KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově
Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia
Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Komplexní čísla

Základní vlastnosti komplexních čísel

Připomeňme základní vlastnosti reálných čísel:

Součet a součin každých dvou reálných čísel je reálné číslo.

Sčítání a násobení reálných čísel je komutativní:

pro všechna $x, y \in R$ platí: $x + y = y + x$ a $xy = yx$.

Sčítání a násobení reálných čísel je asociativní:

pro všechna $x, y, z \in R$ platí: $x + (y + z) = (x + y) + z$ a $x(yz) = (xy)z$

Násobení reálných čísel je distributivní vzhledem ke sčítání:

pro všechna $x, y, z \in R$ platí: $x(y + z) = xy + xz$

Ke každému reálnému číslu x existuje jediné reálné číslo x' tak, že platí $x + x' = 0$.

Ke každému nenulovému reálnému číslu y existuje jediné reálné číslo y' tak, že platí $y \cdot y' = 1$.

Je-li součin dvou reálných čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich.

V oboru reálných čísel kvadratická rovnice se záporným diskriminantem nemá řešení. Pokud rozšíříme obor reálných čísel R na obor komplexních čísel C $(R \subset C)$, můžeme najít všechny kořeny algebraické rovnice jakéhokoli stupně.

Zavedení komplexních čísel

množinu C komplexních čísel získáme z množiny R reálných čísel tak, že k ní přidáme číslo i, pro které platí $i^2 = -1$.

Komplexní číslo $z \in C$ je číslo ve tvaru $z = a + bi; a, b \in R$, kde i je imaginární jednotka, pro kterou platí $i^2 = -1$. Číslo a se nazývá reálná část komplexního čísla z, číslo b se nazývá imaginární část komplexního čísla z. Tento zápis komplexního čísla nazýváme algebraický tvar komplexního čísla.

Je-li $a = 0 \;\Rightarrow\; z = bi$, pak takové komplexní číslo nazýváme ryze imaginární číslo

Je-li $b = 0 \;\Rightarrow\; z = a$, pak jde o reálné číslo

Operace s komplexními čísly

mějme dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru $z_1 = a + bi;\ z_2 = c + di$.

Pro součet platí: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Pro rozdíl platí: $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

Pro součin platí: $z_1 \cdot z_2 = ac + bci + adi + bdi^2 = ac - bd + (bc + ad)i$

Vydělit komplexní čísla $\frac{z_1}{z_2}$ znamená vynásobit číslo z_1 číslem převráceným k číslu z_2.

Dvě komplexní čísla se sobě rovnají, rovnají-li se jejich reálné části $(a = c)$ a současně se rovnají jejich imaginární části $(b = d)$.

Číslo komplexně sdružené $\bar{z}$ k číslu $z = a + bi$ je číslo $\bar{z} = a - bi$ a platí $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Platí: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2};\ \overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2};\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2};\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

Pro mocniny imaginární jednotky platí:

$$i^2 = -1;\ i^3 = i^2 \cdot i = -i;\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;\ i^5 = i \cdot i^4 = i \ldots$$

$$\boxed{i^{4k} = 1;\ i^{4k+1} = i;\ i^{4k+2} = -1;\ i^{4k+3} = -i; k \epsilon N}$$

Absolutní hodnota komplexního čísla

Absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + bi$ se značí $|z|$ a je definována vztahem

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Obecně: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Platí:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, pro\ z_2 \neq 0$$

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|$$

Komplexní jednotka je komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je 1.

V množině komplexních čísel nelze zavést operaci uspořádání.

Základní vlastnosti komplexních čísel

Varianta A

Vypočítejte

$$\frac{3i+2}{2i-3}$$

***Příklad*:**

Rozšíříme zlomek (vynásobíme čitatele i jmenovatele výrazem) $-2i-3$

$$\frac{3i+2}{2i-3}\cdot\frac{-2i-3}{-2i-3}=\frac{6-9i-4i-6}{4+9}=\frac{-13i}{13}=-i$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $-i$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte:

$$2+i+3(7-i)$$

Řešení: 23-2i

2.) Vypočítejte:

$$(i-1)(2i-3)-i$$

Řešení: $1-6i$

3.) Vypočítejte:

$$(i+1)(i-1)+(2i+1)^2$$

Řešení: $-5+4i$

4.) Vypočítejte:

$$2i^9-i^{12}+5i^{16}-3i^{11}$$

Řešení: $4+5i$

Základní vlastnosti komplexních čísel

Varianta B

Vypočítejte:

$$\frac{\frac{i}{2-i}+\frac{1}{i}}{1+\frac{1}{2i+1}}$$

***Příklad*:**

Upravíme jednotlivé zlomky v čitateli i jmenovateli rozšířením zlomků

$$\frac{\frac{i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}}{1+\frac{1}{2i+1}\cdot\frac{-2i+1}{-2i+1}}=\frac{\frac{2i-1}{5}-i}{1+\frac{-2i+1}{5}}=\frac{\frac{2i-1-5i}{5}}{\frac{5-2i+1}{5}}=\frac{-1-3i}{6-2i}\cdot\frac{6+2i}{6+2i}=$$

$$=\frac{-6-18i-2i+6}{36+4}=-\frac{1}{2}i$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $-\frac{1}{2}i$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte:

$$(2+i)\cdot i+\frac{3+i}{2-i}-1$$

Řešení: $3i-1$

2.) Vypočítejte:

$$\frac{2+i}{i}+\frac{i}{i+1}-\frac{2i+1}{i-1}$$

Řešení: 1

3.) Vypočítejte:

$$-\frac{i-1}{2}-\frac{i}{i-1}\cdot i+2$$

Řešení: $2-i$

4.) Vypočítejte:

$$(5i-1):\left(2-\frac{i+3}{2+i}\right)$$

Řešení: $1+8i$

Základní vlastnosti komplexních čísel

Varianta C

Vypočítejte:

$$\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right| \cdot \left|\frac{1+i}{3-i}\right|}{|2i-1|+|-i|}$$

***Příklad*:**

Nejprve upravíme oba zlomky v čitateli

$$\frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\cdot\frac{i}{i}\right| \cdot \left|\frac{1+i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}\right|}{|2i-1|+|-i|} = \frac{\left|\frac{3i+4}{-5}\right| \cdot \left|\frac{2+4i}{10}\right|}{|2i-1|+|-i|} = \frac{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}\cdot\sqrt{\frac{4}{100}+\frac{16}{100}}}{\sqrt{4+1}+1} = \frac{1\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{5}+1} =$$

$$= \frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{25-5} = \frac{5-\sqrt{5}}{20}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte:

$$|(7+i)(4-3i)|$$

Řešení: $25\sqrt{2}$

2.) Vypočítejte:

$$\left|\frac{4-2i}{3+i}\right|$$

Řešení: $\sqrt{2}$

3.) Vypočítejte:

$$\left|\frac{|4-3i|+i}{3-2i}\right|$$

Řešení: $\sqrt{2}$

4.) Vypočítejte:

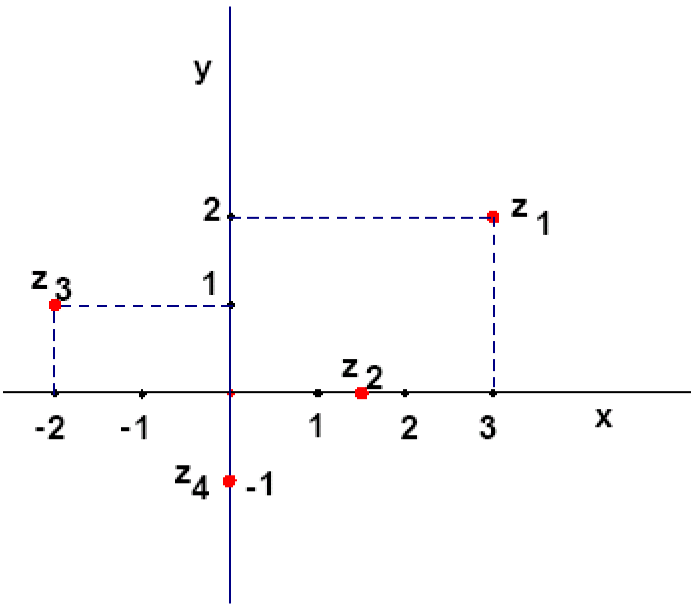
$$\left|\frac{\left|\sqrt{3}-i\right|\cdot(i-1)}{|i(i-1)|-2i}\right|$$

Řešení: $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Geometrické znázornění komplexních čísel

Rovina komplexních čísel neboli **<u>Gaussova rovina</u>** je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel. Číslu $z = a + bi$ přiřazujeme bod $[a; b]$. Gaussova rovina je tvořena kartézskou soustavou souřadnic O_{xy}, na jejíž ose x jsou zobrazena reálná čísla (to znamená čísla $a + 0i$). Tato osa se nazývá <u>reálná osa</u>. Na ose y jsou zobrazena čísla ryze imaginární (to znamená čísla $0 + bi$). Tato osa se nazývá <u>imaginární osa</u>.

$z_1 = 3 + 2i;\ z_2 = 1{,}5;\ z_3 = -2 + i;\ z_4 = -1$



<u>Absolutní hodnota komplexního čísla</u> je rovna vzdálenosti jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku soustavy souřadnic.

Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

<u>Komplexní čísla jako vektory</u>

Komplexní čísla lze v Gaussově rovině znázornit i jako vektory. Libovolnému komplexnímu číslu z přiřadíme vektor $\vec{u} = \overrightarrow{OZ}$, kde O je počátek a Z obraz komplexního čísla z. Komplexní čísla tedy můžeme graficky sčítat a násobit reálným číslem tak, že je zobrazíme v Gaussově rovině jako vektory, s nimiž pak jako s vektory pracujeme.

Součin a podíl komplexních čísel v Gaussově rovině znázorníme pomocí geometrických zobrazení otočení a stejnolehlosti což si ukážeme na příkladě.

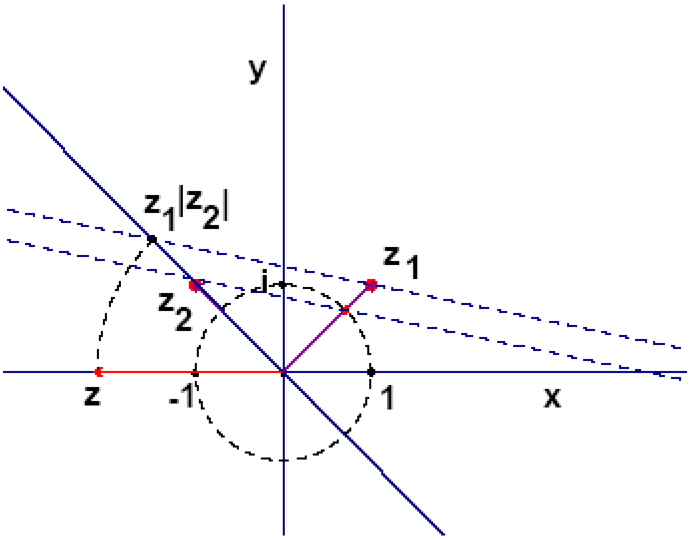
Příklad:

Mějme komplexní čísla $z_1 = -1 + i;\ z_2 = 1 + i$.

Graficky znázorněme součin $z_1 \cdot z_2$ a podíl $z_1 : z_2$.

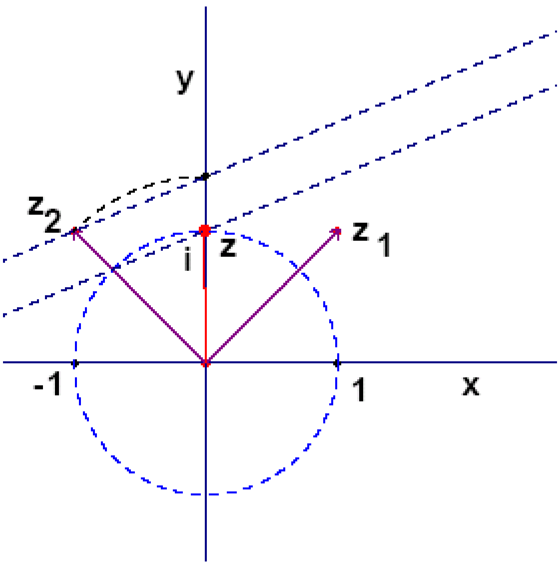
Součin $z_1 \cdot z_2$

Sestrojíme v Gaussově rovině obrazy obou komplexních čísel. Nyní pomocí stejnolehlosti najdeme obraz komplexního čísla $z_1 \cdot |z_2|$. Pak otočíme obraz tohoto čísla o argument čísla z_1.



Podíl $z_1 : z_2$

Převedeme podíl na součin $z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ a postupujeme podle předcházející úlohy.



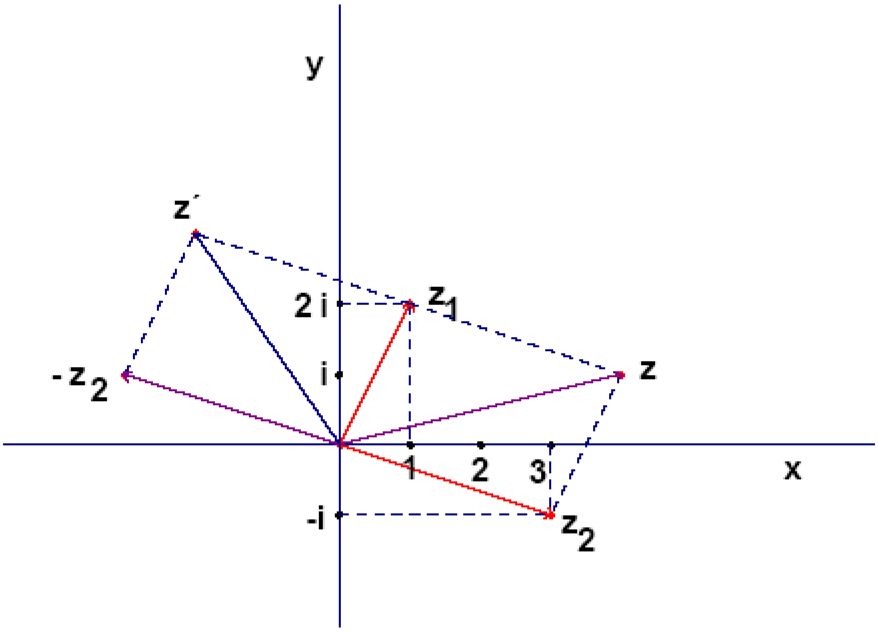
Geometrické znázornění komplexních čísel

Varianta A

Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 3 - i$. Potom graficky určete

a) $z = z_1 + z_2$ b) $z' = z_1 - z_2$

Příklad:



Příklad:

Varianta A

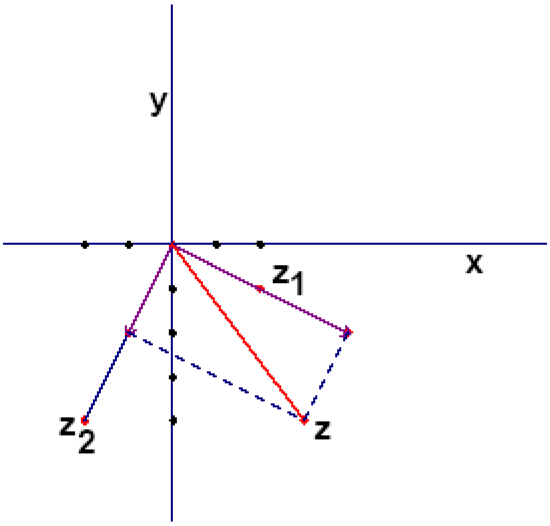
Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

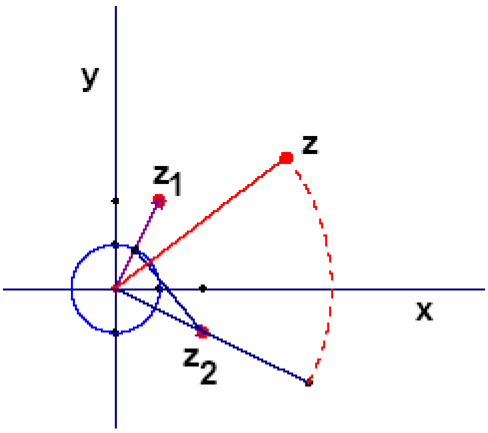
1.) Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 2 - i;\ z_2 = -2 - 4i$. Potom graficky určete $z = 2z_1 + \frac{1}{2}z_2$.

Řešení:

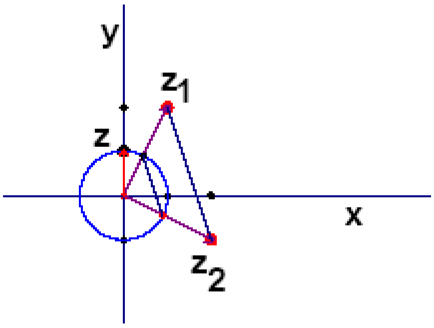


2.) Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 1 + 2i;\ z_2 = 2 - i$. Potom graficky určete $z = z_1 \cdot z_2$.

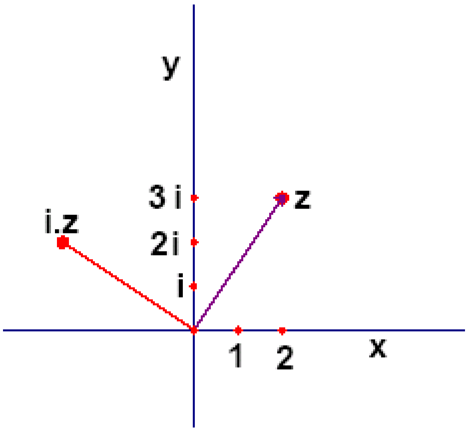
Řešení:



3.) Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 2 - i$. Potom graficky určete $z = z_1 : z_2$.



4.) Nakreslete obraz komplexního čísla $z = 2 + 3i$. Potom graficky určete $i \cdot z$.



Geometrické znázornění komplexních čísel

Varianta B

Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

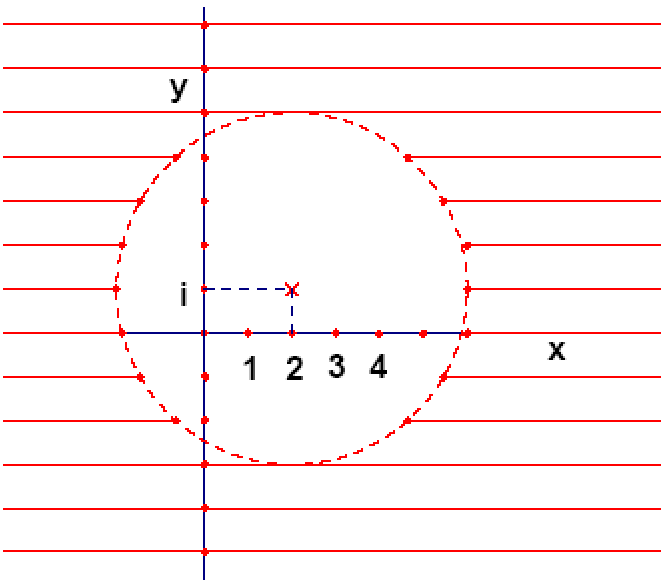
$$|z - 2 - i| > 4$$

***Příklad*:**

Nerovnici upravíme na tvar

$$|z - (2 + i)| > 4$$

Hledáme tedy všechna komplexní čísla, jejichž obrazy v Gaussově rovině mají od obrazu komplexního čísla $2 + i$ vzdálenost větší než 4.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: vnější oblast kruhu o poloměru 4 a středu o souřadnicích $[2; i]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z| = 3$$

Řešení: kružnice, střed $[0; 0]$, poloměr 3

2.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z - i| = 1$$

Řešení: kružnice, střed $[0; i]$, poloměr 1

3.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z - 1 + i| = 2$$

Řešení: kružnice, střed $[1;\ -i]$, poloměr 2

4.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z - 2| \leq 3$$

Řešení: kruh, střed $[2; 0]$, poloměr 3

Geometrické znázornění komplexních čísel

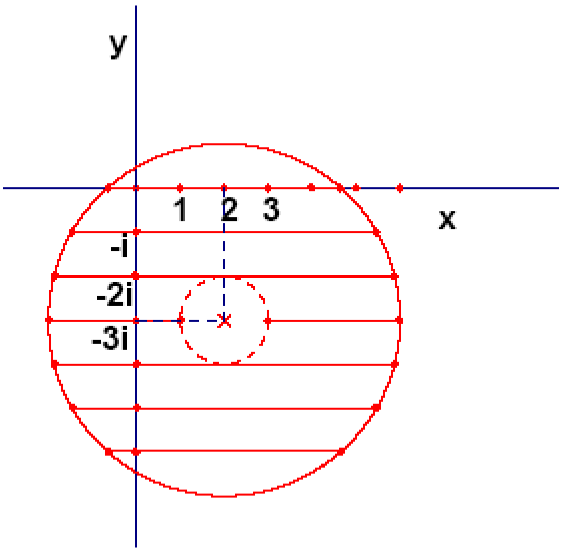
Varianta C

Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$1 < |z + 3i - 2| \leq 4$$

***Příklad*:**

výpočet v editoru rovnic



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: mezikruží, $k_1(S_1;\ r_1);\ k_2(S_1;\ r_2);\ S_1[2;\ -3i];$

$r_1 = 1, r_2 = 4$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z| = |z - 2 + i|$$

Řešení: osa úsečky s krajními body $[0; 0], [2;\ -i]$

2.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z - 1 - 3i| \geq |z + 2i|$$

Řešení: polorovina, hraniční přímkou je osa úsečky s krajními body $[1; 3i], [0;\ -2i]$

3.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

$$|z - 1| \geq |z + 2i| \ \wedge\ |z - 2| < 4$$

Řešení: průnik poloroviny, jejíž hraniční přímkou je osa úsečky s krajními body $[1; 0], [0;\ -2i]$, a kruhu bez hraniční kružnice se středem $[2; 0]$ a poloměrem 4

4.) Nakreslete v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z, pro která platí

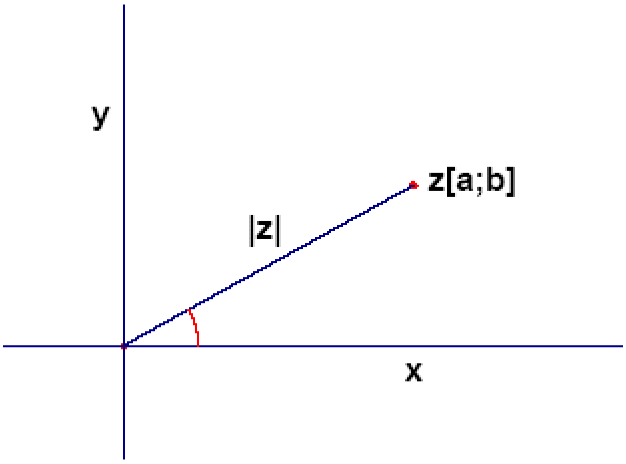
$$2 < |z - 1 + 2i| < 7$$

Řešení: mezikruží kružnic k_1 a k_2, $k_1([1;\ -2]; r = 2), k_2([1;\ -2]; r = 7)$ bez hraničních kružnic

Goniometrický tvar komplexního čísla

Goniometrický tvar komplexního čísla $z \neq 0$ je jeho zápis ve tvaru $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$. Číslo φ je argument komplexního čísla z, $|z|$ je jeho absolutní hodnota.

V Gaussově rovině můžeme znázornit komplexní číslo na základě znalosti jeho algebraického tvaru $z = a + bi$ nebo pomocí jeho vzdálenosti od počátku Gaussovy roviny O a velikosti orientovaného úhlu φ (argumentu), jehož počáteční rameno je kladná reálná poloosa a koncové rameno polopřímka OZ.



Pro převod algebraického tvaru $z = a + bi$ komplexního čísla na tvar goniometrický platí:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, cos\varphi = \frac{a}{|z|}, sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

Operace s komplexními čísly v goniometrickém tvaru

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru lze velmi snadno násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat. Sčítat a odčítat je výhodnější v algebraickém tvaru.

Součin:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

Větu o násobení lze rozšířit pro libovolný počet činitelů.

Podíl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot [cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Umocnění pro $n \in N$:

$$[|z|(cos\varphi + isin\varphi)]^n = |z|^n \cdot (cosn\varphi + isinn\varphi)$$

Speciálním případem je Moivreova věta platná pro komplexní jednotky:

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi$$

Odmocnění:

Nechť $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$ je libovolné nenulové komplexní číslo a n je přirozené číslo. Pak existuje právě n různých hodnot komplexní n-té odmocniny čísla z. Jsou jimi komplexní čísla vyjádřená v goniometrickém tvaru vzorcem

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], kde\ k = 0; 1; \dots, n-1$$

Všechny n-té odmocniny čísla z mají stejnou absolutní hodnotu $\sqrt[n]{|z|}$, ale liší se o celistvé násobky čísla $\frac{2k\pi}{n}$. Proto pro jejich obrazy v Gaussově rovině platí, že leží ve vrcholech pravidelného n-úhelníku, který je vepsaný do kružnice se středem v počátku Gaussovy roviny O a o poloměru $r = \sqrt[n]{|z|}$.

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

Varianta A

Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = sin30° + icos30°$$

***Příklad*:**

Převedeme číslo na algebraický tvar

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nyní budeme převádět na tvar goniometrický.

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1; cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}; sin\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Hledaný tvar komplexního čísla tedy je

$$z = 1\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $z = 1\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = -2 + 2i\sqrt{3}$$

Řešení: $4\left(cos\frac{2}{3}\pi + isin\frac{2}{3}\pi\right)$

2.) Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = -\sqrt{3} + i$$

Řešení: $2\left(cos\frac{5}{6}\pi + isin\frac{5}{6}\pi\right)$

3.) Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = -7 - 7i$$

Řešení: $7\sqrt{2}\left(cos\frac{5}{4}\pi + isin\frac{5}{4}\pi\right)$

4.) Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo

$$z = 10 - 10i$$

Řešení: $10\sqrt{2}\left(cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi\right)$

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

Varianta B

Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{i-3}{2+i}$$

***Příklad*:**

Rozšíříme zlomek výrazem $2 - i$

$$z = \frac{i-3}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2i+1-6+3i}{4+1} = \frac{5i-5}{5} = -1+i$$

Nyní toto komplexní číslo převedeme na goniometrický tvar

$$|z|\sqrt{1+1} = \sqrt{2}; cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

Hledaný goniometrický tvar zadaného komplexního čísla je

$$z = \sqrt{2}\left(cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\right)$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{3}{4}\pi + isin\frac{3}{4}\right)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{-1+2i}{1+3i}$$

Řešení: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$

2.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{1+i}{1-i}$$

Řešení: $z = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$

3.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{i-2}{4i-8}$$

Řešení: $z = \frac{1}{4}(cos0 + isin0)$

4.) Upravte a výsledek zapište v goniometrickém tvaru

$$z = \frac{3-i}{1+3i}$$

Řešení: $z = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right)$

Komplexní čísla v goniometrickém tvaru

Varianta C

a) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$$

b) Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny z čísla -4.

***Příklad*:**

a) převedeme komplexní číslo v závorce na goniometrický tvar

$$|z|=\sqrt{1+3}=2; cos\varphi=\frac{1}{2};\ sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{5}{3}\pi$$

$$1-i\sqrt{3}=2\cdot\left(cos\frac{5}{3}\pi+isin\frac{5}{3}\pi\right)$$

a použijeme Moivreovu větu

$$(cos\varphi+isin\varphi)^n=cosn\varphi+isinn\varphi$$

$$2^5\cdot\left(cos5\cdot\frac{5}{3}\pi+isin5\cdot\frac{5}{3}\pi\right)=32\cdot\left(cos\frac{25}{3}\pi+isin\frac{25}{3}\pi\right)=32\cdot\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=16+16\sqrt{3}i$$

b) Číslo -4 nejprve převedeme na goniometrický tvar

Číslo -4 leží v Gaussově rovině na ose x v bodě o souřadnicích $[-4;0]$, proto bez dlouhého počítání víme, že argument $\varphi=\pi$.

$$-4=4\cdot(cos\pi+isin\pi)$$

Nyní hledáme všechny druhé odmocniny komplexního čísla

$$4(cos\pi+isin\pi)$$

Použijeme vzorec

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\cdot\left[cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+isin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]; k=0;1;\dots,n-1$$

Takže

$$x_1=\sqrt{4}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\cdot0\cdot\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\cdot0\cdot\pi}{2}\right)\right]=2\left(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}\right)=2i$$

$$x_2=\sqrt{4}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\cdot1\cdot\pi}{2}\right)+isin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\cdot1\cdot\pi}{2}\right)\right]=2\left(cos\frac{3}{2}\pi+isin\frac{3}{2}\pi\right)=-2i$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:a) $16 + 16\sqrt{3}i$; b) $x_{1,2} = \pm 2i$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru

$$\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{12}$$

Řešení: 2^{24}

2.) Užitím Moivreovy věty umocněte a výsledek převeďte do algebraického tvaru

$$(1 + i)^6$$

Řešení: $-8i$

3.) Vypočítejte všechny páté komplexní odmocniny z čísla 32.

Řešení: $z_{1,2,3,4,5} = 2\left(cos\frac{2}{5}k\pi + isin\frac{2}{5}k\pi\right), k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

4.) Vypočítejte součet všech třetích komplexních odmocnin z čísla -2.

Řešení: 0

Rovnice v oboru komplexních čísel

Binomická rovnice

Binomická rovnice je rovnice ve tvaru $x^n - z = 0$, kde z je komplexní číslo, x je neznámá z oboru C a n je přirozený exponent.

Kořeny binomické rovnice získáme jako n-té odmocniny komplexního čísla z.

Binomická rovnice

$$x^n - |z|(cos\varphi + isin\varphi) = 0$$

má v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů:

$$x_k = \sqrt[n]{z}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k = 0; 1; \dots; n-1$$

Kvadratické rovnice s reálnými kořeny a záporným diskriminantem

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in R, a \neq 0$$

tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny, a to komplexně sdružená imaginární čísla:

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in C, a \neq 0$$

tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny pro diskriminant $D \neq 0$, a to čísla

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot \left(cos\frac{\alpha}{2} + isin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

kde α je argument jejího diskriminantu, a pouze jeden kořen

$$x = -\frac{b}{2a}$$

pro $D = 0$.

Rovnice v oboru komplexních čísel

Varianta A

Řešte rovnice

a) $x, y \in R$

$$x(y+i)+y(x-i)=2x+2yi$$

b) $z \in C$

$$(z+i)(z-3i)=z(z-i)$$

c) $z \in C$

$$2z+3\bar{z}=5+i$$

***Příklad*:**

a) upravíme pravou stranu rovnice a budeme porovnávat (dvě komplexní čísla se sobě rovnají, pokud mají stejnou reálnou a stejnou imaginární část)

$$xy+xi+xy-yi=2x+2yi$$

$$2xy+i(x-y)=2x+2yi$$

Odtud plyne

$$2xy=2x \ \wedge \ x-y=2y$$

$$2xy-2x=0 \ \wedge \ x=3y$$

$$2x(y-1)=0 \ \wedge \ x=3y$$

Z první rovnice plyne

$$x=0 \ \vee \ y=1$$

Úloha má tedy dvě řešení

$$x=0 \wedge y=0 \quad \vee \quad x=3 \wedge y=1$$

b) roznásobíme členy

$$z^2-2zi+3=z^2-zi$$

$$3=zi$$

$$z=\frac{3}{i}$$

$$z=\frac{3}{i}\cdot\frac{i}{i}=-3i$$

c) do rovnice dosadíme $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$$2(a+bi)+3(a-bi)=5+i$$

$$5a-bi=5+i$$

Dvě komplexní čísla se sobě rovnají, pokud se rovnají jejich reálné části i jejich imaginární části. Proto platí

$$5a = 5 \ \wedge -b = 1 \ \Rightarrow a = 1 \ \wedge \ b = -1$$

Řešení rovnice tedy je

$$z = 1 - i$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:a) $x = 0 \ \wedge y = 0 \quad \vee \quad x = 3 \ \wedge y = 1$ b) $z = -3i$, c) $z = 1 - i$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete reálná čísla $x, y \in R$ tak, aby platilo

$$2x + yi = 4 - 3i$$

Řešení: $x = 2 \ \wedge y = -3$

2.) Řešte rovnici s neznámou $z \in C$

$$z = 3i(z - i) - 5z$$

Řešení: $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

3.) Řešte rovnici s neznámou $z \in C$

$$\left(2 - \frac{1}{i}\right)\bar{z} - 13 = 2(6{,}5i - z)$$

Řešení: $z = 13 - 39i$

4.) Řešte rovnici s neznámou $z \in C$

$$z(\bar{z} - 4) - 1 = 8i$$

Řešení: $z_1 = 1 - 2i;\ z_2 = 3 - 2i$

Rovnice v oboru komplexních čísel

Varianta B

Řešte kvadratickou rovnici s neznámou $x \in C$

$$x(3-x) = 3-i$$

***Příklad*:**

Roznásobíme levou stranu a převedeme všechny členy rovnice doleva

$$x^2 - 3x + 3 - i = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3-i)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{4i-3}}{2}$$

Vyřešíme nejprve odmocninu

$$\sqrt{4i-3} = a + bi$$

Rovnici umocníme a dále budeme řešit porovnáváním dvou komplexních čísel

$$4i - 3 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Dvě komplexní čísla se sobě rovnají, pokud mají stejnou reálnou část a stejnou imaginární část.

$$a^2 - b^2 = -3$$

$$2ab = 4$$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Z druhé rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do rovnice první

$$a = \frac{2}{b}$$

$$\left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 = -3$$

$$4 - b^4 = -3b^2$$

Zavedeme substituci $k = b^2$ a dostaneme rovnici

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k_1 = 4; \; k_2 = -1$$

Protože $a, b \in R$, přichází v úvahu pouze řešení $k_1 = 4$. Dopočítáme tedy a, b.

$$a_1 = 1, b_1 = 2 \ \vee \ a_2 = -1, b_2 = -2$$

Dosadíme tedy do vzorce pro výpočet kořenů $x_{1,2}$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm (1 + 2i)}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

$$x_2 = \frac{3 - 1 - 2i}{2} = 1 - i$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $x_1 = 2 + i;\ x_2 = 1 - i$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou $x \in C$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

Řešení: $\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$

2.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou $x \in C$

$$x^2 + x(2 - i) + 3 - i = 0$$

Řešení: $-1 + 2i;\ -1 - i$

3.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou $x \in C$

$$ix^2 - 3x + 4i = 0$$

Řešení: $-4i; i$

4.) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou $x \in C$

$$x^2 - 20 = ix(2i - x)$$

Řešení: $3 - i;\ -4 + 2i$

Rovnice v oboru komplexních čísel

Varianta C

Řešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$(ix)^4 + \sqrt{3} - i = 0$$

***Příklad*:**

Vyjádříme z rovnice x^4

$$x^4 = -\sqrt{3} + i$$

Hledáme tedy všechny čtvrté komplexní odmocniny z čísla $z = -\sqrt{3} + i$.

Převedeme toto komplexní číslo na goniometrický tvar

$$|z| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2; cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}; sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{6}\pi$$

$$z = 2\left(cos\frac{5}{6}\pi + isin\frac{5}{6}\pi\right)$$

Čtvrté komplexní odmocniny z tohoto čísla jsou

$$x_1 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{5}{24}\pi + isin\frac{5}{24}\pi\right)$$

$$x_2 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{17}{24}\pi + isin\frac{17}{24}\pi\right)$$

$$x_3 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{29}{24}\pi + isin\frac{29}{24}\pi\right)$$

$$x_4 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{41}{24}\pi + isin\frac{41}{24}\pi\right)$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $x_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{2}\left[cos\left(\frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{5}{24}\pi + k\frac{\pi}{2}\right)\right]; k \in \{0; 1; 2; 3\}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Řešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$x^3 - 64i = 0$$

Řešení: $x_{1,2,3} = 4\left[cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]; k \in \{0; 1; 2\}$

2.) Řešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$x^3 - 27 = 0$$

Řešení: $x_{1,2,3} = 3\left(cos\frac{2}{3}k\pi + isin\frac{2}{3}k\pi\right); k \in \{0; 1; 2\}$

3.) Řešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$x^3 - 1 - i = 0$$

Řešení: $x_{1,2,3} = \sqrt[6]{2}\left[cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) + isin\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right)\right]; k \in \{0; 1; 2\}$

4.) Řešte rovnici s neznámou $x \in C$. Výsledky zapište v goniometrickém tvaru.

$$(2x)^5 - 16 = 16i\sqrt{3}$$

Řešení: $x_{1,2,3,4,5} = 1 \cdot \left[cos\left(\frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right) + isin\left(\frac{1}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi\right)\right]; k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$