprve soustavu upravíme tak aby v první rovnici koeficient u neznámé x byl 1. Bylo by možné toho dosáhnout dělením první rovnice číslem 9, tím bychom ovšem dostali v první rovnici desetinná čísla. Raději od první rovnice odečteme druhou, čímž dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0 \qquad (1) \\ 8x + 6y + 3z &= 15 \qquad (2) \\ 3x - 7y + 4z &= 27 \qquad (3) \end{aligned}$$

Dále v získané soustavě od druhé rovnice odečteme 8-krát první, a od třetí rovnice odečteme 3-krát první. Tím eliminujeme neznámou x v těchto rovnicích a dostáváme tuto ekvivalentní soustavu:

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0 \qquad (1) \\ 14y + 43z &= 15 \qquad (2) \\ -4y + 19z &= 27 \qquad (3) \end{aligned}$$

Nyní druhou rovnici dělíme čtrnácti, abychom u neznámé y získali koeficient 1. Dále k třetí rovnici přičteme 4-krát druhou, čímž v ní eliminujeme neznámou y. Tím přecházíme k této soustavě rovnic:

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0 \qquad (1) \\ y + \frac{43}{14}z &= \frac{43}{15} \qquad (2) \\ 219z &= 219 \qquad (3) \end{aligned}$$

Tato soustava má trojúhelníkový tvar a její řešení určíme snadno takto: Z třetí rovnice po dělení číslem 219 dostáváme: $z = 1$. Dosazením do druhé rovnice vypočteme

$$y = \frac{1}{14}(15 - 43) = -2$$

a po dosazení do první rovnice vychází $x = -2 + 5 = 3$.

Dostali jsme řešení $\underline{\underline{x = 3,\ y = -2,\ z = 1.}}$

Příklad 5.5 *V $\mathbb{R}^3$ řešte soustavy rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ 3x - y + z &= 6 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 2 \\ 2x + 5y + 8z &= 12 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

Řešení:

Soustavy budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.

$$a)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ 3x - y + z &= 6 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ -7y - 8z &= -15 \\ y + 2z &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ y + 2z &= 3 \\ 6z &= 6 \end{aligned}$$

Tato soustava má trojúhelníkový tvar a můžeme jej snadno vyřešit.

Postupně dostáváme $z = 1,\ y = 3 - 2z = 1,\ x = 7 - 2y - 3z = 7 - 2 - 3 = 2.$

Dostali jsme tedy řešení $\underline{\underline{x = 2,\ y = 1,\ z = 1.}}$

$$b)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 2 \\ 2x + 5y + 8z &= 12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ y + 2z &= 10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ 0 &= 9 \end{aligned}$$

Z trojuhelníkového tvaru vidíme, že <u>*soustava nemá řešení.*</u>

$$c)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 3y + 2z &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *soustava má nekonečně mnoho řešení.*

Zvolíme-li $z = t$*, pak postupně máme*

$$y = -\frac{2}{3}t - 1 \ \ a\ \ x = 1 + \frac{4}{3}t + 2 - 3t = 3 - \frac{5}{3}t.$$

Řešením soustavy potom bude uspořádaná trojice $\underline{\underline{x = 3 - \frac{5}{3}t,\ y = -1 - \frac{2}{3}t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}.}}$

Příklad 5.6 *Řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavy lineárních rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} 8x - 3y + 12 &= 0 \\ 3x + 2y - 33 &= 0 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 2x - 6y &= -2 \\ x - 3y &= \ \ 4 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

[a) $x = 3, y = 12;$ *b) nemá řešení; c)* $x = 4 - 2a, y = a, a \in \mathbb{R}$*]*

Příklad 5.7 *Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v* $\mathbb{R}^3$ *soustavy rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 8 \\ 3x + 5y - z &= 10 \\ 7x - y + 7z &= 15 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + 4y - 3z &= 0 \\ x - 3y - z &= 0 \\ 2x + y - 4z &= 0 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + 2y + 4z &= 31 \\ 5x + y + 2z &= 29 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

[a) nemá řešení; b) $x = 13t/7, y = 2t/7, z = t;$ *c)* $x = 3, y = 4, z = 5$*]*

Příklad 5.8 *Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v* $\mathbb{R}^4$ *soustavy rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} 2x - 3y + 6z - u &= 1 \\ x + 2y - z \quad &= `0 \\ x + 3y - z - u &= -2 \\ 9x - y + 15z - 5u &= 1 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + 2y - z - 2u &= -2 \\ 2x + y + z + u &= 8 \\ x - y - z + u &= 1 \\ x + 2y + 2z - u &= 4 \end{aligned}$$

[a) soustava nemá řešení; b) $x = 1, y = 2, z = 1, u = 3$*]*

Příklad 5.9 *Určete vzájemnou polohu tří rovin:*

$\alpha: \; 2x - 3y + z = 0$
$\beta: \; x + 2y - z - 3 = 0$
$\gamma: 2x + y + z - 12 = 0$

[roviny se protínají v bodě $[2, 3, 5]$*]*

Příklad 5.10 *Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v* $\mathbb{R}^3$ *soustavu rovnic v závislosti na parametru* a.

$2x + 9y + 2z = 7a - 4$
$3x + 3y + 4z = 3a - 6$
$4x - 6y + 2z = -a - 8$

[$[x, y, z] = [a - 2, 2a/3, -a/2]$*]*

6 Řešení nerovnic

6.1 Operace s nerovnicemi

Jsou-li f a g funkce proměnné x definované na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, pak úloha:
"najděte všechna $x \in \mathcal{D}$, která po dosazení do jednoho ze vztahů:

$$f(x) < g(x),\ f(x) > g(x),\ f(x) \leq g(x),\ f(x) \geq g(x)$$

dají pravdivou nerovnost" znamená řešit nerovnici s neznámou x.

Při řešení nerovnic používáme ekvivalentní úpravy:

1. Záměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice:

   $f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x)$

2. Přičtení konstanty nebo funkce $h(x)$, definované v $\mathcal{D}$, k oběma stranám nerovnice:

   $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

3. Násobení nenulovou konstantou nebo funkcí $h(x)$ definovanou v $\mathcal{D}$:

   $a)\ h(x) > 0$ pro $x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x)$

   $b)\ h(x) < 0$ pro $x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x)$

4. Umocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

   $0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^n(x) < g^n(x), n \in \mathbb{N}$

5. Odmocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

   $0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$

Pokud používáme při řešení nerovnic ekvivalentní úpravy, není potřeba provádět zkoušku, snad jen pro vyloučení vlastních chyb.

Klasifikace nerovnic

Elementární nerovnice s neznámou x můžeme rozdělit (podobně jako rovnice) podle toho, v jaké pozici se v dané nerovnici nachází neznámá. Rozlišujeme nerovnice lineární a kvadratické, nerovnice s absolutní hodnotou, exponenciální a logaritmické nerovnice, iracionální nerovnice.

Postup řešení pro jednotlivé typy nerovnic ukážeme na příkladech.

6.2 Lineární nerovnice

Příklad 6.1 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici*

$$\frac{2x-17}{4} - \frac{8-x}{2} - 2 \leq x - 4 + \frac{x}{8}.$$

Řešení:

Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením.

$$\begin{aligned}
2(2x-17) - 4(8-x) - 16 &\leq 8(x-4) + x \\
4x - 34 - 32 + 4x - 16 &\leq 8x - 32 + x \\
4x + 4x - 8x - x &\leq -32 + 34 + 32 + 16 \\
-x &\leq 50 \setminus \cdot (-1) \\
x &\geq -50 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in \langle -50; \infty)}}
\end{aligned}$$

Příklad 6.2 *Řešte v* $\mathbb{N}$ *nerovnici*

$$\frac{3x-1}{4} - \frac{5-6x}{2} - 2 \leq 8 + \frac{3x}{2}.$$

Řešení:

Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením, stejně jako když hledáme řešení nerovnice v $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{4} - \frac{5-6x}{2} - 2 &\leq 8 + \frac{3x}{2} \setminus \cdot 4 \\
3x - 1 - 2(5-6x) &\leq 32 + 2 \cdot 3x \\
3x - 1 - 10 + 12x &\leq 32 + 6x \\
3x + 12x - 6x &\leq 32 + 1 + 10 \\
9x &\leq 43 \\
x &\leq \frac{43}{9} \ \wedge \ x \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Hledáme řešení v oboru přirozených čísel. Dostaneme

$$\underline{\underline{x \in \{1, 2, 3, 4\}}}$$

Příklad 6.3 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici v podílovém tvaru* $\dfrac{12-x}{x-4} > 0.$

Řešení:

$$\frac{12-x}{x-4} > 0 \Leftrightarrow \ [(12-x) > 0 \ \wedge \ (x-4) > 0] \ \vee \ [(12-x) < 0 \ \wedge \ (x-4) < 0]$$

$$[x < 12 \ \wedge \ x > 4] \ \vee \ [x > 12 \ \wedge \ x < 4]$$

$$4 < x < 12 \ \vee \ x \in \{ \}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in (4; 12)}}$

Jiný způsob řešení:

Najdeme tzv. nulové body čitatele a jmenovatele - to jsou body, ve kterých je polynom v čitateli nebo ve jmenovateli rovný nule - a v intervalech mezi nulovými body zjistíme znaménko čitatele, jmenovatele a nakonec celého zlomku.

	$(-\infty; 4)$	$(4; 12)$	$(12; \infty)$
$12-x$	+	+	-
$x-4$	-	+	+
podíl	-	+	-

Máme ostrou nerovnost, takže řešením naší nerovnice je $\underline{\underline{x \in (4; 12).}}$

Příklad 6.4 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\dfrac{2-x}{4+x} \leq 1.$

Řešení:

Upravíme na podílový tvar:

$$\frac{2-x-4-x}{4+x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2(x+1)}{4+x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{4+x} \geq 0.$$

Můžeme využít nulových bodů čitatele a jmenovatele, pak dostaneme řešení

$\underline{\underline{x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty)}}$

Danou rovnici můžeme řešit i jinak:

$$\frac{2-x}{4+x} \leq 1 \setminus \cdot (4+x)$$

a) $4 + x > 0 \Rightarrow 2 - x \leq 4 + x \Rightarrow -2 \leq 2x \Rightarrow x \geq -1$

Dostali jsme, že

$$(x > -4 \ \wedge \ x \geq -1) \ \Rightarrow \ x \geq -1.$$

b) $4 + x < 0 \Rightarrow 2 - x \geq 4 + x \Rightarrow x \leq -1$

Dostali jsme, že

$$(x < -4 \ \wedge \ x \leq -1) \ \Rightarrow \ x < -4.$$

Tedy $x < -4 \vee x \geq -1$ *čili* $\underline{\underline{x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty).}}$

6.3 Kvadratická nerovnice

Příklad 6.5 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Řešení:

$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; [(x-5) \geq 0 \wedge (x+1) \geq 0] \;\vee\; [(x-5) \leq 0 \wedge (x+1) \leq 0]$

$$x \geq 5 \;\vee\; x \leq -1 \;\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; \infty)}}$$

Úlohu můžeme řešit i pomocí nulových bodů polynomu nebo také graficky:

$y = x^2 - 4x - 5$ je rovnice paraboly,

její vrcholový tvar je $y + 9 = (x-2)^2$,

vrchol je $V[2; -9]$, průsečíky s osou x :

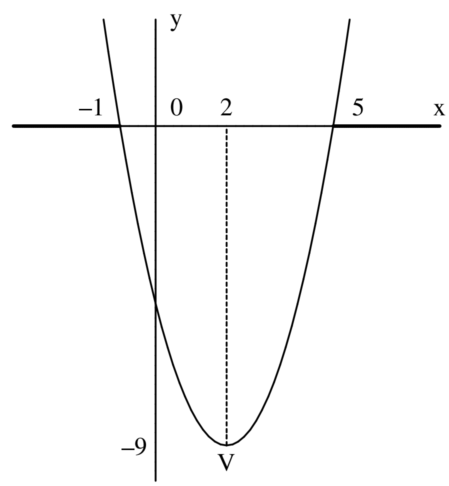
$P_1[-1; 0]$ $\quad$ $P_2[5; 0]$,

protože $(x-2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3$

$\Rightarrow x_1 = 5,\; x_2 = -1$.

Načrtneme graf.

Vidíme, že $y \geq 0$ pro $\underline{\underline{x \in (-\infty; -1) \cup \langle 5; \infty)}}$.



Příklad 6.6 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\dfrac{x+3}{x-1} + \dfrac{x+4}{x-4} \geq 2$.

Řešení:

Převedeme na podílový tvar $\dfrac{(x+3)(x-4) + (x+4)(x-1) - 2(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} \geq 0$ *a po úpravě čitatele* $\dfrac{12(x-2)}{(x-1)(x-4)} \geq 0$.

Pomocí nulových bodů:

	$(-\infty; 1)$	$(1; 2\rangle$	$(2; 4)$	$(4; \infty)$
$x-1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
zlomek	-	+	-	+

$\underline{\underline{x \in (1; 2\rangle \cup (4; \infty)}}$

6.4 Nerovnice s absolutními hodnotami

Příklad 6.7 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $|12-x| > 15-|x+3|$.

Řešení:

Pomocí nulových bodů výrazů v absolutních hodnotách rozdělíme $\mathbb{R}$ *na intervaly, ve kterých nerovnice řešíme.*

Pro $\underbrace{x \in (-\infty;-3\rangle : 12-x > 15+(x+3) \Rightarrow x < -3.}_{x<-3}$

Pro $\underbrace{x \in (-3;12\rangle : 12-x > 15-(x+3) \Rightarrow 12 < 12.}_{x \in \{\ \}}$

Pro $\underbrace{x \in (12;\infty) : -12+x > 15-(x+3) \Rightarrow x > 12.}_{x>12}$

Celé řešení rovnice $\underline{\underline{x \in (-\infty;-3) \cup (12;\infty).}}$

6.5 Iracionální nerovnice a soustavy nerovnic

Příklad 6.8 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\sqrt{x-3} < 5$.

Řešení:

Nerovnice má smysl pouze pro $x-3 \geq 0$ *t.j.* $x \geq 3$, *potom na obou stranách nerovnice jsou nezáporná čísla a lze umocnit:*

$$x-3 < 25 \Rightarrow x < 28.$$

Řešení je pak $\underline{\underline{x \in \langle 3;28).}}$

Příklad 6.9 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $x+1 < \sqrt{6x-14}$.

Řešení:

Řešíme za předpokladu $6x-14 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0$, *tedy* $x \geq \frac{7}{3}$.

Po umocnění $x^2+2x+1 < 6x-14 \Rightarrow x^2-4x+15 < 0$.

Kvadratický trojčlen $x^2-4x+15$ *má komplexní kořeny* $(D<0)$.

Parabola $y = x^2-4x+15$ *nikde neprotne osu* x, *proto řešení je* $\underline{\underline{x \in \{\ \}.}}$

Příklad 6.10 *Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu nerovnic*

$$\frac{1}{x+1} > 0 \ \wedge \ x^3 - x^2 < 0.$$

Řešení:

Ekvivalentní soustava je $x + 1 > 0 \wedge x^2(x-1) < 0$.

Na znaménko polynomu nemají vliv kořeny se sudou násobností.

Tedy $\underline{\underline{x \in (-1; 0) \cup (0; 1).}}$

Příklad 6.11 *Která přirozená čísla splňují nerovnici* $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{2x+6}{3} > \dfrac{4x-2}{5}$.

[$x \in \{49, 50, 51, \ldots\}$]

Příklad 6.12 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:*

a) $\dfrac{1-3x}{x+4} < 2$ *b)* $\dfrac{x+2}{1-x} \leq -2$ *c)* $\dfrac{3x-1}{x+1} < 2$ *d)* $\dfrac{x^2+x}{x^2+1} \leq 1$

[*a)* $(-\infty; -4) \cup (-\frac{7}{5}; \infty)$; *b)* $(1; 4\rangle$; *c)* $(-1; 3)$; *d)* $(-\infty; 1\rangle$]

Příklad 6.13 *V množině celých záporných čísel řešte nerovnici*

$\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x-2}{3} - 5 > \dfrac{x-1}{2}$.

[$x \in \{-8, -9, -10, \ldots\}$]

Příklad 6.14 *Jaké musí být číslo k, aby rovnice $5kx - 9 = 10x - 3k$ měla kladné řešení?*

[$2 < k < 3$]

Příklad 6.15 *Řešte v $\mathbb{R}$ kvadratické nerovnice:*

a) $2x^2 - 3x - 2 > 0$ *b)* $20x - x^2 \geq 36$

c) $x^2 + x + 1 < 0$ *d)* $x^2 - 0{,}2x + 0{,}01 \leq 0$

[*a)* $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$; *b)* $x \in \langle 2; 18\rangle$; *c)* $x \in \{\ \}$; *d)* $x = 0{,}1$]

Příklad 6.16 *Pro která $m \in \mathbb{R}$ bude platit $x^2 + 6x + (5m-1)(m-1) > 0$ pro všechna reálná x?*

[$m \in (-\infty; -\frac{4}{5}) \cup (2; \infty)$]

Příklad 6.17 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:*

a) $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{2x-1}{3x+1} \geq 0$ *b)* $x(x^2-7x+10) > 0$

c) $\dfrac{x^2-9x+18}{x^2-x-2} < 0$ *d)* $\dfrac{x^4}{x+2} + \dfrac{x^4}{3-x} < \dfrac{(10x-6)x^2}{-x^2+x+6}$

[*a)* $x \in (-\infty;-3) \cup (-\frac{1}{3};\infty)$; *b)* $x \in (0;2) \cup (5;\infty)$;
c) $x \in (-1;2) \cup (3;6)$; *d)* $x \in (-\infty;-2) \cup (3;\infty)$]

Příklad 6.18 *V oboru reálných čísel řešte nerovnice:*

a) $|x-3| > 5$ *b)* $|x+2| < 8$

[*a)* $x \in (-\infty;-2) \cup (8;\infty)$; *b)* $x \in (-10;6)$]

Příklad 6.19 *Pomocí absolutní hodnoty zapište nerovnice:*

a) $-2 < x < 2$ *b)* $1 \leq x \leq 3$ *c)* $-3 \leq x \leq -1$

[*a)* $|x| < 2$; *b)* $|x-2| \leq 1$; *c)* $|x+2| \leq 1$]

Příklad 6.20 *Najděte množinu všech řešení nerovnic s absolutní hodnotou:*

a) $|x| + \dfrac{1}{x} < 0$ *b)* $\dfrac{|x|}{x} - 1 < 0$

c) $|x+1| + |x| \leq 2$ *d)* $1 - |x| \leq |x+1|$

e) $\dfrac{|2x-2|}{2-x} < 1$ *f)* $|x| \leq |x-1|$

g) $|3x+1| < 2x$ *h)* $|x+2| - 2|2x+4| \leq |3x-1|$

i) $|x-3| \cdot |x-2| \cdot |x+4| > 0$

[*a)* $x \in (-1;0)$; *b)* $x \in (-\infty;0)$; *c)* $x \in \langle -\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle$; *d)* $x \in \mathbb{R}$; *e)* $x \in (0;\frac{4}{3}) \cup (2;\infty)$;
f) $x \in (-\infty;\frac{1}{2}\rangle$; *g)* $x \in \emptyset$; *h)* $x \in \mathbb{R}$; *i)* $x \in \mathbb{R}, x \neq -4, 2, 3$]

Příklad 6.21 *Řešte v $\mathbb{R}$ iracionální nerovnice:*

a) $\sqrt{x^2+x-12} \leq 6-x$ *b)* $x - 3\sqrt{x} - 4 \geq 0$

c) $\sqrt{x+2} < \sqrt{2x-8}$ *d)* $\sqrt{x-2} + x > 4$

e) $\sqrt{-x^2+8x-12} > \sqrt{3}$

[*a)* $x \in (-\infty;-4\rangle \cup \langle 3;\frac{48}{13}\rangle$; *b)* $x \in \langle 16;\infty)$; *c)* $x \in (10;\infty)$;
d) $x \in (3;\infty)$; *e)* $x \in (3;5)$]

Příklad 6.22 *Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu nerovnic*

$x^2 - 4x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x^2 - 8x + 15 < 0.$

[$x \in (3; 5)$]

Příklad 6.23 *Najděte $x \in \mathbb{R}$, která splňují složenou nerovnost.*

a) $\dfrac{x}{2} - 1 < |x| < \dfrac{x}{2} + 1$ *b)* $|3x - 1| < x < |3x + 1|$

[*a)* $-\frac{2}{3} < x < 2$; *b)* $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$]

Příklad 6.24 *Najděte zlomek, pro nějž platí:*

zmenšíme-li jmenovatele o 1, je zlomek roven $\dfrac{1}{2}$, *zvětšíme-li čitatele o 20, dostaneme zlomek z intervalu (2;3).*

[$\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$]

7 Elementární funkce

7.1 Lineární funkce

Lineární funkcí nazýváme každou funkci f, která je daná předpisem

$$f : y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R}.$$

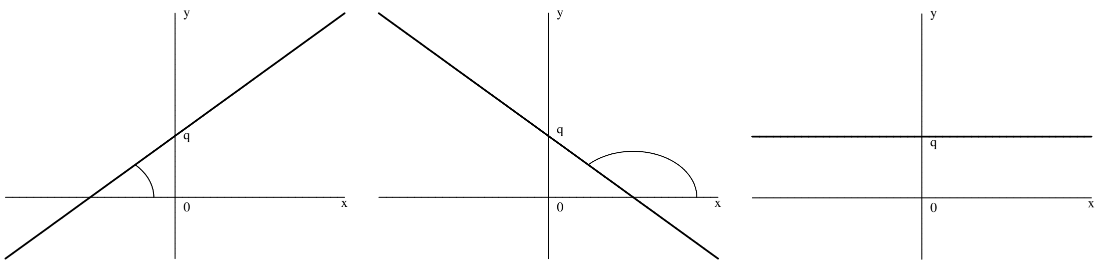
Grafem lineární funkce je vždy přímka různoběžná s osou O_y.

Definiční obor $\mathcal{D}$ lineární funkce f (značíme $\mathcal{D}_f$) je $\mathbb{R}$.

Obor hodnot funkce f (značíme $\mathcal{H}_f$) je $\mathbb{R}$.

Význam konstant k, q je vidět z následujícího obrázku:

Pro $k = 0$ dostáváme **konstantní funkci.**



$k > 0$	$k < 0,$	$k = 0$
$k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{2}$	$k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha > \frac{\pi}{2}$	$k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha = 0$
rostoucí funkce	klesající funkce	konstantní funkce

Příklad 7.1 *Určete lineární funkci, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice* $[-2; -3], [-1; -4]$ *a jejíž obor funkčních hodnot je interval* $\langle -6; 0\rangle$.
Sestrojte graf.

Řešení:

Je $y = kx + q$ *a dosadíme souřadnice bodů.*

Pak $-3 = -2k + q \ \wedge\ -4 = -k + q$.

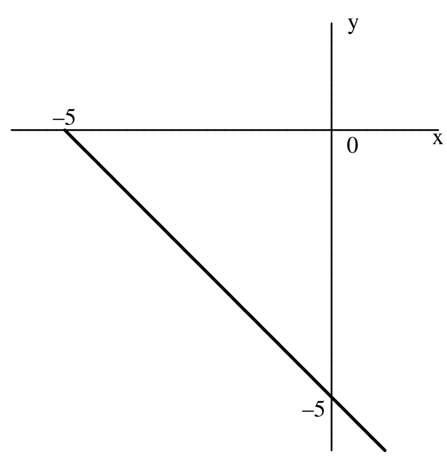
Řešením této soustavy dostaneme

$k = -1,\ q = -5.$

Lineární funkce pak je

$$\underline{\underline{y = -x - 5.}}$$

Pro $y \in \langle -6; 0\rangle$ *dostaneme krajní body úsečky* $[1; -6],\ [-5; 0]$.



Příklad 7.2 *Nakreslete grafy těchto funkcí:*

a) $f_1 :\ y = -x + 3$

Funkce je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$, *grafem lineární závislosti je přímka.*

$H(f_1) = \mathbb{R}$

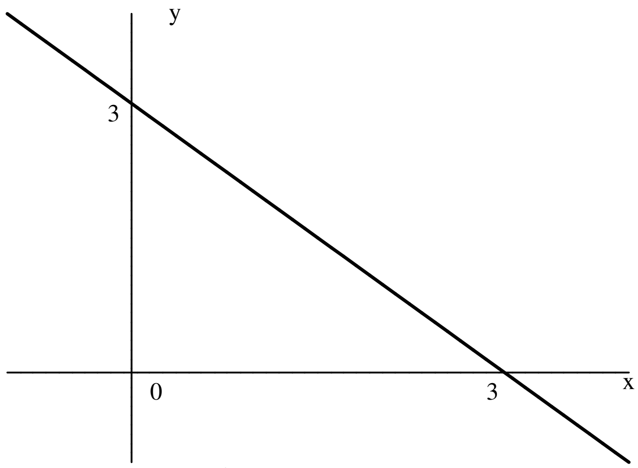
Zvolíme $x_1 = 0 \ \Rightarrow\ y_1 = 3$, *dále* $y_2 = 0 \ \Rightarrow\ x_2 = 3.$

Tyto průsečíky se souřadnicovými osami nám určí přímku.

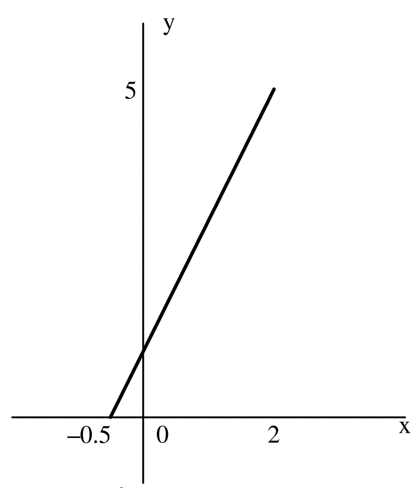
b) $f_2 :\ y = 2x + 1$ *pro* $x \in \langle -0{,}5; 2\rangle$

Příslušná úsečka má krajní body $[-\frac{1}{2}; 0]$ *a* $[2; 5]$

$D(f_2) = \langle -0{,}5; 2\rangle, \quad H(f_2) = \langle -0; 5\rangle$



$f_1 :\ y = -x + 3$



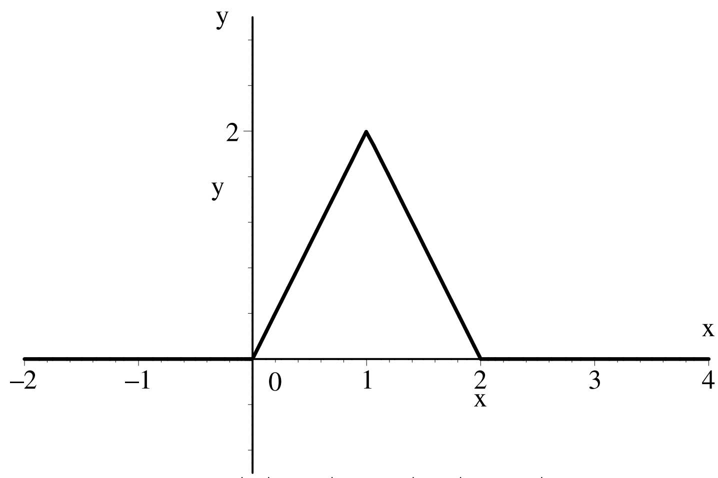
$f_2 :\ y = 2x + 1$

Příklad 7.3 *Nakreslete graf funkce* $y = |x| - 2|x - 1| + |x - 2|$.

Řešení:

Body $x = 0, 1, 2$ *rozdělí osu* x *na čtyři intervaly a určíme tvar funkce* y *v jednotlivých intervalech:*

	$(-\infty;0\rangle$	$(0;1\rangle$	$(1;2\rangle$	$(2;\infty)$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x	x
$-2\lvert x-1\rvert$	$-2(-x+1)$	$-2(-x+1)$	$-2(x-1)$	$-2(x-1)$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
y	0	$2x$	$2x+4$	0



$$y = |x| - 2|x-1| + |x-2|$$

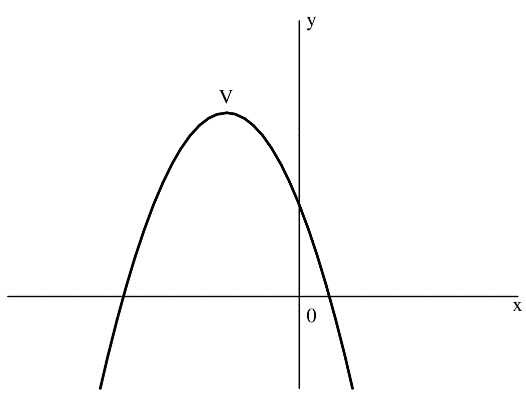
7.2 Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme každou funkci, která je daná předpisem

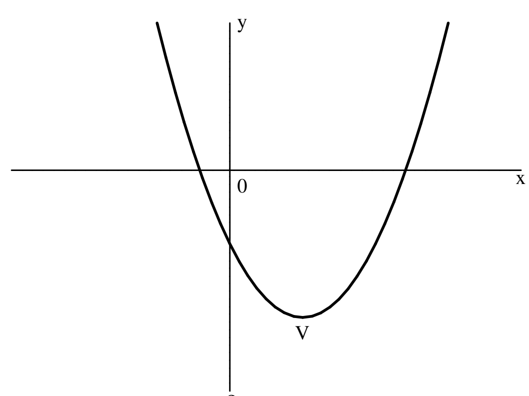
$$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Definiční obor kvadratické funkce f je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Grafem kvadratické funkce je parabola s osou rovnoběžnou s osou y.



$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$



$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

Máme-li sestrojit graf kvadratické funkce

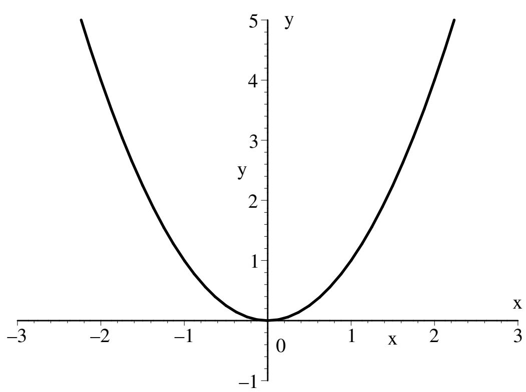
$$y = ax^2 + bx + c,$$

vyjdeme ze základní paraboly $y = x^2$ a postupnými transformacemi určíme souřadnice vrcholu. Je také vhodné určit průsečíky s osami.

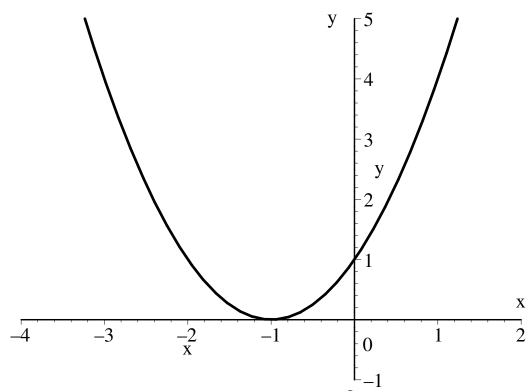
Příklad 7.4 *Načrtněte graf kvadratické funkce* $y = \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{9}{4}$.

Řešení:

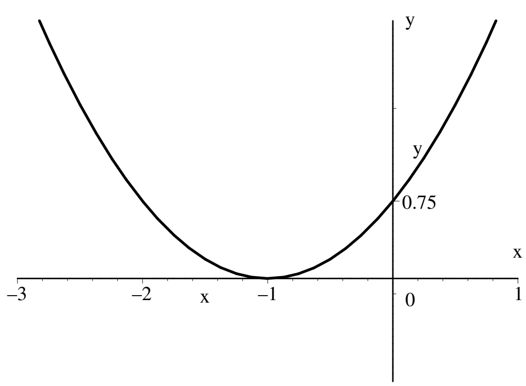
Předpis upravíme na tvar $y + 3 = \dfrac{3}{4}(x+1)^2$ *a postupně sestrojíme*
$y_1 = x^2,\ y_2 = (x+1)^2,\ y_3 = \dfrac{3}{4}(x+1)^2,\ y = \dfrac{3}{4}(x+1)^2 - 3$ *neboli* $y - 3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$.



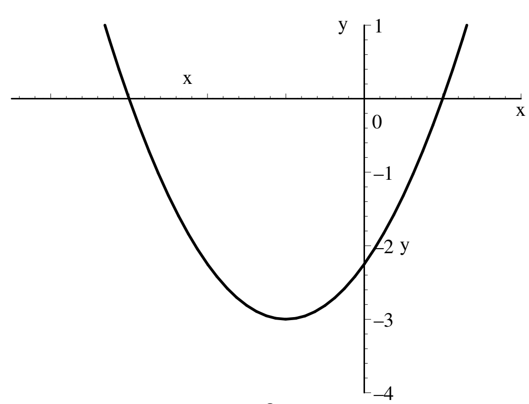
$y_1 = x^2$



$y_2 = (x+1)^2$



$y_3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$



$y + 3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$

Obecně tedy:

Rovnoběžným posunutím paraboly $y = ax^2$ *do vrcholu* $V(m;n)$ *dostaneme parabolu*

$$y - n = a(x-m)^2.$$

Osa paraboly zůstává rovnoběžná s osou y.

7.3 Mocninná funkce

Mocninná funkce s přirozeným exponentem je funkce

$$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Definiční obor mocninné funkce je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Obecně je grafem parabola n-tého stupně.

Příklad 7.5 *Načrtněte grafy funkcí*

$f_1 : y = x^3 - 1,\ f_2 : y = (x-1)^3,\ f_3 : y = \frac{1}{4}x^4,\ f_4 : y = |x^4 - 3|.$

Řešení:

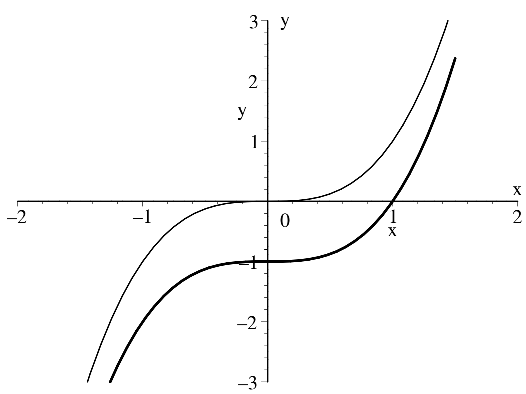
Upravíme analogicky jako u kvadratické funkce:

$f_1 : y + 1 = x^3$, *graf dostaneme posunutím grafu funkce* $y = x^3$ *do vrcholu* $V[0; -1]$.

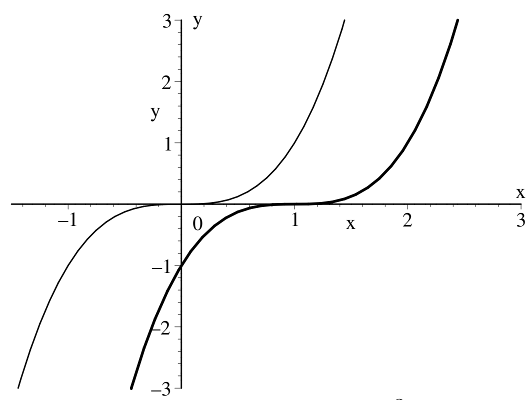
$f_2 : y + 0 = (x-1)^3,\ V[1; 0]$

$f_3 : y + 0 = \frac{1}{4}(x+0)^4,\ V[0; 0]$

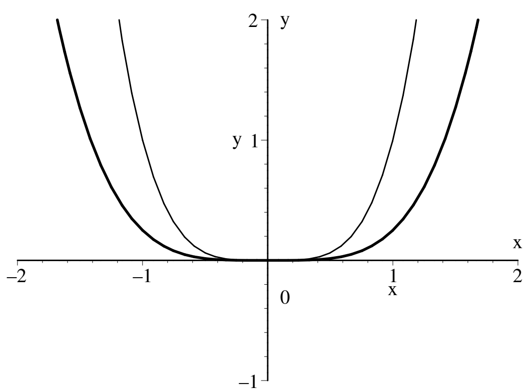
$f_4 :$ *Nakreslíme postupně grafy* $y_1 + 3 = x^4$ *a pak* $y = |y_1|$.



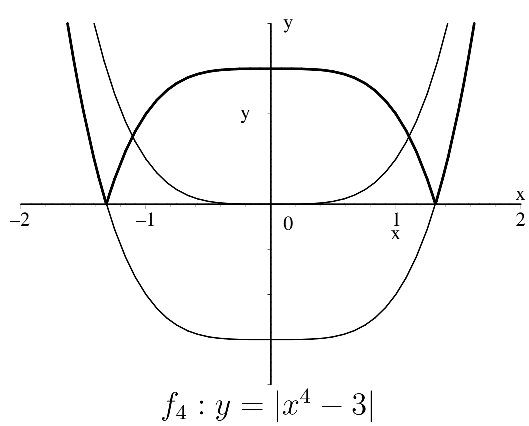
$f_1 : y + 1 = x^3$



$f_2 : y + 0 = (x-1)^3$



$f_3 : y = \frac{1}{4}x^4$



$f_4 : y = |x^4 - 3|$

Příklad 7.6 *Bez výpočtu rozhodněte, které z čísel* 4^{300}, 3^{400}*je větší.*

Řešení:

Upravíme $4^{300} = (4^3)^{100},\ 3^{400} = (3^4)^{100}$.

Obě mocniny lze chápat jako hodnoty funkce $y = x^{100}$.

Tato funkce je pro $x \in \langle 0 : \infty)$ *rostoucí,* $4^3 < 3^4$, *proto* $4^{300} < 3^{400}$.

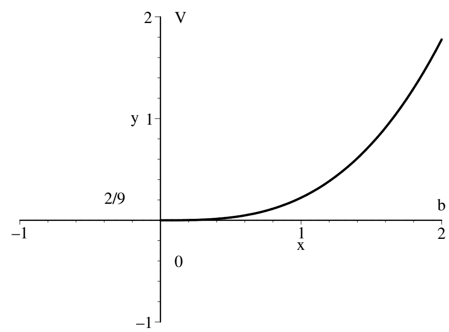
Příklad 7.7 *Uvažujme množinu všech kvádrů, jejichž délky hran jsou v poměru* $1 : 2 : 3$. *Určete funkci vyjadřující závislost objemu kvádru na délce jeho nejdelší hrany a načrtněte její graf.*

Řešení:

Označme délku nejdelší hrany b,

pak $a = \frac{b}{3};\ c = \frac{2}{3}b$ *pro* $b > 0$.

Pak $V = \underline{\underline{\frac{2}{9}b^3}}$.



Příklad 7.8 *Určete definiční obor funkcí:*

a) $y = \sqrt{2x-6}$ *b)* $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Řešení:

a) Aby byla funkce $y = \sqrt{2x-6}$ *definovaná, musí být* $2x - 6 \geq 0$, *tedy* $x \geq 3$.

Můžeme tedy psát, že

$$\underline{\underline{D(f) =< 3, \infty)}}$$

b) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0,\ x \neq -1$

Nulové body čitatele a jmenovatele jsou $x = -1$ *a* $x = 1$.

Dostaneme

$$\underline{\underline{D(f) = (-\infty, -1) \cup < 1, \infty)}}$$

Mocninná funkce s celým záporným exponentem je funkce

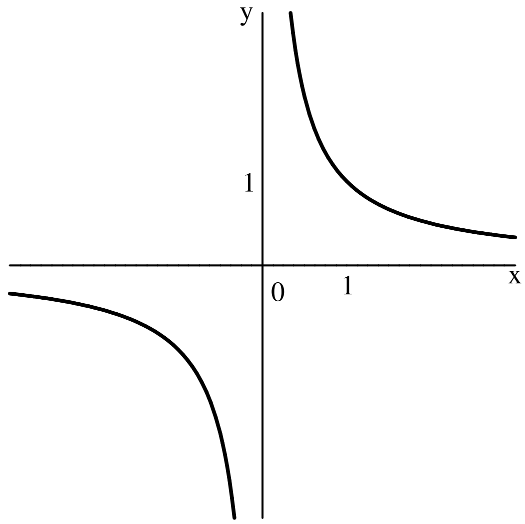
$$f : y = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$$

Definiční obor této funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

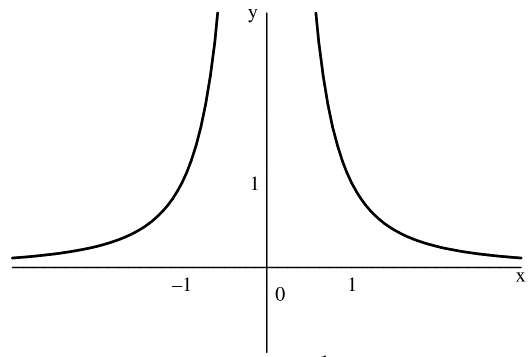
Grafem je **hyperbola** n-tého stupně.

Příklad 7.9 *Nakreslete grafy funkcí* $f_1 : y = \frac{1}{x}$ *a* $f_2 : y = \frac{1}{x^2}$.

Řešení:



$f_1 : y = \frac{1}{x}$



$f_2 : y = \frac{1}{x^2}$

Lineární lomená funkce je funkce daná předpisem

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d},\ \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0.$$

Definiční obor této funkce je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$.

Nejjednodušší případ nastane pro $a = d = 0$, pak $y = \frac{k}{x}$ a grafem je **rovnoosá hyperbola.**

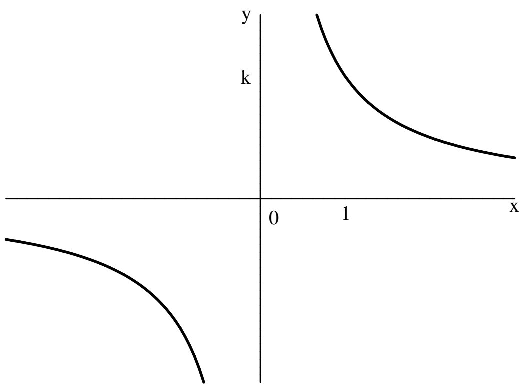
V ostatních případech dostaneme po úpravě

$$y - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

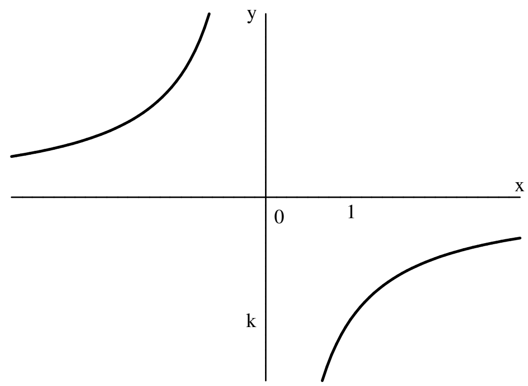
opět rovnoosou hyperbolu se středem v bodě $S[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$, asymptoty procházejí středem a jsou rovnoběžné s osami souřadnými.

Příklad 7.10 *Nakreslete graf funkce* $f: y = \dfrac{k}{x}$ *(nepřímá úměrnost).*

Řešení:



$f: y = \frac{k}{x}\ k > 0$



$f: y = \frac{k}{x}\ k < 0$

Příklad 7.11 *V kartézském souřadnicovém systému nakreslete graf funkce*

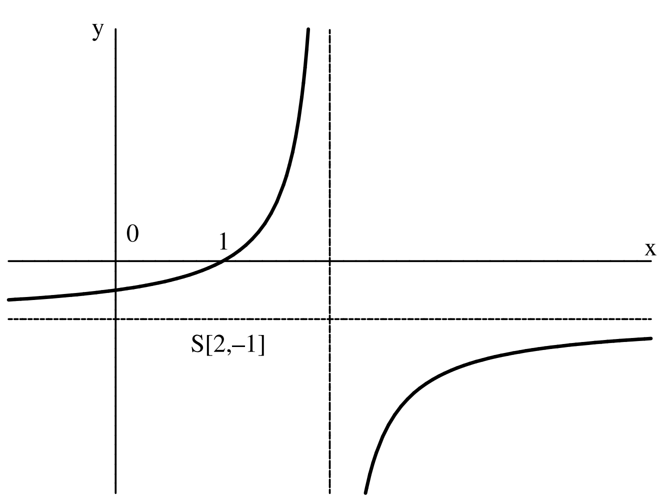
$f: y = \dfrac{1-x}{x-2}.$

Řešení:

Upravíme $y = \dfrac{1-x+2-2}{x-2} = \dfrac{-x+2-1}{x-2} = -1 - \dfrac{1}{x-2}$, *tedy* $y+1 = \dfrac{-1}{x-2}$.

Asymptoty procházejí bodem $S[2;-1]$.

Můžeme určit průsečíky se souřadnicovými osami: $X[1;0],\ Y[0;-0{,}5]$



7.4 Exponenciální funkce a logaritmická funkce

Exponenciální funkce o základu $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$ je každá funkce

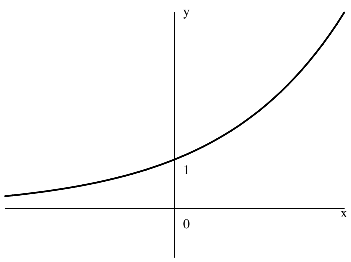
$$f : y = a^x.$$

Definiční obor této funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

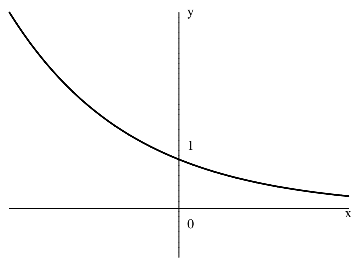
Obor hodnot $\mathcal{H}_f = (0; \infty)$.

Pro případ $a = e$ dostaneme **přirozenou** exponenciální funkci.

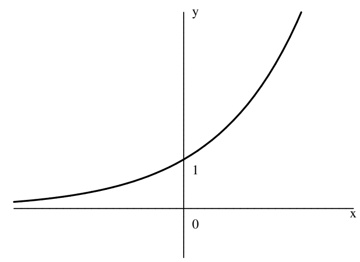
Graficky:



$y = a^x, \ a > 1$



$y = a^x, \ 0 < a < 1$



$y = e^x$

Inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$ je:

Logaritmická funkce o základu $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$. Značíme

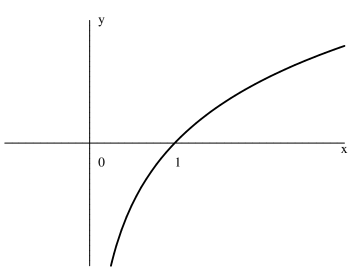
$$f : y = \log_a x.$$

Definiční obor $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

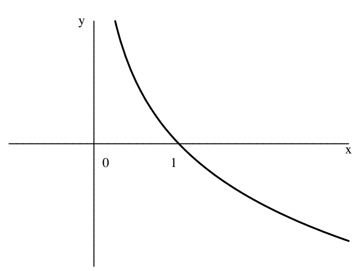
Obor hodnot $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.

Pro základ $a = e$ dostaneme **přirozené** logaritmy, které používáme nejčastěji.

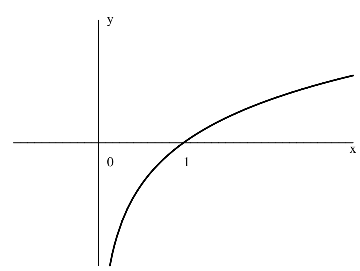
Graficky:



$y = \log_a x, \ a > 1$



$y = \log_a x, \ 0 < a < 1$



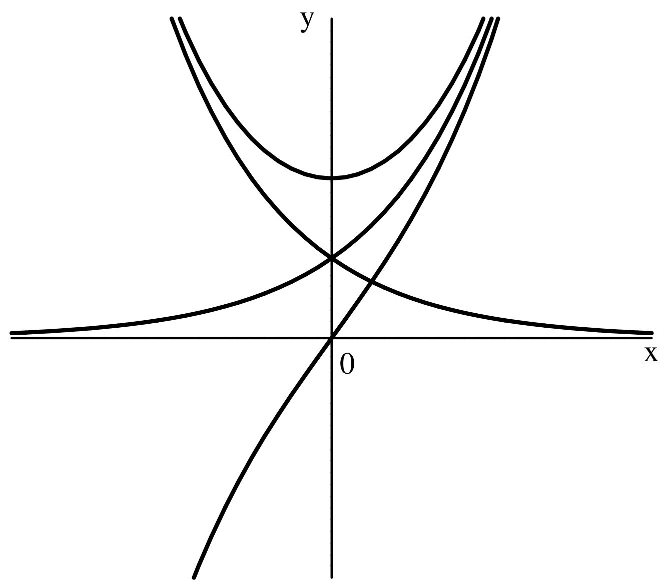
$y = \ln x$

Příklad 7.12 *V téže kartézské soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí:*

$f_1 = 2^x,\ f_2 = 2^{-x},\ f_3 = 2^x + 2^{-x}$ *a* $f_4 = 2^x - 2^{-x}$.

Řešení:
Sestavíme tabulku pro získání několika funkčních hodnot:

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2^x + 2^{-x}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$
$2^x - 2^{-x}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$



Příklad 7.13 *Načrtněte grafy funkcí:*

a) $y = 2|x+1| - 3|x-1|,\ x \in \mathbb{R}$ *b)* $y = |x| + x,\ x \in \mathbb{R}$

c) $y = \sqrt{(x-1)^2},\ x \in \langle -3; \infty)$

[a) $y = x - 5, x \in (-\infty; -1);\ y = 5x - 1, x \in \langle -1; 1);\ y = -x + 5, x \in \langle 1; \infty)$;
b) $y = 0, x \in (-\infty; 0);\ y = 2x, x \in \langle 0; \infty)$;
c) $y = -x + 1, x \in \langle -3; 1);\ y = x - 1, x \in \langle 1; \infty)$*]*

Příklad 7.14 *Úpravou rovnice paraboly určete souřadnice vrcholu a průsečíky P_1 a P_2 s osou O_x, průsečík Q s osou O_y.*

a) $y = 2x^2 - 4x - 6$ *b)* $y = -x^2 + 4x$

[a) $y = 2(x-1)^2 - 8, V[1;-8], P_1[-1;0], P_2[3;0], Q[0;-6]$;
b) $y = -(x-2)^2 + 4, V[2;4], P_1[0;0], P_2[4;0], Q[0;0]$ *]*

Příklad 7.15 *Sestrojte graf lineární lomené funkce:*

a) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ *b)* $y = \dfrac{1+4x}{x}$ *c)* $y = \dfrac{2x}{2+x}$

Příklad 7.16 *Najděte všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž exponenciální funkce $\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^x$ je*

a) rostoucí,

b) klesající.

[a) $p \in (-\infty; -2)$; *b)* $p \in (0; \infty)$ *]*

Příklad 7.17 *V téže kartézské soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí:*

a) $y = 1{,}5^x,\ y = 1{,}5^{|x|},\ y = 1{,}5^{-|x|},\ y = -1{,}5^{|x|}$

b) $y = \log_3 x,\ y = \log_3(x-2),\ y = \log_3(x+2),\ y = 2 - \log_3 x$

Příklad 7.18 *Najděte definiční obor těchto funkcí:*

a) $y = \log_a(x+3)$ *b)* $y = \log_3 x^2$ *c)* $y = \log_5(-x)$

d) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$ *e)* $y = \log_5 \sqrt{4-x}$ *f)* $y = \sqrt{\log_3 x}$

g) $y = \log_{\frac{1}{10}} \sqrt{\frac{x}{3-2x}}$ *h)* $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

[a) $(-3;\infty)$; *b)* $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$; *c)* $(-\infty; 0)$;
d) $(-\infty;-1) \cup (2;\infty)$; *e)* $(-\infty; 4)$; *f)* $\langle 1;\infty)$; *g)* $(0;\frac{3}{2})$; *h)* $(0;1\rangle$*]*

Příklad 7.19 *Najděte definiční obor následujících funkcí:*

a) $y = \sqrt{-x^2+7x-12}$ *b)* $y = 2^{\sqrt{9-x^2}} + \log(3x-5)$

c) $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \ln\,(x+2)$ *d)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}$

e) $y = \sqrt{1 - \log\frac{1-x}{1+x}}$ *f)* $y = \sqrt{x^2+2x+10} + \sqrt{\log\,(2x+5)}$

[a) $\langle 3;4\rangle$; *b)* $(\frac{5}{3};3\rangle$; *c)* $(1;\infty)$; *d)* $(-\infty;-3) \cup (\frac{1}{2};\infty)$; *e)* $\langle -\frac{9}{11};1)$; *f)* $\langle -2;\infty)$*]*

8 Vlastnosti funkce jedné proměnné

8.1 Vlastnosti a druhy funkcí

Sudá funkce, lichá funkce

Nechť je f funkce definována na množině $D(f) \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.

Říkáme, že funkce f je **sudá funkce,** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = f(-x)$.

Říkáme, že funkce f je **lichá funkce,** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = -f(-x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

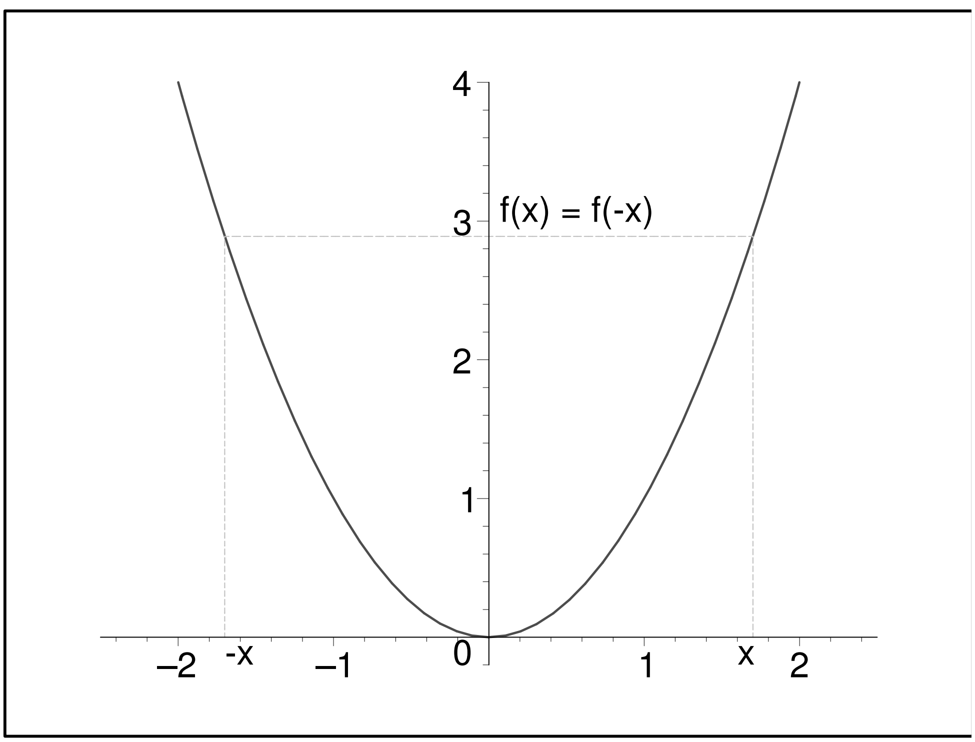
Příklad 8.1 *Zjistěte zda funkce :*

a) $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = (x-1)^2$

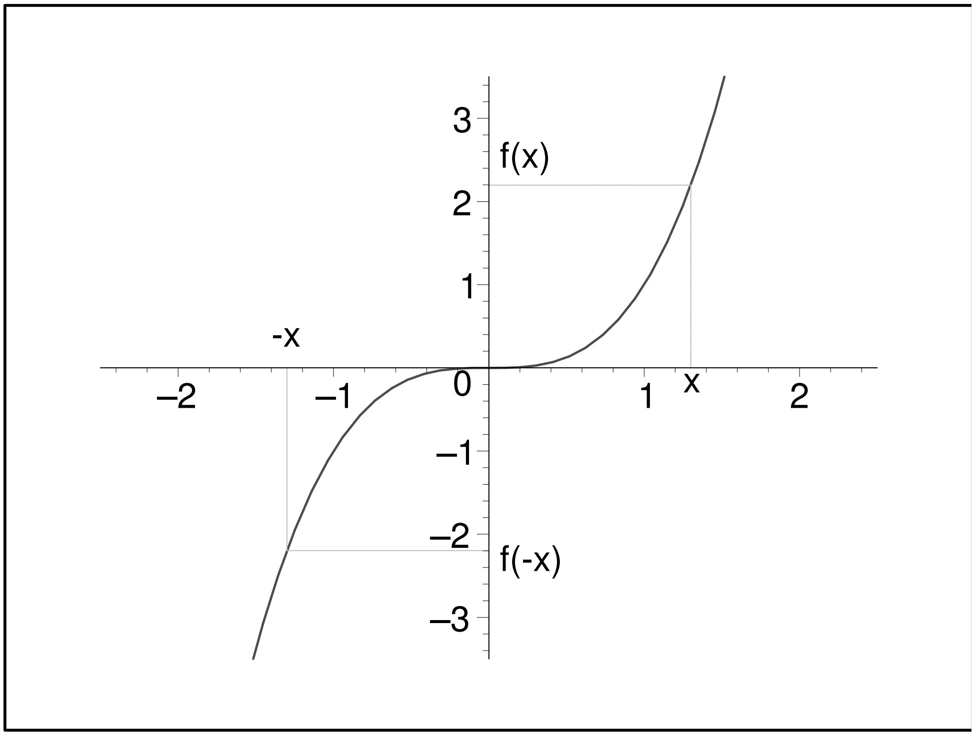
je sudá nebo lichá.

Řešení:

a) $D(f) = \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. *Funkce je* $\underline{\underline{\textit{sudá.}}}$



Obrázek 8.1: Sudá funkce



Obrázek 8.2: Lichá funkce

b) $D(f) = \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. *Funkce je* $\underline{\underline{\textit{lichá.}}}$

c) $D(f) = \mathbb{R},\ f(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \neq f(x),\ (x+1)^2 \neq f(-x)$.

Funkce $\underline{\underline{\textit{není ani sudá ani lichá.}}}$

Periodická funkce

Funkce f se nazývá **periodická funkce,** právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x + p \in D(f)$ a platí

$$f(x+p) = f(x).$$

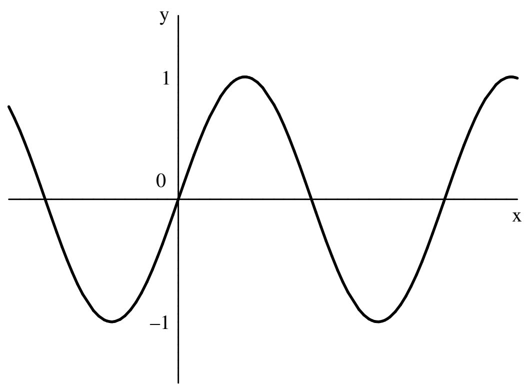
Číslo p se nazývá **perioda funkce** f.

Platí-li, že p je perioda funkce f, potom platí, že

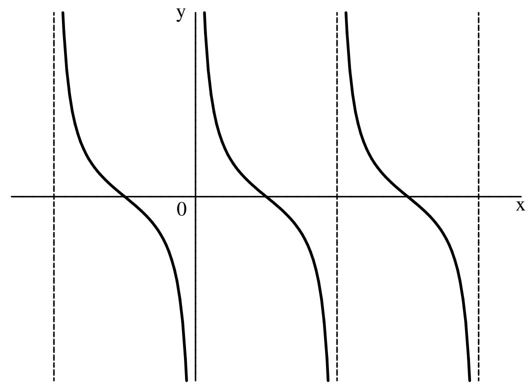
$$f(x+kp) = f(x)$$

pro každé $x \in D(f)$ a každé celé k. Má-li tedy periodická funkce f periodu p, pak také každé číslo kp, $(k \neq 0$, celé) je rovněž periodou funkce f.

Nejvýznamnějšími příklady periodických funkcí jsou goniometrické funkce.



$y = \sin x$, perioda $p = 2\pi$



$y = \mathrm{cotg}\, x$, perioda $p = \pi$

Omezená funkce

Funkce f se nazývá **zdola omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo h, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.

Funkce f se nazývá **omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když je zdola omezená a shora omezená na množině M.

Monotonní funkce

Funkce f se nazývá **rostoucí na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **neklesající na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **nerostoucí na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotonní funkce na množině** M; nerostoucí a neklesající funkce se souhrnně nazývají **monotonní funkce na množině** M.

8.2 Inverzní funkce

Funkce f s definičním oborem $D(f)$ se nazývá **prostá funkce** právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Je-li f prostá funkce s definičním oborem $D(f)$, a oborem hodnot $H(f)$, potom k tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Je to **funkce inverzní k funkci** f a značíme ji f^{-1}.

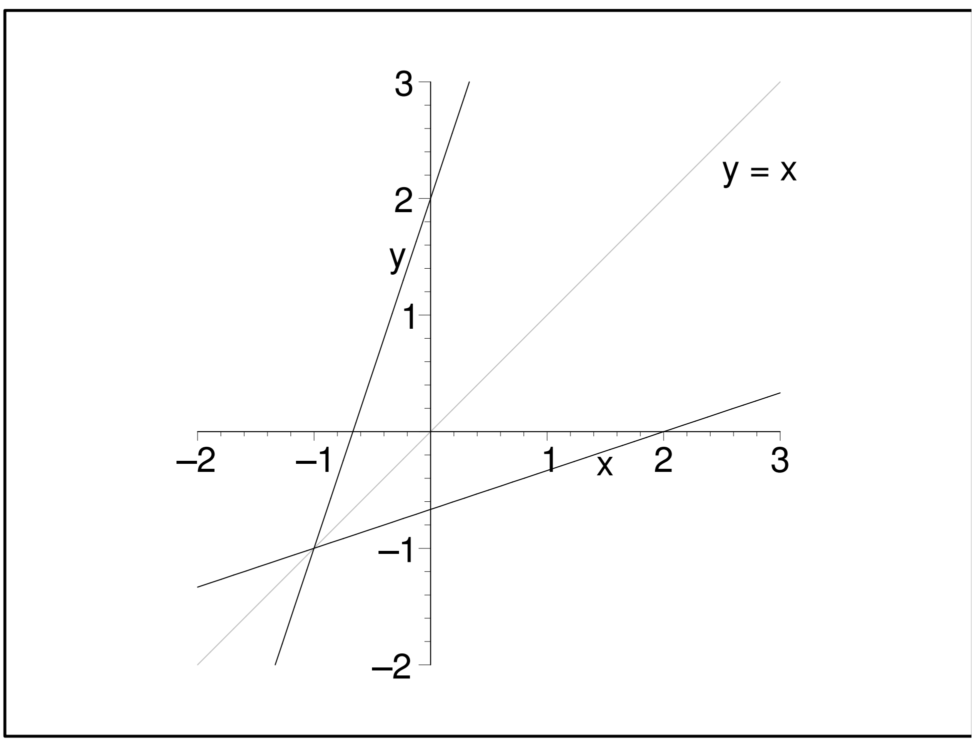
Platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ a $x = f^{-1}(y)$ právě když $y = f(x)$.

Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

Příklad 8.2 *Určete funkci inverzní k funkci* $f : y = 3x + 2$.

Řešení:

Funkce f *je lineární a je prostá.*



Obrázek 8.3: Inverzní funkce k funkci $f : y = 3x + 2$

Inverzní funkci budeme hledat tak, že zaměníme x *a* y *a z nové rovnice vyjádříme* y.

$f^{-1} : x = 3y + 2$

Z toho $\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{1}{3}(x - 2).}}$

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 8.3 *Určete funkci inverzní k funkcím :*

a) $y = \ln(2x+8)$ *b)* $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$

Řešení:

a) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice $2x + 8 > 0$.

Dostaneme $D(f) = (-4, \infty)$.

Funkce f *je logaritmická funkce složená s lineární. Je to funkce složená ze dvou prostých funkcí, tedy je i* f *prostá funkce.*
Zaměníme x *a* y *a z této nové rovnice vyjádříme* y.

$$f^{-1} : x = \ln(2y+8)$$

Inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce. Aplikujeme tedy exponenciální funkci na obě strany rovnice a dostaneme:

$$e^x = 2y+8 \qquad e^x - 8 = 2y$$

Proto inverzní funkce k funkci $f : y = \ln(2x+8)$ *je funkce*

$$\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{e^x - 8}{2}}}$$

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R},$$

a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že

$$H(f^{-1}) = D(f) = (-4, \infty).$$

b) Aby byla funkce $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ *definovaná, musí být* $x \neq 1$.

Můžeme tedy psát, že $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Funkce f *je lineární lomená funkce, a je i prostá (grafem této funkce je hyperbola).*
Pro výpočet inverzní funkce zaměníme v zadání funkce x *a* y.

$$f^{-1} : x = \frac{2y-5}{y-1} \Rightarrow$$

$$x(y-1) = 2y-5 \Rightarrow xy - x = 2y - 5 \Rightarrow xy - 2y = x - 5 \Rightarrow y(x-2) = x-5$$

$$\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{x-5}{x-2}}}$$

Pro definiční obor inverzní funkce platí, že $x \neq 2$.

$$D(f^{-1}) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = H(f),$$

a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že

$$H(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

8.3 Limita a spojitost funkce

Funkce jedné proměnné $f : y = f(x)$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $L \in \mathbb{R}$ jestliže v případě, kdy se hodnota x blíží k číslu a funkční hodnoty $f(x)$ se blíží k hodnotě (limitě) L.

K vyjádření blízkosti dvou bodů $x, a \in \mathbb{R}$ používáme v matematice pojem okolí bodu.

r-okolím bodu a $(a, r \in \mathbb{R},\ r > 0)$ označovaným $U(a; r)$ se rozumí otevřený interval

$$U(a; r) = (a - r, a + r)$$

Číslo $r > 0$ se nazýva **poloměr okolí** $U(a; r)$. Místo $U(a; r)$ se někdy píše $U(a)$, pokud hodnota poloměru okolí není v dané situaci podstatná.

Říkáme, že **funkce** f **má v bodě** $a \in \mathbb{R}$ **limitu** $L \in \mathbb{R}$, právě když ke každému libovolně zvolenému ε-okolí $U(L; \varepsilon)$ bodu L existuje δ-okolí $U(a; \delta)$ bodu a takové, že pro všechna $x \neq a$ z $U(a; \delta)$ příslušné hodnoty $f(x)$ jsou ve zvoleném okolí $U(L; \varepsilon)$.

Symbolicky pak píšeme: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Symbolický zápis definice vlastní limity funkce ve vlastním bodě:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f) : x \in U(a; \delta) \Rightarrow f(x) \in U(L; \varepsilon).$$

Platí, že funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Každá základní elelmentární funkce f má v každém bodě definičního oboru $D(f)$ limitu rovnou funkční hodnotě v tomto bodě.

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí.

Mají-li funkce f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$ limity, tj. existují-li limity $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, pak mají v tomto bodě limity i funkce $f + g$, $f - g$, fg, cf kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta , a je-li $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, také funkce $\dfrac{f}{g}$ a platí:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Příklad 8.4 *Určete limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+7)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1}$

Řešení:

a) Funkce $f: y = x^2-5x+7$ *je polynomická funkce, která je definována na celém* $\mathbb{R}$, *tedy i v bodě* $x=1$. *Dostaneme:*

$$\lim_{x\to 1} x^2-5x+7 = 1^2-5\cdot 1+7 = \underline{\underline{3}}$$

Podobně postupujeme i v části b) a c).

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 - \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1-1 = \underline{\underline{0}}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x+1}{\lim\limits_{x\to -1} x-1} = \dfrac{-1+1}{-1-1} = \underline{\underline{0}}$

Pro výpočet limit funkce se často použije tato věta:

Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Příklad 8.5 *Určete limity následujících funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\sin x}{\sin x}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2-\sqrt{x+9}}{x+5}$

Řešení:

a) Funkce $f: y = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ *není v bodě* $x=1$ *definována. Můžeme však v* $\mathbb{R}-\{1\}$ *provést následující úpravu:*

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2 = g(x)$$

Danou limitu pak vypočteme užitím poslední věty:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 1+2 = \underline{\underline{3}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x+\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}+1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)=\frac{1}{1}+1=\underline{\underline{2}}$$

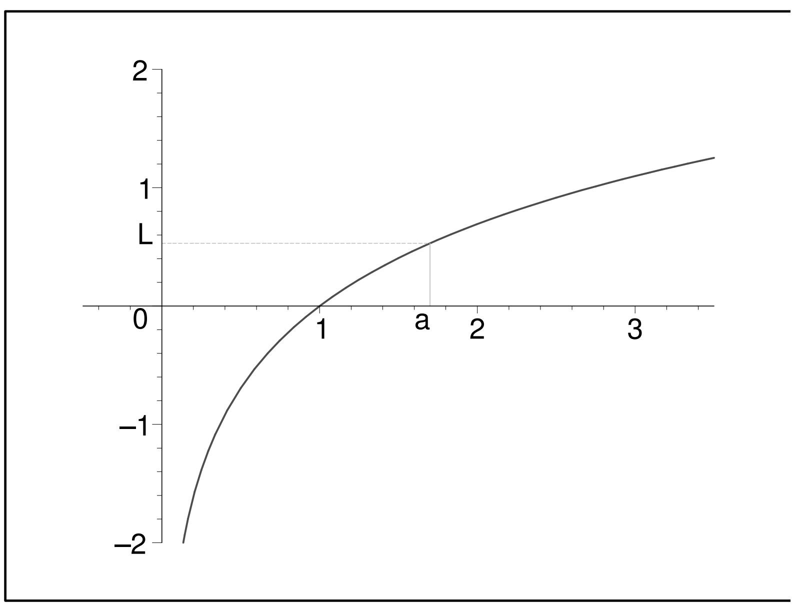
c) *Lomený výraz rozšíříme dvojčlenem* $2+\sqrt{x+9}$.

$$\lim_{x\to -5}\frac{2-\sqrt{x+9}}{x+5}=\lim_{x\to -5}\frac{2-\sqrt{x+9}}{x+5}\cdot\frac{2+\sqrt{x+9}}{2+\sqrt{x+9}}=\lim_{x\to -5}\frac{4-(x+9)}{(x+5)(2+\sqrt{x+9})}=$$

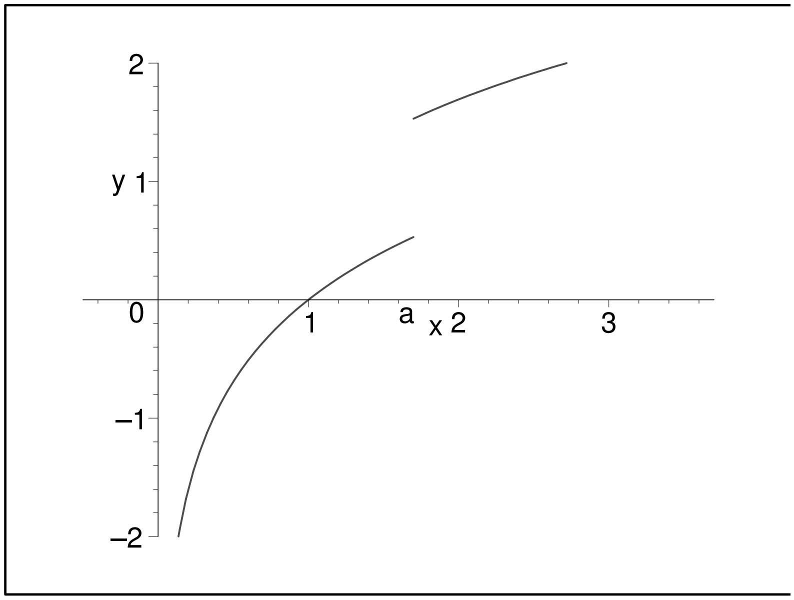
$$\lim_{x\to -5}\frac{-(x+5)}{(x+5)(2+\sqrt{x+9})}=\lim_{x\to -5}\frac{-1}{2+\sqrt{x+9}}=\frac{-1}{2+\sqrt{-5+9}}=\underline{\underline{\frac{-1}{4}}}$$

Říkáme, že funkce f, která je definovaná v okolí bodu $a\in\mathbb{R}$ je **spojitá v bodě** a, právě když existuje $\lim_{x\to a} f(x)$ a platí

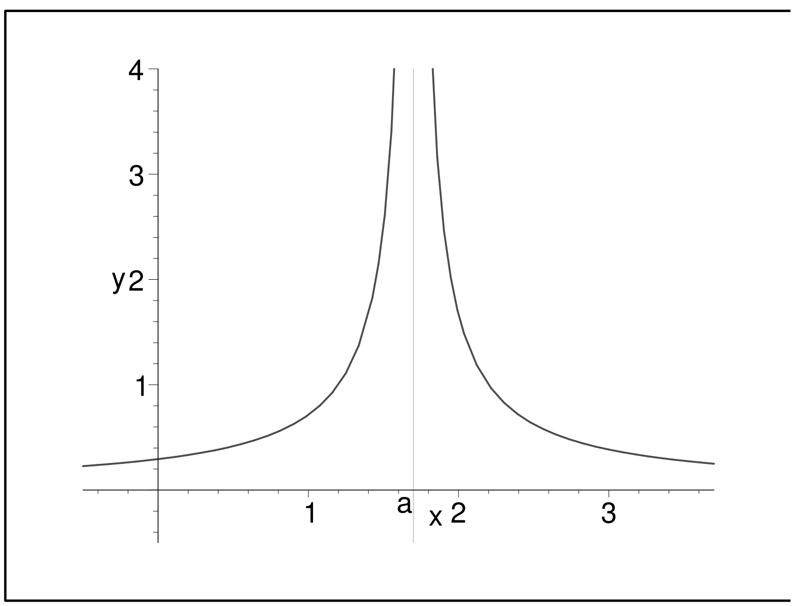
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$



Obrázek 8.4: Spojitá funkce v bodě a



Obrázek 8.5: Funkce není v bodě a spojitá, má v tomto bodě skok



Obrázek 8.6: Funkce má v bodě a nevlastní limity

Příklad 8.6 *Zjistěte zda je funkce :*

a) $y = \dfrac{x^3}{\sin x}$ *b)* $y = x^2 \sin x$ *c)* $y = \dfrac{\sin x}{x-1}$ *d)* $y = e^x \cos x$

sudá nebo lichá.

[a) sudá b) lichá c) ani sudá ani lichá d) ani sudá ani lichá]

Příklad 8.7 *Určete funkci inverzní k funkcím :*

a) $y = 3x - 4$ *b*) $y = 10^x + 5$ *c*) $y = \dfrac{2x+1}{3x-6}$

[a) $(x+4)/3$ *b*) $\log(x-5)$ *c*) $(6x+1)/(3x-2)$*]*

Příklad 8.8 *Najděte příklad (načrtněte graf) funkce, která je :*

a) omezená zdola na svém definičním oboru

b) omezená shora na svém definičním oboru

c) omezená shora i zdola na intervalu $(0, 5)$

d) rostouci na svém definičním oboru

e) klesající na intervalu $(-6, 0)$

f) periodická na svém definičním oboru

g) prostá na svém definičním oboru

h) není prostá na svém definičním oboru

Příklad 8.9 *Určete limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2 - 6x + 7)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$ *c*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

[a) 6, *b*)10, *c*) 1/8*]*

Příklad 8.10 *Vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ *b*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ *c*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

[a) 0, *b*)4, *c*) 3/2*]*

Příklad 8.11 *Vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3}{x^4-2x^3}$ *c*) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

[a) 2, *b*) $-1/2$, *c*) 3/4*]*

9 Derivace funkce

9.1 Geometrický a fyzikální význam derivace

Je-li funkce definována v okolí bodu x_0 a existuje limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$, nazýváme ji **derivací funkce** f **v bodě** x_0. Značíme ji $f'(x_0)$.

Má-li funkce f derivaci v každém bodě x jisté množiny M, potom funkci

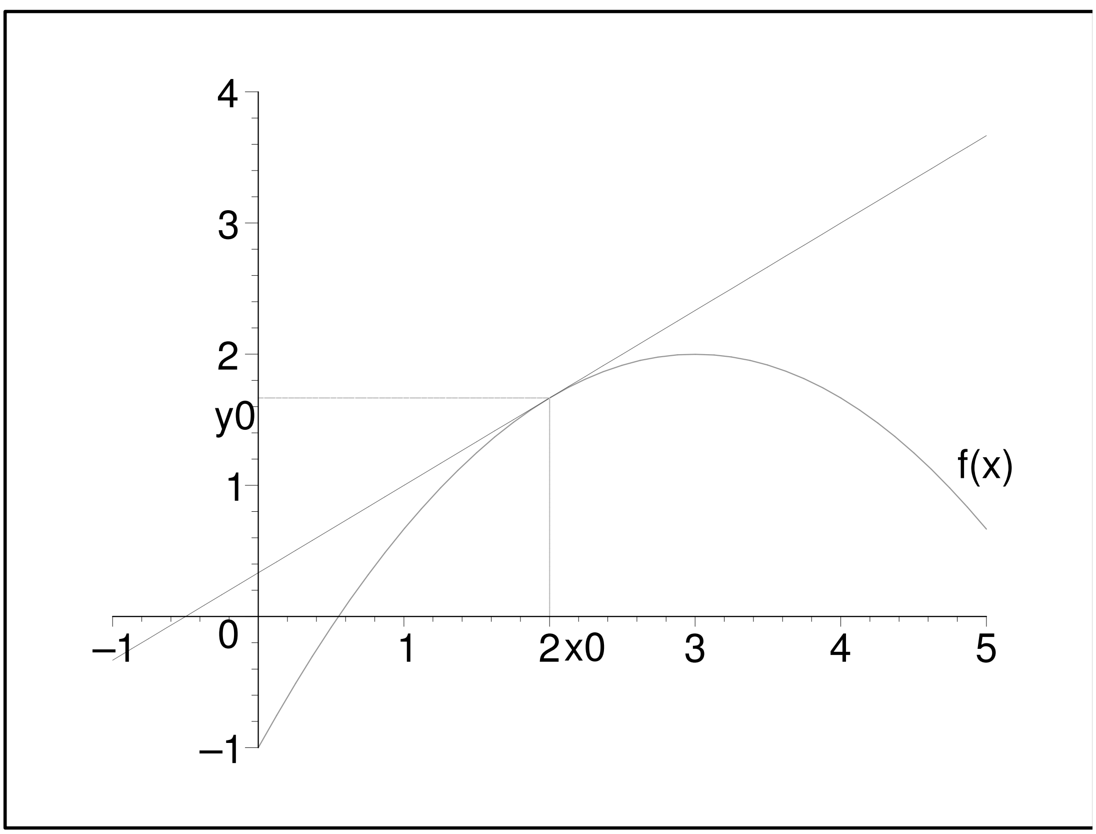
$$f' : \ y = f'(x), \ x \in M$$

nazýváme derivací funkce f na množině M.

Geometrický význam derivace

Derivace funkce $f'(x_0)$ představuje geometricky směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Existuje-li v bodě x_0 derivace funkce f, pak tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

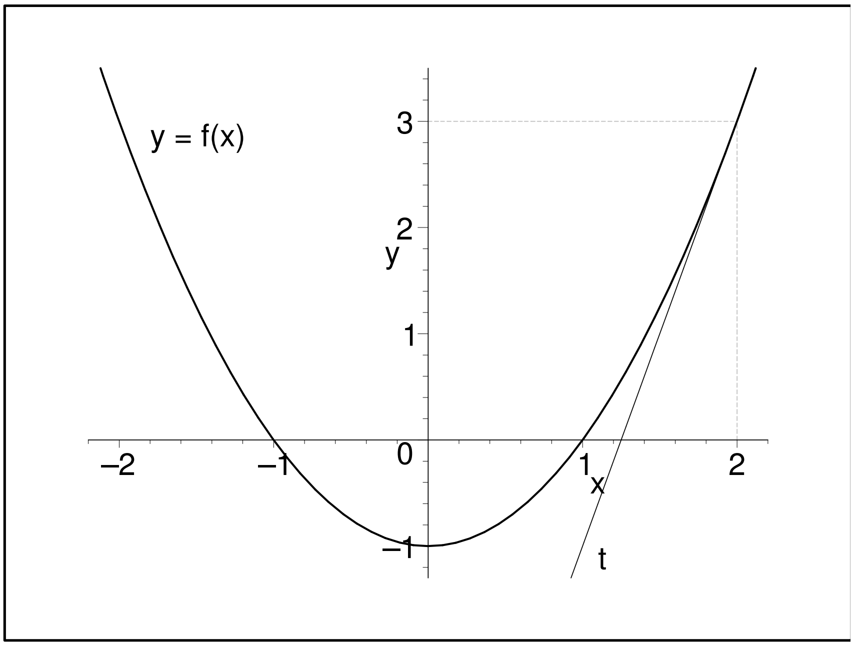
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Obrázek 9.1: Geometrický význam derivace

Příklad 9.1 *Určete rovnici tečny ke křivce* $y = x^2 - 1$ *v bodě* $[2, 3]$.

Řešení:



Obrázek 9.2: Tečna ke křivce $y = x^2 - 1$ v bodě $[2, 3]$

Pro směrnici tečny v bodě $[2, 3]$ *platí*

$$k = y'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1 - 3}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = 4.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ *obdržíme*

$$y - 3 = 4(x - 2) \quad tj. \quad \underline{\underline{4x - y - 5 = 0.}}$$

Fyzikální význam derivace

Je-li dána funkční závislost hodnot nějaké fyzikální veličiny na čase, pak její derivace vyjadřuje okamžitou rychlost změny hodnot této veličiny.

Nechť $s = s(t)$ je rovnice dráhy přímočarého pohybu hmotného bodu, přičemž t značí čas měřený od jistého počátečního okamžiku a s značí dráhu, kterou hmotný bod urazil po přímce od zvoleného počátečního bodu.
Derivace dráhy $s(t)$ podle času t pro $t = t_0$ definuje okamžitou rychlost pohybu hmotného bodu v čase t_0.

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

9.2 Výpočet derivace

Tabulka 9.1: Vzorce pro derivace elementárních funkcí

Funkce f	Vzorec pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce
$y = c,\ (c \in \mathbb{R})$	$c' = 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^n,\ n \in \mathbf{N}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^r,\ r \in \mathbf{R},$	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$x \in (0, \infty)$
$y = e^x$	$(e^x)' = e^x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = a^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Příklad 9.2 *Zderivujte funkce :*

a) $y = \dfrac{1}{x^3}$ *b)* $y = \sqrt{x}$

Řešení:

a) $y = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow\ y' = (-3)x^{-4} = \underline{\underline{-\dfrac{3}{x^4}}}$ *b)* $y' = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}}$

Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkce

Jestliže funkce $f : u = f(x),\ g : v = g(x)$ mají derivaci v každém bodě $x \in M$, pak platí následujíci vzorce pro všechna $x \in M$ (u podílu za předpokladu, že $g(x) \neq 0$):

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(u-v)' = u' - v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$(cu)' = cu',\ c \in \mathbb{R}$$
$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0$$

Příklad 9.3 *Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných předpisy:*

a) $y = 5x^4 - 6e^x$ *b)* $y = 6x^2 - \sqrt{x}$ *c)* $y = (x-1)(x^2+3x-5)$ *d)* $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

Řešení:

a) $y' = \underline{\underline{20x^3 - 6e^x}}$

b) $y' = \underline{\underline{12x - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}}$

c) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování součinu.

$y' = (x^2+3x-5) + (x-1)(2x+3) = x^2 + 3x - 5 + 2x^2 + 3x - 2x - 3 = \underline{\underline{3x^2 + 4x - 8}}$

d) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování podílu.

$$y' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2}{(x-1)^2}}}$$

Vzorec pro derivaci složené funkce

Jestliže je dána funkce $F:\ y = f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in M$ a vnější funkce f má derivaci f' v každém odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $F = f \circ g$ má derivaci F' v každém bodě $x \in M$, pro niž platí:

$$F'(x) = f'(u)g'(x).$$

Příklad 9.4 *Vypočtěte derivace funkcí:*

a) $y = ln(x^2 - 8)$ *b)* $y = e^x \sin^2 x$ *c)* $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$

Řešení:

a) $y' = \dfrac{1}{x^2-8} \cdot (2x - 0) = \underline{\underline{\dfrac{2x}{x^2-8}}}$

b) $y' = e^x \sin^2 x + e^x 2 \sin x \cos x = \underline{\underline{e^x \sin x\,(\sin x + 2\cos x)}}$

c) $y' = \dfrac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1}{x+1} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} = \underline{\underline{\dfrac{-2}{x^2-1}}}$

Vzorec pro derivaci inverzní funkce

Jestliže funkce $f^{-1}: \; y = f^{-1}(x),\; x \in (a_1, b_1),$ je inverzní funkce k funkci $f: \; y = f(x),\; x \in (a_2, b_2),$ která je na intervalu (a_2, b_2) spojitá a ryze monotonní a má na něm nenulovou derivaci f', pak také inverzní funkce má na intervalu (a_1, b_1) derivaci $(f^{-1})'$, přičemž platí:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Příklad 9.5 *Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejich průsečících s osou x.*

Řešení:

Průsečíky dané křivky s osou x určíme řešením rovnice $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Rovnici převedeme na součinový tvar

$$x(x-1)(x+2) = 0$$

a dostaneme kořeny $x_1 = -2,\; x_2 = 0,\; x_3 = 1$.
Hledáme tedy rovnice tečen dané křivky v bodech $T_1 = [-2, 0],\; T_2 = [0, 0],\; T_3 = [1, 0]$.
Pro směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, y(x_0)]$ platí

$$k = y'(x_0).$$

Protože

$$y'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

dostaneme

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 2.$$

Směrnice tečen uvažované křivky v bodech $T_1,\; T_2,\; T_3$ jsou

$$k_1 = y'(-2) = 6,$$

$$k_2 = y'(0) = -2,$$

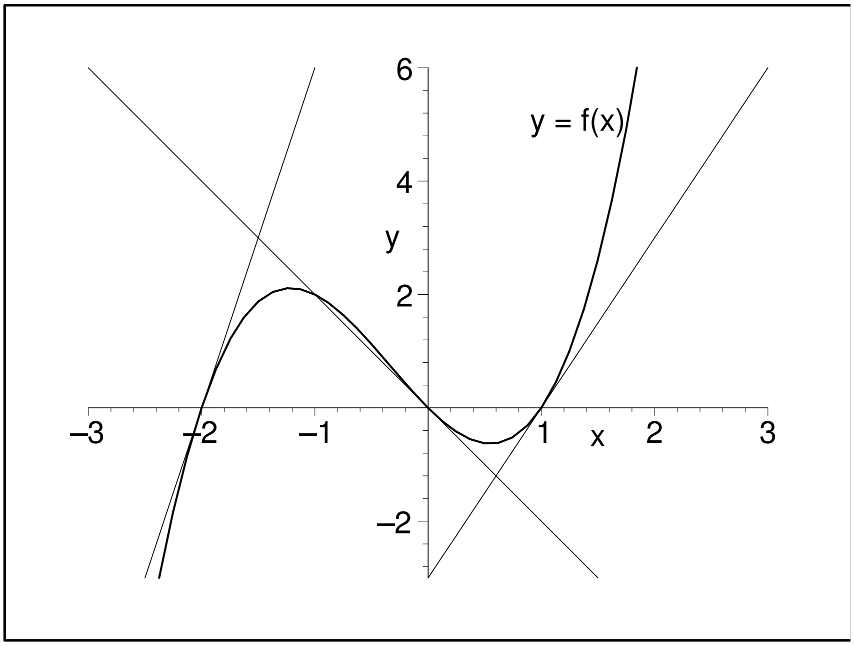
$$k_3 = y'(1) = 3.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ obdržíme

$$\textit{pro } T_1 = [-2, 0] \textit{ a } k_1 = 6: \; y = 6(x+2) \;\; \textit{tj. } \underline{\underline{6x - y + 12 = 0}}$$

$$T_2 = [0, 0],\; k_2 = -2: \; y = -2x \;\; \textit{tj. } \underline{\underline{2x + y = 0}}$$

$$T_3 = [1, 0],\; k_3 = 3: \; y = 3(x-1) \;\; \textit{tj. } \underline{\underline{3x - y - 3 = 0.}}$$



Obrázek 9.3: Tečny ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejich průsečících s osou x

9.3 L´Hospitalovo pravidlo

K aplikacím diferenciálního počtu patří metoda výpočtu limit pomocí derivací.
Vyjadřuje ji **l´Hospitalovo pravidlo:**

Nechť funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkční hodnoty $f(x_0) = g(x_0) = 0$ a nechť existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Poznámka. L´Hospitalovo pravidlo platí i v případě, kdy funkce f a g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nevlastní limitu, tzn. platí:
Jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ a existuje $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Příklad 9.6 *Užitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+6}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^5+1}$

Řešení:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 2x)'}{(\sin 5x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x}{5\cos 5x}=\dfrac{2\cos 0}{5\cos 0}=\underline{\underline{\dfrac{2}{5}}}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^2+6)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 0=\underline{\underline{0}}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^5+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3+1)'}{(x^5+1)'}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2}{5x^4}=\underline{\underline{\dfrac{3}{5}}}$

Příklad 9.7 *Vypočtěte derivace funkcí:*

a) $y=\pi x^3-7x$ *b)* $y=e^x(x^2-1)$ *c)* $y=\dfrac{x+5}{x^2}$ *d)* $y=\dfrac{x-2}{x+2}$

[*a)* $3\pi x^2-7,$ *b)* $e^x(x^2+2x-1),$ *c)* $(-x-10)/x^3,$ *d)* $4/(x+2)^2$]

Příklad 9.8 *Určete derivaci funkcí:*

a) $y=\sqrt{\sin x}$ *b)* $y=\dfrac{1}{2}(x-\sin x\cos x)$ *c)* $y=e^{\sin x}$ *d)* $y=\cos e^x$

[*a)* $\cos x/2\sqrt{\sin x},$ *b)* $\sin^2 x,$ *c)* $e^{\sin x}\cos x,$ *d)* $-e^x\sin e^x$]

Příklad 9.9 *Určete rovnici tečny ke grafu funkce* $f:\ y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ *v bodě* $T=[1,?]$.

[$2x-9y+1=0$]

Příklad 9.10 *Určete rovnice tečen ke křivce* $y=x^3+x^2-6x$ *v jejich průsečících s osou* x.

[$15x-y+45=0,\ 6x+y=0,\ 10x-y-20=0$]

Příklad 9.11 *Užitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{3x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-7x^2}{x^2+6}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$

[*a)* $8/3,$ *b)* $-7,$ *c)* 4]

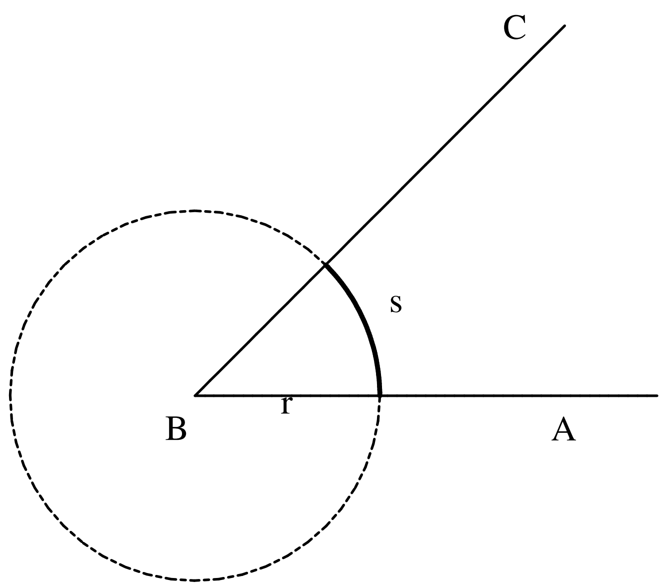
10 Goniometrické funkce

10.1 Oblouková míra

V matematice, ve fyzice a v technické praxi se používá na určování velikosti úhlu tzv. **oblouková míra.**
Je dán úhel ABC. Sestrojíme kružnici se středem v bodě B, (ve vrcholu úhlu). Jestliže r je poloměr kružnice a s je délka oblouku kružnice uvnitř úhlu ABC, potom velikost tohoto úhlu je $\frac{s}{r}$ radiánů.

$$\angle ABC = \frac{s}{r} \text{ rad.}$$

Toto číslo nezávisí na poloměru kružnice.



Příklad 10.1 *Vyjádřete úhel* $15°$ *v obloukové míře.*

Řešení:

Kružnice má délku $2\pi r$ *a velikost úhlu* $360°$ *v radiánech je* $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

Z toho $1° = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$ *radiánů.*

Tedy $15° = 15 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{12}}}$.

Dále budeme pracovat s orientovanými úhly. **Orientovaný úhel** si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky (nejlépe kladné poloosy O_x) otáčející se kolem svého počátku a to v jednom ze dvou navzájem opačných smyslů. Buď proti pohybu hodinových ručiček, tak dostaneme kladné úhly (např.$\frac{\pi}{2}, 6\pi$, atd), nebo ve směru hodinových ručiček a tak dostaneme záporné úhly (např.$-\frac{\pi}{12}, -4\pi$, atd).

10.2 Goniometrické funkce

V kartézské souřadnicové soustavě sestrojme kružnici o středu v počátku a poloměru 1. Uvažujme orientovaný úhel o velikosti ψ radiánů jehož vrchol je v počátku a počáteční rameno kladná poloosa x. Druhé rameno protne kružnici v bodě P. Potom definujeme **kosinus** úhlu ψ jako x-ovou souřadnici bodu P. Označujeme $\cos\psi$.

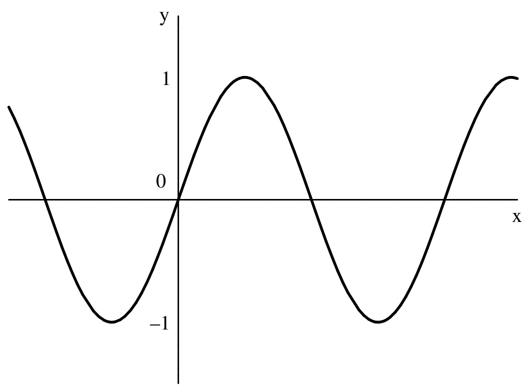
Podobně y-ová souřadnice bodu P se nazývá **sinus** úhlu ψ. Označujeme $\sin\psi$.

Obě funkce jsou periodické, jejich nejmenší perioda je 2π.

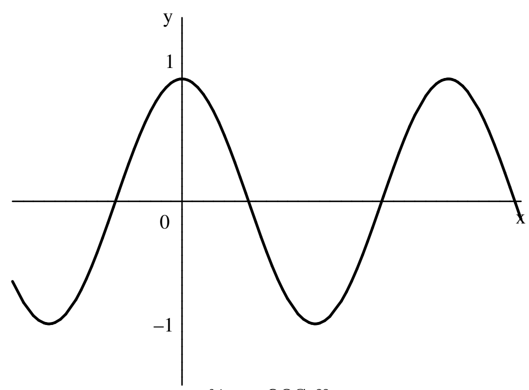
Definičním oborem obou funkcí je $\mathbb{R}$, oborem hodnot je $\langle -1; 1\rangle$.

Grafem je sinusoida (kosinusoida).

Snadno se dá ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



$y = \sin x$



$y = \cos x$

Funkce $f : y = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ je lichá: $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkce $f : y = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ je sudá: $\cos(-x) = \cos x$.

Tangens je funkce, která každému reálnému číslu x, pro něž je $\cos x \neq 0$, přiřadí číslo

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, kde k je celé číslo $\}$.

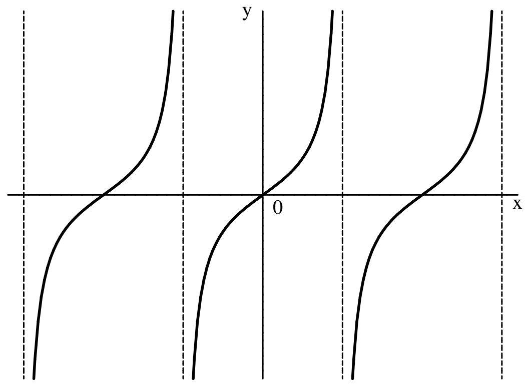
Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

Kotangens je funkce, která každému reálnému číslu x, pro něž je $\sin x \neq 0$, přiřadí číslo

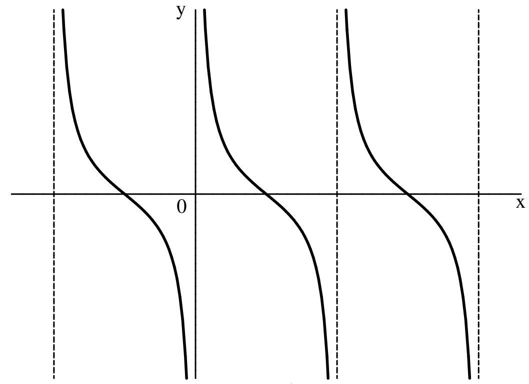
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$, kde k je celé číslo $\}$.

Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.



$y = \mathrm{tg}\, x$



$y = \mathrm{cotg}\, x$

Funkce $\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{cotg}\, x$ jsou periodické funkce s periodou π.

Obě funkce jsou liché: $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ a $\mathrm{cotg}\,(-x) = -\mathrm{cotg}\, x$ pro všechna x z definičního oboru.

V následující tabulce jsou vypočteny hodnoty goniometrických funkcí pro některá $x \in \langle 0; 2\pi)$, které je vhodné si pamatovat.

Tabulka 10.1: Hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0	
$\mathrm{cotg}\, x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		0

Dále uvedeme některé důležité vzorce, které budou užitečné při řešení úloh souvisejících s goniometrickými funkcemi.

Pro každé $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ platí:

$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$

$\mathrm{tg}\, x = -\mathrm{tg}\,(\pi - x)$; $\qquad \mathrm{cotg}\, x = -\mathrm{cotg}\,(\pi - x)$

Příklad 10.2 *Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí v daných bodech :*

a) $\alpha = \dfrac{5}{3}\pi \qquad$ *b)* $\alpha = -\dfrac{2}{3}\pi \qquad$ *c)* $\alpha = \dfrac{25}{4}\pi$

Řešení:

a) $\alpha = \frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{1}{3}\pi$

$\sin(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$\cos(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{3}}}$

b) $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$

Funkce $\sin x,\ \cos x$ *jsou periodické s periodou* 2π. *Platí:*

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\frac{4}{3}\pi = \sin(\pi + \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\frac{4}{3}\pi = \cos(\pi + \frac{1}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \underline{\underline{\sqrt{3}}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$

c) $\alpha = \frac{25}{4}\pi$

$\sin(\frac{25}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \sin\frac{1}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\cos(\frac{25}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \cos\frac{1}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \underline{\underline{1}}$

Důležité vztahy a vzorce

Pro každé reálné x platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Pro každé reálné x a celé $k,\ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ platí:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu

$\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin 2x = 2\sin x\cos x;$

$\forall x \in \mathbb{R}: \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\forall x \in \mathbb{R}: \ \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};$

$\forall x \in \mathbb{R}: \ \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Součtové vzorce

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \neq \frac{2k+1}{2}\pi: \ \mathrm{tg}\,(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}$

Příklad 10.3 *Vypočítejte* $\cos \dfrac{5}{12}\pi$.

Řešení:

$$\cos \frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}$$

Příklad 10.4 *Vypočtěte hodnoty funkcí* $\cos\alpha, \ \sin(2\alpha), \ \mathrm{tg}\,(2\alpha), \ \sin\frac{\alpha}{2}$, *jestliže* $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Řešení:

$|\cos\alpha| = \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \underline{\underline{\dfrac{4}{5}}}$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{25} = \underline{\underline{\dfrac{24}{25}}}$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{16}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{7}{25} \quad \Rightarrow \mathrm{tg}\,(2\alpha) = \dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \underline{\underline{\dfrac{24}{7}}}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ 0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\dfrac{1}{10}}}}$

10.3 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice jsou rovnice, které obsahují neznámou jako argument jedné nebo několika goniometrických funkcí.

Příklad 10.5 *Vyřešte v $\mathbb{R}$ goniometrické rovnice:*

a) $2\sin(3x) = \sqrt{2}$ *b)* $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$ *c)* $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

Řešení:

a) Upravíme: $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Funkce sinus má kladné hodnoty v I. a II. kvadrantu.

Tedy $3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ *Odtud*

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi}}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Upravíme levou stranu rovnice:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x).$$

Potom rovnice má tvar $-\cos(2x) = 0{,}5$, *tzn.* $\cos(2x) = -0{,}5$.

Funkce kosinus má záporné hodnoty v II. a III. kvadrantu.

Potom $2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ *Odtud*

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\pi + k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{2}{3}\pi + k\pi}}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Upravíme levou stranu rovnice:

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = -2\cos^2 x - 5\cos x + 3$$

Potom rovnice má tvar $-2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$ *t.j.* $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$.

Položíme $y = \cos x$ *a dostaneme kvadratickou rovnici* $2y^2 + 5y - 3 = 0$.

Tato rovnice má kořeny $y_1 = -3$ *a* $y_2 = \frac{1}{2}$.

Protože $|-3| > 1$, *řešíme jen rovnici* $\cos x = \frac{1}{2}$.

Funkce kosinus má kladné hodnoty v I. a IV. kvadrantu. Dostaneme

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi}}, k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 10.6 *Vypočítejte následující úhly v obloukové míře:*

a) $\alpha = 135°$ *b)* $\alpha = -75°$ *c)* $\alpha = 200°$

[a) $\frac{3}{4}\pi$; *b)* $-\frac{5}{12}\pi$; *c)* $\frac{10}{9}\pi$*]*

Příklad 10.7 *Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ *v daných bodech :*

a) $\alpha = -\dfrac{7}{3}\pi$ *b)* $\alpha = \dfrac{21}{4}\pi$ *c)* $\alpha = \dfrac{5}{6}\pi$ *d)* $\alpha = -\dfrac{11}{4}\pi$

[a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$; *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$; *c)* $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}$;
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$*]*

Příklad 10.8 *Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ *jestliže platí, že* $\operatorname{cotg} x = -3$ *a* $x \in \langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi\rangle$.

[$\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{1}{3}$*]*

Příklad 10.9 *Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla* α, β *platí vzorce:*

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

[postupným sečtením a odečtením součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus]

Příklad 10.10 *Vyřešte v* $\mathbb{R}$ *goniometrické rovnice:*

a) $\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *b)* $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

c) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x} = 1$ *d)* $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

e) $2\sin x = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$ *f)* $\sin x + \cos 2x = 1$

g) $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$ *h)* $1 + \sin x = 2\cos^2 x$

[a)$\frac{13}{12}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{17}{12}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *b)* $2k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
c) $\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *d)* $\frac{\pi}{3} + k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
e) $k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *f)* $k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
g) $\frac{\pi}{3} + k\pi \ \vee\ \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *h)* $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$*]*

Příklad 10.11 *Řešte v intervalu $\langle 0; 2\pi\rangle$ rovnici* $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2 + \sqrt{3}$.

[$\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$]

Příklad 10.12 *Řešte v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ rovnici* $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{3}{2}$.

[$\frac{\pi}{4}$]

Příklad 10.13 *Upravte následující výrazy pro každé $x \in \mathbb{R}$, pro které jsou definovány:*

a) $\dfrac{2\sin x + \sin 2x}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ *b)* $\dfrac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^3 x - \cos x}$

c) $\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x}$ *d)* $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$

[*a*) $4\sin x$; *b*) $\operatorname{cotg} x$; *c*) $\operatorname{tg}^6 x$; *d*) 1]

Příklad 10.14 *Načrtněte grafy funkcí:*

a) $y = -\sin(3x)$ *b)* $y = 1 + \cos\frac{x}{2}$ *c)* $y = 2 + \operatorname{cotg} x$ *d)* $y = 5 + 2\sin(x + \pi)$

11 Integrál funkce jedné proměnné

11.1 Primitivní funkce

Při řešení mnoha matematických, fyzikálních a technických problémů se setkávame i s úlohou:
K dané funkci f najít na daném intervalu takovou funkci, jejíž derivace v tomto intervalu se rovna f. Taková funkce $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ se nazýva primitivní funkce k reálné funkci na intervalu (a,b) jestliže platí pro všechna $x \in (a,b)$, že

$$F'(x) = f(x).$$

Primitivní funkce není určena jednoznačně. Přičteme-li k dané primitivní funkci konstantu, dostaneme zase primitivní funkci. Primitivní funkci také říkáme neurčitý integrál a píšeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Příklad 11.1 *Spočítejte* $\int 3x^2 dx$.

Řešení:

$(x^3)' = 3x^2$. *Z toho plyne, že* $\int 3x^2 dx = \underline{\underline{x^3 + c,}}$ *kde* $c \in \mathbb{R}$.

Při výpočtu neurčitého integrálu se často užívají následující vlastnosti a vzorce:

Nechť pro funkce f, g existují neurčité integrály na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a nechť $k \in \mathbb{R}$, potom

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

a

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Příklad 11.2 *Vypočtěte integrály:*

$a)\ \int \frac{6dx}{x} \qquad b)\ \int (7\cos x - e^x)\ dx$

Řešení:

Víme, že platí $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ *pro* $x > 0$; $(\sin x)' = \cos x$ *a* $(e^x)' = e^x$.

Z toho plyne, že :

$a)\ \int \frac{6dx}{x} = 6 \int \frac{dx}{x} = \underline{\underline{6 \ln x + c,\ x > 0}}$

$b)\ \int (7\cos x - e^x)\ dx = 7 \int \cos x dx - \int e^x dx = \underline{\underline{7sinx - e^x + c}}$

Tabulka 11.1: Vzorce pro integraci elementárních funkcí

Funkce f	Vzorec pro neurčitý integrál	Podmínky platnosti vzorce
$y = 0$	$\int 0\ dx = c\ (c \in \mathbb{R})$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = 1$	$\int 1\ dx = x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^n,\ n \in \mathbf{N}$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = x^r,\ r \in \mathbf{R},\ r \neq -1$	$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, \infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = e^x$	$\int e^x\ dx = e^x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = a^x$	$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \sin x$	$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \cos x$	$\int \cos x\ dx = \sin x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$y = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\ dx = \mathrm{tg}\, x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$
$y = \frac{1}{(\sin x)^2}$	$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\ dx = -\mathrm{cotg}\, x + c$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Příklad 11.3 *Vypočtěte integrály:*

a) $\int (2x+1)\ dx$ *b)* $\int (5x^4 - \sin x)\ dx$ *c)* $\int \sqrt{x^3}\ dx$ *d)* $\int 3(e^x + 2\sqrt{x})\ dx$

Řešení:

a) $\int (2x+1)dx = 2\int x\ dx + \int 1\ dx = 2\frac{x^2}{2} + x + c = \underline{\underline{x^2 + x + c}}$

b) $\int 5x^4 - \sin x\ dx = 5\int x^4\ dx - \int \sin x\ dx = 5\dfrac{x^5}{5} - (-\cos x) + c = \underline{\underline{x^5 + \cos x + c}}$

c) $\int \sqrt{x^3}\ dx = \int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c = \underline{\underline{\frac{2}{5}\sqrt{(x^5)} + c}}$

d) $\int 3(e^x + 2\sqrt{x})\ dx = \int (3e^x + 6\sqrt{x})\ dx = 3\int e^x dx + 6\int \sqrt{x}\ dx =$

$3e^x + 6\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{3}{2}} + c = 3e^x + 6\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \underline{\underline{3e^x + 4\sqrt{x^3} + c}}$

Příklad 11.4 *Vypočtěte integrály:*

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx$ *c)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\ dx$

Řešení:

a) Funkci, kterou chceme integrovat nejdříve upravíme. Využijeme vztah

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Potom můžeme psát

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\ \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}\ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}\ dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\ \cos^2 x}\ dx =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx = \underline{\underline{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}}\ dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int \sqrt{x}\ dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx =$

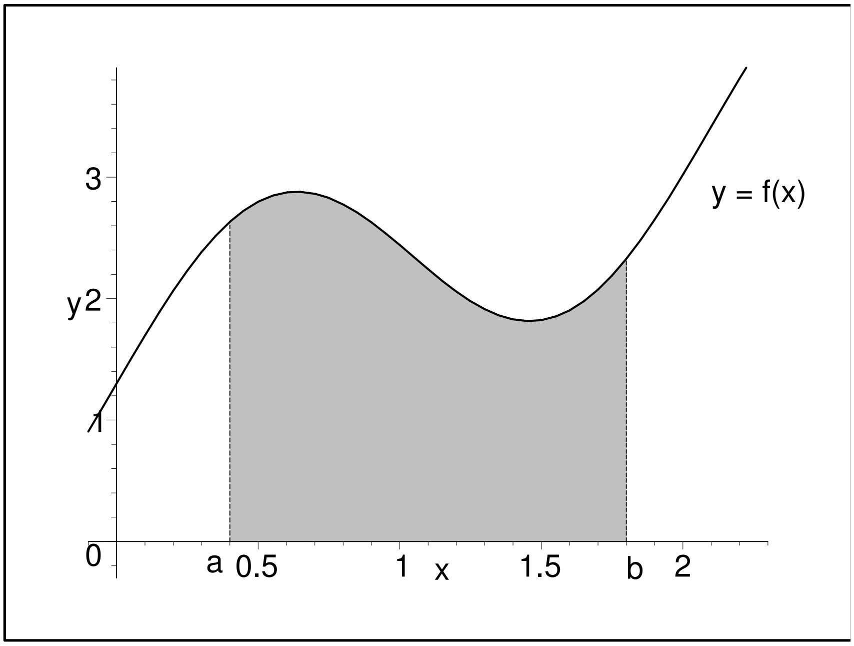
$$\int x^{\frac{1}{2}}\ dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c}}$$

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\ dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cos x}\ dx = \int \frac{\sin x}{2\sin x \cos^2 x}\ dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\ dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c}}$

11.2 Určitý integrál

Geometrický význam určitého integrálu

Mějme nezápornou spojitou funkci f na $< a, b >$. Obsah obrazce ohraničeného grafem



Obrázek 11.1: Určitý integrál z nezáporné funkce $y = f(x)$ na $< a, b >$

funkce f, osou x a rovnoběžkami s osou y vedenými body a, b můžeme spočítat pomocí určitého integrálu:

$$P = \int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

kde funkce F je primitivní funkcí k f na $< a, b >$.

Podle stejného vzorce můžeme spočítat určitý integrál z libovolné spojité funkce (ne nutně nezáporné) na $< a, b >$.

Tento vztah se nazýva **Newton-Leibnitzův vzorec:**

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a), \quad \text{kde} \quad F'(x) = f(x), \quad x \in < a, b >$$

Příklad 11.5 *Užitím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtěte:*

a) $\int_0^1 (2x - x^2)\ dx$ *b)* $\int_0^\pi \sin x\ dx$ *c)* $\int_0^{2\pi} \sin x\ dx$ *d)* $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ dx$

Řešení:

a) *Nejdřív spočítáme primitivní funkci k funkci* $f(x) = (2x - x^2)$.

Dostaneme $F(x) = \int (2x - x^2)\ dx = x^2 - \frac{x^3}{3} + c.$

Potom podle Newton - Leibnitzova vzorce

$$\int_0^1 (2x - x^2)\ dx = [x^2 - \frac{x^3}{3} + c]_0^1 = (1 - \frac{1}{3} + c) - (0 - 0 + c) = (\frac{2}{3} + c) - c = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Vidíme, že integrační konstantu c při výpočtu určitého integrálu v bodě b přičteme a v bodě a zase odečteme, proto ji dále nebudem psát.

b) $\int_0^{\pi} \sin x\ dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2}}$

c) $\int_0^{2\pi} \sin x\ dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$

d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\ dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}$

Vlastnosti určitého integrálu.

Věta o lineárnosti určitého integrálu.

Nechť f, g jsou spojité na intervalu $< a, b >$, a c a d jsou libovolné reálné konstanty. Pak platí:

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))\ dx = c\int_a^b f(x)\ dx + d\int_a^b g(x)\ dx.$$

Věta o aditivnosti určitého integrálu.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$ a $c \in (a, b)$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Věta o střední hodnotě.

Je-li funkce f spojitá na intervalu $< a, b >$, pak existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že platí

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b - a)$$

Číslo $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ se nazývá **střední hodnota** funkce f na intervalu $< a, b >$.

Příklad 11.6 *Vypočtěte integrál* $\int_{-1}^{3} |x - 1|\ dx.$

Řešení:

Platí, že

$$f(x) = |x-1| = x-1 \text{ pro } x \in <1, \infty),$$
$$f(x) = |x-1| = -(x-1) = 1-x \text{ pro } x \in (-\infty, 1).$$

Proto použijeme větu o aditivnosti určitého integrálu.

$\int_{-1}^{3} |x-1|\ dx = \int_{-1}^{1} |x-1|\ dx + \int_{1}^{3} |x-1|\ dx = \int_{-1}^{1} (1-x)\ dx + \int_{1}^{3} (x-1)\ dx =$

$[x - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{1} + [\frac{1}{2}x^2 - x]_1^3 = (1-\frac{1}{2}) - (-1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}9 - 3) - (\frac{1}{2} - 1) = 2 + \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}$

Příklad 11.7 *Spočítejte střední hodnotu funkce* $f(x) = e^x$ *na intervalu* $<0, 1>$ *.*

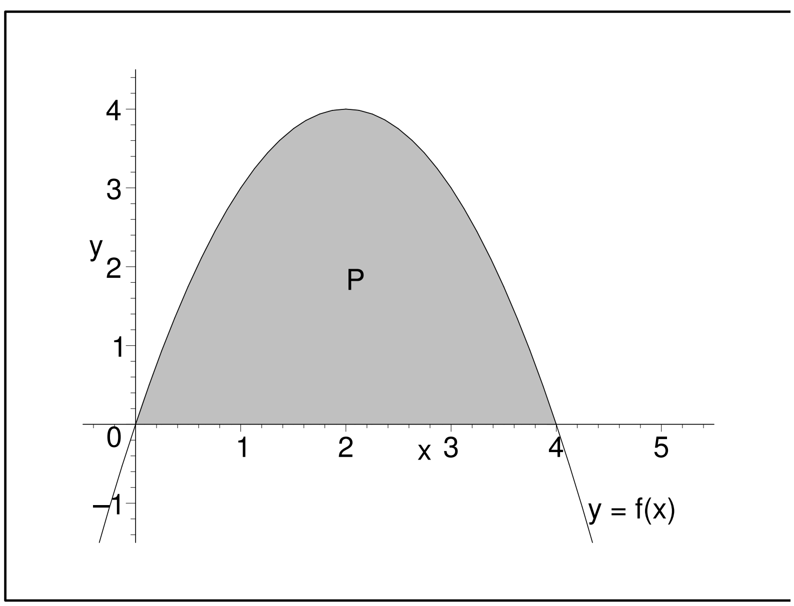
Řešení:

$$S = \frac{1}{1-0} \int_0^1 e^x\ dx = 1[e^x]_0^1 = \underline{\underline{e-1}}$$

Příklad 11.8 *Vypočítejte obsah rovinné oblasti ohraničené parabolou* $y = 4x - x^2$ *a osou* x*.*

Řešení:

Parabola protne osu x *v bodech* $x_1 = 0,\ x_2 = 4$ *a na intervalu* $(0, 4)$ *je funkce* $y = 4x - x^2$



Obrázek 11.2: Obsah oblasti ohraničené parabolou $y = 4x - x^2$ a osou x

kladná. Obsah oblasti mezi parabolou a osou x *můžeme spočítat jako určitý integrál.*

$$P = \int_0^4 (4x - x^2)\ dx = [2x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^4 = 2.16 - \frac{1}{3}64 = \frac{96-64}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}} j^2$$

Nechť pro spojité funkce f a g na intervalu $< a, b >$ platí, že $g(x) < f(x)$ na (a, b). Potom obsah elementárné oblasti:

$$a \leq x \leq b$$
$$g(x) \leq y \leq f(x)$$

můžeme počítat jako určitý integrál

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$

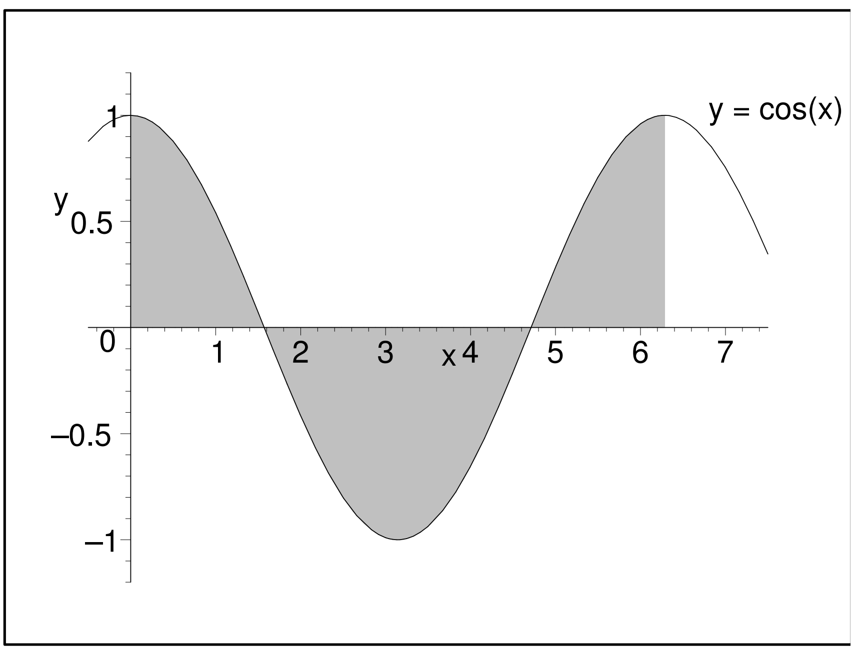
Příklad 11.9 *Vypočítejte:*

a.) $\int_0^{2\pi} \cos x\ dx$

b.) Obsah oblasti ohraničené funkcí $y = \cos x$, *přímkami* $x = 0,\ x = 2\pi$ *a osou* x.

Řešení:

a.) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin 0 = \underline{\underline{0}}$



Obrázek 11.3: $y = \cos(x)$ na $< 0, 2\pi >$

b.) Počítáme obsah vyšrafované oblasti z obrázku. Vidíme, že $P = P_1 + P_2 + P_3$, *kde*

$$P_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$P_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \cos x\ dx = [-\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

$$P_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos x \; dx = [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} = \sin 2\pi - \sin \frac{3\pi}{2} = 1$$

Dostaneme $P = 1 + 2 + 1 = \underline{\underline{4}}$

Příklad 11.10 *Vypočtěte integrály:*

a) $\int 3x^2 + 2x - 4 \; dx$ *b)* $\int \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \; dx$ *c)* $\int x(x-2)(x-3) \; dx$

[a) $x^3 + x^2 - 4x + c$ *b)* $2\sqrt{x^5}/5 - 2\sqrt{x} + c$ *c)* $x^4/4 - 5x^3/3 + 3x^2 + c$*]*

Příklad 11.11 *Funkce nejdříve upravte a potom vypočtěte následující integrály:*

a) $\int 5\cos x - 6e^x 2^x \; dx$ *b)* $\int \mathrm{tg}^2 x \; dx$ *c)* $\int 1 + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \; dx$

[a) $5\sin x - 6(e^x 2^x)/\ln(2e) + c$ *b)* $\mathrm{tg}\, x - x + c$ *c)* $x + \sin x + c$*]*

Příklad 11.12 *Užitím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtěte určité integrály:*

a) $\int_1^4 (3x - 11) \; dx$ *b)* $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} \; dx$ *c)* $\int_0^3 |1 - 3x| \; dx$ *d)* $\int_{-1}^1 e^x \; dx$

[a) $-21/2$ *b)* $-\ln 2$ *c)* $65/6$ *d)* $e - 1/e$*]*

Příklad 11.13 *Vypočítejte obsah rovinné oblasti ohraničené parabolou* $y = 6x - x^2$ *a osou* x.

[36]

Příklad 11.14 *Najděte střední hodnotu funkce na daném intervalu.*

a) $f(x) = x(1-x)$ *na* $< 0, 1 >$

b) $f(x) = 2x - 1$ *na* $< -3, 2 >$

c) $f(x) = \sin x$ *na* $< 0, \pi >$

[a) $1/6$ *b)* -2 *c)* $2/\pi$*]*

12 Komplexní čísla

12.1 Algebraický tvar komplexního čísla

Komplexní číslo je číslo $z = a + ib$, kde a, b jsou reálná čísla a $i^2 = -1$. Výraz je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí [a;b], kde a, b jsou reálná čísla.

Pro komplexní čísla se dají operace sčítání a násobení definovat takto:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

kde $a + ib$ a $c + id$ jsou libovolná komplexní čísla.

Sčítání a násobení komplexních čísel jsou operace asociativní a komutativní. Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

Příklad 12.1 *Vypočítejte součin* $(2 + i)(3 + i)$.

Řešení:

$(2 + i)(3 + i) = 6 + 3i + 2i - 1 = (6 - 1) + i(3 + 2) = \underline{\underline{5 + 5i}}$

Zápis $z = a + ib$ nazýváme **algebraickým tvarem** komplexního čísla.
Reálné číslo a nazýváme **reálnou částí** z.
Reálné číslo b nazýváme **imaginární částí** z:

$$z = a + ib,\ a = \mathbf{Re}\, z,\ b = \mathbf{Im}\, z.$$

Číslo $\overline{z} = a - ib$ nazýváme **komplexně sdruženým** číslem k číslu $z = a + ib$.

Při dělení komplexních čísel využíváme komplexně sdružené číslo jmenovatele:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad a + ib, c + id \in \mathbb{C},\ c, d \neq 0$$

Příklad 12.2 *Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo* $\dfrac{2 + i}{1 - i}$.

Řešení:

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{2 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2 - 1 + 3i}{1 - (-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}}$$

Komplexní čísla zjednodušujeme podle pravidel:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \dots,$$

to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

Příklad 12.3 *Vypočítejte* $i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9$.

Řešení:

$$i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9 = i + i^2 i + i^4 i + i^4 i^3 + (i^4)^2 i = i - i + i - i + i = \underline{\underline{i}}$$

Absolutní hodnotou komplexního čísla $a + ib$ nazýváme nezáporné číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Komplexní číslo z, pro které je $|z| = 1$ nazýváme **komplexní jednotkou.**

Komplexní rovina (Gaussova rovina komplexních čísel) je rovina s kartézským systémem souřadnic, ve které je každé komplexní číslo $a + ib$ znázorněno bodem $[a; b]$.

Absolutní hodnota čísla $z = a + ib$ se potom rovná vzdálenosti bodu $[a; b]$ od počátku.

Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel se rovná jejich vzdálenosti v komplexní rovině.

12.2 Goniometrický tvar komplexního čísla

Úhel φ - orientovaný úhel mezi kladnou částí osy x a polopřímkou spojující bod $[0; 0]$ s bodem $[a; b]$ se nazývá **argumentem** komplexního čísla $z = a + ib$. Platí, že

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$a = |z|\cos\varphi \qquad b = |z|\sin\varphi.$$

Zápis nenulového komplexního čísla z ve tvaru

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nazýváme **goniometrickým tvarem** komplexního čísla z .

Omezíme-li se na $-\pi < \varphi \leq \pi$ (ev. $0 \leq \varphi < 2\pi$), je toto číslo určeno jednoznačně.

Příklad 12.4 *Zapište v goniometrickém tvaru číslo* $z = 2 + 2i$.

Řešení:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Takže $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *a* $\varphi \in (-\pi; \pi\rangle$, *potom* $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Tedy :

$$2 + 2i = \underline{\underline{\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}}$$

12.3 Moivreova věta

Vyjádření komplexních čísel v goniometrickém tvaru podstatně zjednodušuje výpočty spojené s násobením a dělením komplexních čísel. Pro každá dvě nenulová komplexní čísla $u = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $v = |v|(\cos\beta + i\sin\beta)$ platí:

$$uv = |u|\cdot|v|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

a

$$\frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

Pro umocňování platí **Moivreova věta**:

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{N}$$

Příklad 12.5 *Vypočtěte $uv, u/v$ a u^3, jestliže*

$$u = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi) \quad v = 6(\cos(-\frac{1}{2}\pi) + i\sin(-\frac{1}{2}\pi)).$$

Řešení:

Absolutní hodnota součinu je $2\cdot 6 = 12$ a argument $\frac{1}{3}\pi + (-\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{6}\pi$.
Proto

$$uv = 12(\cos(-\frac{1}{6}\pi) + i\sin(-\frac{1}{6}\pi)) = 12(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \underline{\underline{6\sqrt{3} - 6i}}$$

Absolutní hodnota podílu je $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a argument $\frac{1}{3}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \frac{5}{6}\pi$. Tedy

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{3}(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i}}$$

Podobně dostaneme podle Moivreovy věty:

$$u^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1) = \underline{\underline{-8}}$$

12.4 Řešení binomických rovnic v $\mathbb{C}$

Binomickou rovnicí se nazývá rovnice tvaru $z^n - a = 0$, kde a je dané komplexní číslo, z je neznámá a $n > 1$ je číslo přirozené. Tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů. Řešit binomickou rovnici v $\mathbb{C}$ znamená využitím Moivreovy věty najít všech n komplexních řešení této rovnice. Abychom mohli využívat vzoreček na řešení této rovnice, je vhodné v tomto případě zabezpečit jednoznačnost goniometrického vyjádření tak, že bereme argument z intervalu $\langle 0; 2\pi)$.
Potom podle důsledku Moivreovy věty dostaneme řešení ve tvaru:

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \dots n-1$$

Příklad 12.6 *V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $z^3 + 27 = 0$.*

Řešení:

Upravíme na $z^3 = -27$. Napišme rovnici v goniometrickém tvaru:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi) = 27(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$$

Z Moivreovy věty dostaneme řešení

$$z = \sqrt{27}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}),\ k = 0, 1, 2.$$

$\Rightarrow z_1 = 3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \underline{\underline{\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$

$z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = \underline{\underline{-3}}$

$z_3 = 3(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \underline{\underline{\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$

Příklad 12.7 *Vypočítejte:*

a) $(2 - 3i)(4 + i)$ *b)* $(1 + i)i$ *c)* $(-1 + i)^{-2}$

d) $(-i)^{27}$ *e)* i^{2000} *f)* $5 - 8i + 6i^2 - 3i^3 + 6i^4$

[a) $11 - 10i$; *b)* $-1 + i$; *c)* $i/2$; *d)* i; *e)* 1; *f)* $5 - 5i$*]*

Příklad 12.8 *Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní čísla:*

a) $(i^{10} - i^{12} - 4i^{15}) : (i^5 - i^3)$ *b)* $\frac{2 + i}{3 - i} + (i - 2)(4 - i)$

c) $(\frac{i - 1}{i} + \frac{2i}{i - 1})(2i - 3) - (i - 1)i$

[a) $2 + i$; *b)* $-13/2 + 13i/2$; *c)* $-5 + 5i$*]*

Příklad 12.9 *Přesvedčte se, že* $\frac{1}{\frac{1}{1-i} - i} - \frac{1}{\frac{1}{1+i} + i} = 2i.$

[Platí]

Příklad 12.10 *Najděte dvojici komplexních čísel tak, aby jejich součet byl 4 a součin 13.*

[$2 + 3i,\ 2 - 3i$*]*

Příklad 12.11 *Určete reálná čísla x, y pro která platí:*

a) $\dfrac{3-2i}{1-i} = 2x + yi$

b) $(x+y)(5-4i) + (x-y)(4-5i) = 94 - 68i$

c) $\dfrac{x+1+(y+3)i}{5+3i} = 1 + i$

[a) $x = 5/4, y = 1/2$; *b)* $x = 9, y = 13$; *c)* $x = 1, y = 5$*]*

Příklad 12.12 *K číslu z napište číslo komplexně združené $\overline{z}$ a vypočítejte $|z|$:*

a) $z = 4 - 3i$ *b)* $z = \dfrac{1+2i}{3}$

[a) $4 + 3i, |z| = 5$; *b)* $\frac{1-2i}{3}, |z| = \sqrt{5}/3$*]*

Příklad 12.13 *Určete komplexní čísla z, pro něž platí $z = \overline{z}$.*

[$z \in \mathbb{R}$]

Příklad 12.14 *V komplexní rovině zobrazte množinu všech komplexních čísel, pro něž platí:*

a) $|1+z| < 2$ *b)* $|1-i| \geq |z| > \frac{1}{2}$ *c)* $\mathbf{Im}\, z < 4$

Příklad 12.15 *Pomocí vztahu* $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla*

$$\frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}}, \ x, y \neq 0.$$

[1]

Příklad 12.16 *Vyjádřete následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru:*

a) $1 - i$ *b)* -2 *c)* $5i$ *d)* $\dfrac{i-3}{2+i}$ *e)* $\dfrac{2-i}{3i-1}$

[a)$\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$; *b)* $2(\cos\pi + i\sin\pi)$;
c) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$; *d)*$\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)$;
e) $(\sqrt{2}/2)(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)$*]*

Příklad 12.17 *Napište algebraický tvar komplexního čísla* $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

[$\sqrt{3}/2 + i/2$*]*

Příklad 12.18 *Vypočítejte algebraický tvar součinu a podílu komplexních čísel:*

a) $z_1 = 6(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}) \quad z_2 = \dfrac{1}{3}(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$

b) $z_1 = \sqrt{3} + i \quad z_2 = 6(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$

[*a*) $z_1 z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$; $z_1/z_2 = 9 + 9\sqrt{3}\,i$; *b*) $z_1 z_2 = 12i$; $z_1/z_2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3} - i)$]

Příklad 12.19 *Pomocí Moivreovy věty vypočítejte:*

a) $(-1 + i\sqrt{3})^3$ *b*) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{100}$

[*a*) 8; *b*) $-1/2 - \sqrt{3}\,i/2$]

Příklad 12.20 *Jestliže* $z = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$, *najděte algebraický tvar komplexního čísla* $z^3 + \dfrac{1}{z^3}$.

[$-\sqrt{2}$]

Příklad 12.21 *Vyřešte v* $\mathbb{C}$ *kvadratické rovnice:*

a) $z^2 + 2z + 2 = 0$ *b*) $z^2 + 6z + 25 = 0$

[*a*) $-1 \pm i$; *b*) $-3 \pm 4i$]

Příklad 12.22 *Vyřešte v* $\mathbb{C}$ *následující rovnice:*

a) $z^4 = 1$ *b*) $z^3 = 1/8$ *c*) $z^6 = -64$

[*a*) $1, i, -1, -i$; *b*) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)$;
c) $2i, -2i, \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i$]

13 Posloupnosti a řady

13.1 Aritmetická a geometrická posloupnost

Nekonečnou posloupností se nazývá každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Konečnou posloupností nazýváme každou funkci, jejíž definiční obor je množina $\{n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\}$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo.
Posloupnost je zadána buď výčtem prvků, rekurentně, nebo vzorcem pro n-tý člen.

Příklad 13.1 *Posloupnost všech čísel dělitelných třemi zapište výše uvedenými způsoby.*

Řešení:

$\{a_n\}_1^\infty = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ *výčet prvků*

$a_{n+1} = a_n + 3,\ a_1 = 3$ *rekurentně*

$a_n = 3n$ *vzorec pro n-tý člen*

Příklad 13.2 *Je daná posloupnost* $\{a_n\}_1^\infty, a_n = \log 3^n$. *Vyjádřete ji rekurentně.*

Řešení:

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ *je* $a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log 3^n \cdot 3 = \log 3^n + \log 3.$
Zkoumanou posloupnost lze zapsat

$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n + \log 3,\ a_1 = \log 3.}}$$

Příklad 13.3 *Posloupnost zadanou rekurentně* $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -a_n$ *vyjádřete vzorcem pro n-tý člen.*

Řešení:

$\{a_n\}_1^\infty = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$. *Odtud* $\underline{\underline{a_n = (-1)^n.}}$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá **aritmetická,** právě když existuje takové číslo d (diference), že pro každé přirozené n platí: $a_{n+1} = a_n + d$, neboli $a_{n+1} - a_n = d$.

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s diferencí d platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r + (s-r)d$.

Pro součet S_n prvních n členů aritmetické posloupnosti lze odvodit:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Příklad 13.4 *Dokažte, že posloupnost* $\{a_n\}_1^\infty, a_n = 2n - 4$ *je aritmetická. Určete diferenci.*

Řešení:

Musíme dokázat existenci čísla $d \in \mathbb{R}$ *tak, že pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} = a_n + d$.

Je $a_n = 2n - 4, a_{n+1} = 2n - 2$ *a tedy* $a_{n+1} - a_n = 2$, *čili* $a_{n+1} = a_n + 2$.

Posloupnost $\{2n - 4\}_1^\infty$ *je aritmetická s diferencí* $d = 2$.

Příklad 13.5 *Rozhodněte, které z čísel* 71 *a* 100 *je členem aritmetické posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$, *v níž* $a_1 = -10,\ d = 4{,}5$.

Řešení:

V dané posloupnosti platí $a_n = -10 + (n-1) \cdot 4{,}5$.

Je-li $a_n = 71$, *pak* $71 = -10 + (n-1) \cdot 4{,}5$. *Z toho* $n = 19$.

Je-li $a_n = 100$, *pak* $100 = -10 + (n-1) \cdot 4{,}5$. *Z toho* $n = \frac{229}{9}$.

Členem aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ *je pouze číslo* $\underline{\underline{71.}}$

Příklad 13.6 *V aritmetické posloupnosti je*

a) $a_6 = 18,\ d = -2$. *Vypočítejte* a_9.

b) $a_{16} = 20,\ d = 1{,}5$. *Vypočítejte* a_1.

c) $a_1 = 12{,}6,\ d = 0{,}2,\ a_n = 27{,}4$. *Určete* n.

Řešení:

a) $a_s = a_r + (s - r)d \ \Rightarrow\ a_9 = a_6 + 3d = 18 - 6 = \underline{\underline{12}}$

b) $a_{16} = a_1 + 15d \ \Rightarrow\ a_1 = a_{16} - 15d = \underline{\underline{-2{,}5}}$

c) $a_n = a_1 + (n-1)d \ \Rightarrow\ n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \underline{\underline{75}}$

Příklad 13.7 *Vypočítejte součet všech přirozených čísel od jedné do 300.*

Řešení:

Je $a_1 = 1,\ d = 1$. *Součet* $S_{300} = \dfrac{300}{2}(a_1 + a_{300}) = \underline{\underline{45150.}}$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá **geometrická,** právě když existuje číslo q tak, že pro každé přirozené n platí:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ neboli } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ pro } a_1 \neq 0,\ q \neq 0.$$

Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s kvocientem q platí pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro součet S_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí:

a) pro $q = 1$ je $S_n = n \cdot a_1$.

b) pro $q \neq 1$ je $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Příklad 13.8 *V geometrické posloupnosti je*

a) $a_1 = 18,\ q = 3$. *Napište prvních pět členů.*

b) $a_1 = 4,\ q = 3$. *Vypočítejte* a_5.

c) $a_6 = 8192,\ q = 4$. *Určete* a_4.

d) $a_1 = 40,\ q = -\frac{1}{4}$. *Vypočítejte* a_5 *a* S_5.

Řešení:

a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\underline{18, 54, 162, 486, 1458}}}$

b) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4 \cdot 3^4 = \underline{\underline{324}}$

c) $a_4 = a_6 \cdot q^{4-6} = 8192 \cdot 4^{-2} = \underline{\underline{512}}$

d) $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 40 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^4 = \underline{\underline{\dfrac{5}{32}}} \qquad S_5 = a_1 \dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = \underline{\underline{\dfrac{1025}{32}}}$

Příklad 13.9 *Najděte geometrickou posloupnost tak, aby*
$a_1 + a_3 = 5$ *a* $a_2 + a_4 = 10$.

Řešení:

Je tedy $\begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q^2 &= 5 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 &= 10 \end{aligned} \ \Rightarrow\ \begin{aligned} a_1(1 + q^2) &= 5 \\ a_1 q(1 + q^2) &= 10 \end{aligned}$

Druhou rovnici vydělíme první, dostaneme $\underline{\underline{\underline{q = 2, a_1 = 1.}}}$

Příklad 13.10 *Zjistěte, na jakou částku vzroste vklad* a_0 *Kč uložený na vkladní knížku na* n *let, jestliže spořitelna připisuje na konci každého roku* p % *z částky v tom roce uložené.*

Řešení:

Na konci 1. roku připíše spořitelna p% *z původně vložené částky* a_0, *takže vklad vzroste na částku*

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100} a_0 = a_0 (1 + \frac{p}{100}).$$

Na konci 2. roku připíše k této částce $p\,\%$ z a_1, takže vklad vzroste na částku

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100}a_1 = a_1(1 + \frac{p}{100}).$$

Obdobně je tomu v dalších letech.

Vklady po připsání úroků v jednotlivých letech tvoří zřejmě geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a s prvním členem $a_1 = a_0q$. Tedy podle vzorce $a_n = a_1q^{n-1}$ dostaneme, že částka a_0 Kč při p-procentním složeném úrokování vzroste po n-letech na částku a_n Kč, kde

$$a_n = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} = \underline{\underline{a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}}}.$$

13.2 Nekonečná geometrická řada

Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient q platí $|q| < 1$.

Pak posloupnost $\{S_n\}_1^\infty, S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, je konvergentní a platí:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Takto dostáváme **nekonečnou geometrickou řadu**

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Příklad 13.11 *Sečtěte geometrickou řadu:*

a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \ldots$

b) $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots$

Řešení:

a) Je $a_1 = 1,\ q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Dále $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, *řada konverguje a*

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{2-\sqrt{2}.}}$$

b) Je $a_1 = 1,\ q = \cos^2 x.$

Pro $|\cos^2 x| < 1 \ \Rightarrow\ |\cos x| < 1 \ \Rightarrow x \neq k\pi$ *řada konverguje,*

$$S = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin^2 x}}}.$$

Příklad 13.12 *Převeďte na zlomek číslo* $8{,}\overline{4}$.

Řešení:

$$8{,}\overline{4} = 8 + \underbrace{\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots}_{a_1 = \frac{4}{10},\ q = \frac{1}{10}} = 8 + \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 8 + \frac{4}{9} = \underline{\underline{\frac{76}{9}}}.$$

Jiné řešení:

Na jedné straně platí, že $10 \cdot 8{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 9 \cdot 8{,}\overline{4}$.

Na druhé straně je $10 \cdot 8{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 9 \cdot 8{,}\overline{4} = 84{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 76$

Potom $9 \cdot 8{,}\overline{4} = 76$.

Je tedy $8{,}\overline{4} = \underline{\underline{\frac{76}{9}}}$.

Příklad 13.13 *Závitnice byla sestrojena ze čtvrtkružnic poloměru* $r, \dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{4}, \dfrac{r}{8}, \ldots$. *Vypočítejte její délku.*

Řešení:

$$d = \frac{1}{4}(2\pi r + 2\pi\frac{r}{2} + 2\pi\frac{r}{4} + 2\pi\frac{r}{8} \ldots) = \frac{2\pi r}{4}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots) = \frac{\pi r}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{\pi r.}}$$

Příklad 13.14 *V aritmetické posloupnosti je*

a) $a_5 = 8,\ a_8 = -10$. *Vypočítejte* a_{20}.

b) $a_{10} = 23,\ a_{16} = 15$. *Vypočítejte* a_1.

c) $a_1 = 15,\ S_{25} = 75$. *Určete* d.

d) $a_1 = 450,\ a_n = 210,\ d = -24$. *Vypočítejte* n *a* S_n.

e) $a_n = 47,\ S_n = 245,\ d = 5$. *Vypočítejte* a_1 *a* n.

[*a*) -82, *b*) 35, *c*) -1, *d*) $11,\ 3630$ *e*) $2,\ 10$]

Příklad 13.15 *Ve které aritmetické posloupnosti je* $a_1 + a_5 = 30,\ a_3 + a_4 = 36$?

[$a_1 = 3, d = 6$]

Příklad 13.16 *Kolik členů aritmetické posloupnosti, ve které* $a_1 = 2,\ d = 3$, *musíme sečíst, aby součet přesáhl 2000?*

[*37 členů*]

Příklad 13.17 *Mezi čísla 8 a 20 vložte tolik členů aritmetické posloupnosti, aby součet vložených členů byl 196.*

[$d = \frac{4}{5},\ k = 14$]

Příklad 13.18 *V geometrické posloupnosti je*

a) $a_4 = -\frac{8}{3},\ a_6 = -\frac{32}{3}$. *Vypočítejte* a_1 *a* q.

b) $a_1 + a_4 = 112,\ a_2 + a_3 = 48$. *Vypočítejte* a_1 *a* q.

c) $a_1 = 6144,\ q = \frac{1}{2},\ a_n = 48$. *Vypočítejte* n *a* S_n.

d) $a_1 = 18,\ a_n = 288,\ S_n = 558$. *Vypočítejte* n *a* q.

[*a)* $\frac{1}{3}, -2,$ nebo $-\frac{1}{3}, 2$; *b)* $4, 3,$ nebo $108, \frac{1}{3}$ *c)* $8,\ 12240$ *d)* $5,\ 2$]

Příklad 13.19 *Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a součet vložených členů byl 630.*

[$10, 20, 40, 80, 160, 320$]

Příklad 13.20 *Najděte kvocient geometrické posloupnosti, jestliže součet příslušné geometrické řady je 6, a součet prvních pěti členů je* $\frac{93}{16}$.

[$q = \frac{1}{2}$]

Příklad 13.21 *Dělník souhlasil, že bude pracovat, jestliže jeho mzda bude za první den práce 1 Kč, za druhý den práce 2 Kč, za třetí den práce 4 Kč, atd. Kolik si vydělá za 12 dní práce?*

[4095 *Kč*]

Příklad 13.22 *Najděte součet geometrické řady* $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \ldots$. *Stanovte podmínky.*

[$S = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x};\ x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$]

Příklad 13.23 *Řešte rovnici* $\dfrac{8}{x+10} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \ldots$. *Prověřte řešitelnost rovnice.*

[$x \in \{-6, 4\}$]

Příklad 13.24 *Do čtverce o straně a je vepsána kružnice, do ní opět čtverec, pak kružnice atd. Vypočítejte obsah všech takto vzniklých čtverců.*

[$2a^2$]

Příklad 13.25 *Poločas přeměny (rozpadu jader) rádia je přibližně 20 minut. Kolik rádia zbude bez přeměny z 1mg po n hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně přibližně poloviny jader atomů té látky.)*

[$a_n = q^n = \frac{1}{8^n}$]

Příklad 13.26 *Pro* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ *řešte rovnici* $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots = 2\operatorname{tg} x$.

[$x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$, *pak dostaneme* $\sin 2x = 1 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$]

14 Kombinatorika

14.1 Permutace, variace a kombinace

Permutace n prvků dané základní n-prvkové množiny je každá uspořádaná n-tice těchto prvků, přičemž každý prvek základní množiny se v této n-tici vyskytuje právě jedenkrát.

Pro počet $P(n)$ všech permutací n prvků platí:

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Symbol $n!$ čteme n faktoriál, definujeme $0! = 1$.

Příklad 14.1 *Kolik pěticiferných čísel je možno sestavit z číslic* $0, 1, 3, 4, 7$? *Kolik je z nich sudých?*

Řešení:

Všech pěticiferných čísel je $P(5) = 5! = 120$.
Na prvním místě nesmí být nula, těchto čísel je $P(4) = 4! = 24$. *Celkem je pěticiferných čísel* $120 - 24 = 96$.
Sudá čísla mají na místě jednotek 0*, těch je*

$$P(4) = 4! = 24,$$

nebo mají na místě jednotek číslici 4*, ale současně nesmí mít na prvním místě číslici* 0*, těch je*

$$P(4) - P(3) = 4! - 3! = 18.$$

Celkem je sudých čísel $\underline{\underline{42.}}$

Příklad 14.2 *Zmenšíme-li počet prvků o dva, zmenší se počet permutací dvacetkrát. Určete původní počet prvků!*

Řešení:

$P(n) = n!,\ P(n-2) = (n-2)! \Rightarrow n! = 20(n-2)! \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow$

$n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n-5)(n+4) = 0$

Číslo n je přirozené, proto původní počet prvků $\underline{\underline{n = 5.}}$

Variace k-té třídy z n prvků dané základní n-prvkové množiny $(0 \leq k \leq n)$ je každá uspořádaná k-tice různých prvků, vybraná ze základní n-prvkové množiny tak, že **záleží** na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pro počet $V_k(n)$ všech těchto variací platí:

$$V_k(n) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k\text{činitelů}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad 14.3 *Kolika způsoby může být odměněno zlatou, stříbrnou nebo bronzovou medailí 13 účastníků sportovní soutěže?*

Řešení:

Ze 13 sportovců vybíráme 3, záleží na pořadí - jedná se o variace.

$$V_3(13) = \frac{13!}{10!} = 11 \cdot 12 \cdot 13 = \underline{\underline{1716}}$$

Příklad 14.4 *Pro kolik prvků je poměr variací druhé třídy ku počtu variací třetí třídy roven 1:20.*

Řešení:

$$V_2(n) : V_3(n) = 1 : 20 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} : \frac{n!}{(n-3)!} = 1 : 20 \Rightarrow \frac{1}{n-2} = \frac{1}{20} \Rightarrow \quad \underline{\underline{n = 22}}$$

Kombinace k-té třídy z n prvků dané základní n-prvkové množiny ($0 \leq k \leq n$) je každá k-tice různých prvků, vybraná ze základní n-prvkové množiny tak, že **nezáleží** na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pro počet $C_k(n)$ všech těchto kombinací platí:

$$C_k(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Pro kombinační číslo $\binom{n}{k}$, čteme n nad k, $0 \leq k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{n} = 1; \qquad \binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{0}{0} = 1;$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Příklad 14.5 *Ve třídě je 5 studentů a 3 studentky, kteří hrají tenis. Kolik lze sehrát zápasů, v nichž budou hrát dvě studentky proti dvěma studentům? Každá čtveřice bude hrát pouze jednou.*

Řešení:

Počet dvojic studentů, které lze vybrat z pěti studentů je dán $C_2(5) = \binom{5}{2}$ *(nezáleží na pořadí).*

Počet dvojic studentek, které lze vybrat ze tří studentek je $C_2(3) = \binom{3}{2}$.

Počet zápasů je pak $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = \frac{5!}{3!2!}\frac{3!}{2!} = \underline{\underline{30.}}$

Příklad 14.6 *Kolika přímkami lze spojit 10 bodů, jestliže tři z nich leží na jedné přímce?*

Řešení:

Každé dva různé body určují přímku, nezáleží na pořadí, tedy

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

Třemi body (ležícími na přímce) by byly určeny tři přímky, takže počet přímek je

$$p = 45 - 2 = \underline{\underline{43.}}$$

14.2 Binomická věta

Binomická věta. Pro libovolná reálná (i komplexní) čísla a, b a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí, že

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Binomické koeficienty - kombinační čísla - lze vypočítat z Pascalova trojúhelníka:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & \text{atd.} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \underbrace{1 \quad 1} & & & & & & \\
 & & & \underbrace{1 \quad 2} & & & 1 & & & & \\
 & & \underbrace{1 \quad 3} & & & 3 & & 1 & & & \\
 & \underbrace{1 \quad 4} & & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & & & & \text{atd.} & & & & &
\end{array}$$

Příklad 14.7 *Umocněte podle binomické věty* $(2x - \frac{3}{2})^4$.

Řešení:

$$(2x - \frac{3}{2})^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(-\frac{3}{2}) + \binom{4}{2}(2x)^2(-\frac{3}{2})^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}(2x)^1(-\frac{3}{2})^3 + \binom{4}{4}(-\frac{3}{2})^4 = \underline{\underline{16x^4 - 48x^3 + 54x^2 - 27x + \frac{81}{16}}}$$

Příklad 14.8 *V rozvoji výrazu* $(2x^2 - \frac{3}{x})^6$ *určete prostý člen.*

Řešení:
Označme $A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ *v obecném binomickém rozvoji.*

Potom

$$A_{k+1} = \binom{6}{k} (2x^2)^{6-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k = \binom{6}{k} 2^{6-k} (-3)^k x^{12-2k-k}$$

Jde-li o prostý člen, pak $x^{12-2k-k} = x^0 \Rightarrow k = 4$.

Tedy pátý člen neobsahuje x *a je roven*

$$\binom{6}{4} (2x^2)^2 \left(-\frac{3}{x}\right)^4 = \frac{6!}{2!4!} 4 \cdot 81 = \underline{\underline{4860}}$$

Příklad 14.9 *Upravte výraz*

$$V = \frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}, \quad n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}.$$

[2]

Příklad 14.10 *V lavici je šest studentů, z nichž dva sourozenci chtějí sedět vedle sebe. Kolika způsoby je lze přesadit?*

[240]

Příklad 14.11 *Bylo zakoupeno 20 lístků do jedné řady v kině. Kolika způsoby je lze rozdělit mezi 10 chlapců a 10 děvčat, chtějí-li chlapci a děvčata sedět střídavě vedle sebe?*

[$2(10!)^2$]

Příklad 14.12 *V kolika bodech se protíná 9 přímek, z nichž čtyři jsou navzájem rovnoběžné?*

[30]

Příklad 14.13 *Kolik různých signálů lze utvořit z pěti praporků různých barev, jestliže každý signál lze vytvořit umístěním jednoho až všech pěti praporků vedle sebe?*

[325]

Příklad 14.14 *Pro přípustné hodnoty upravte*

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9\frac{n!}{(n-1)!}.$$

[$n(n-2)^2$ pro $n \geq 2$]

Příklad 14.15 *Z kolika prvků dostaneme 380 variací druhé třídy?*

[20]

Příklad 14.16 *Řešte v* $\mathbb{N}$ *rovnici*

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$$

[$x = 5$]

Příklad 14.17 *Řešte v* $\mathbb{N}$ *nerovnici.*

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 2\binom{9}{7}$$

[$n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$]

Příklad 14.18 *V rozvoji* $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ *určete* $x \in \mathbb{R}$ *tak, aby pátý člen rozvoje byl roven 105.*

[$x = \frac{1}{8}$]

Příklad 14.19 *Který člen rozvoje* $\left(\frac{1}{x} + 2x^3\right)^{10}$ *obsahuje* x^6*?*

[pátý]

Příklad 14.20 *Najděte komplexní číslo* $\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^6$.

[1]

Reference

[1] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Praha, Prometheus, 1999.

[2] Chrastinová, M., Kolářová E.: Matematika - Přijímací zkoušky na vysoké školy. Brno, FEI VUT, 2000.

[3] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prometheus, 2002.

[4] Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II. Praha, Prometheus, 1999.