KOMBINATORIKA

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově
Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia
Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Základní kombinatorická pravidla

Pravidlo součtu

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny s $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ prvky a jsou-li každé dvě disjunktní, pak množina $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ má $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ prvků.

Příklad: Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se nevyskytuje 0 a zbývajících 9 číslic se každá vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: počet všech dvojciferných čísel je.................................. 90

počet všech dvojciferných se stejnými ciframi 9

počet všech dvojciferných obsahujících nulu 9

počet všech dvojciferných s různými ciframi bez nuly...... p

platí vztah $p + 9 + 9 = 90 \quad p = 72$

Počet všech dvojciferných čísel, které odpovídají zadaným podmínkám je 72.

Pravidlo součtu

Varianta A

***Příklady*:**

1) Ve třídě je 32 dětí, z nichž se 11 učí německy a 8 španělsky. Kolik dětí se učí anglicky, jestliže ani jedno z dětí nemá dva jazyky.
2) Kolik přirozených čísel menších než 150 končí trojkou?

Řešení:

1) Žádné dítě nemá dva jazyky, hledaný počet bude zbytek z 32 po odečtení německy a španělsky se učících dětí.

   $x = 32 - 11 - 8 \qquad x = 13$

2) Množina všech jednociferných čísel končících trojkou A={3}

   Množina všech dvojciferných čísel končících trojkou B={13;23;33;43;53;63;73;83;93}

   Množina všech dvojciferných čísel končících trojkou C={103;113;123;133;143}

   Stačí sečíst počty členu jednotlivých množin $x = 1 + 9 + 5 \qquad x = 15$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

1) Anglicky se učí 13 dětí.
2) Počet přirozených čísel menších než 150 končících trojkou je 15.

***Příklady k procvičení*:**

1) Sportovní oddíl navštěvuje 14 dívek a 21 chlapců. Na začátku každé sezony si mezi sebou zvolí kapitána. Kolik mají možností volby? [Mají 35 možností volby.]

2) Na mezinárodní výstavě psů se sešlo 7 labradorských retrívrů, 12 zlatých retrívrů, 13 německých ovčáku a 6 bílých ovčáků. Na konci výstavy rozhodčí vyberou jednoho absolutního vítěze. Kolik mají možností, jak vybrat? [Mají 38 možností, jak vybrat.]

3) Veronika jede na lyžařský kurz, a protože od loňského roku hodně vyrostla, rozhodnou se rodiče, že jí koupí nové lyže. Když přijdou do obchodu, zjistí, že mají šest různých značek lyží. V délce, kterou rodiče Veroniky požadují, mají od každé značky čtyři páry. Z kolika lyží mohou Veroničiny rodiče vybírat, jestliže lyže dvou značek jsou nad jejich finanční možnosti? [Mohou vybírat z 16 lyží.]

4) V mezinárodní autobusové lince se na cestě z Bratislavy do Vídně nachází 4 dívky, 2 děti ze Slovenska, 16 můžu, 6 dětí z jiné země než je Slovensko, 21 Slováků, z nichž je 12 mužů, a 4 ženy jiné státní příslušnosti. Je autobus zaplněn, jestliže se do něj vejde 42 lidí? [Není, protože se v autobuse nachází 35 lidí.]

5) Na mezinárodním žákovském hokejovém utkání mezi Švédskem a Finskem je v hledišti 126 můžu, 65 chlapců, 46 dětí ze Švédska, 50 dětí z Finska, 200 Švédů, z nichž je polovina mužů, a 39 žen z Finska. Kolik lidí je v hledišti? [V hledišti je 309 lidí.]

6) Určete počet všech dvojciferných přirozených čísel,
   a) v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. [81]
   b) v jejichž dekadickém zápisu se nevyskytuje jednička. [73]

7) Určete počet všech přirozených nejvýše dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vykytuje nejvýše jednou. [90]

8) Určete počet všech přirozených trojciferných čísel,
   a) která jsou menší než 162 a která jsou sudá. [31]
   b) která jsou menší než 150 a dělitelná 5. [10]
   c) která jsou menší než 150, větší než 100 a v jejich dekadickém zápisu se nevyskytuje nula. [136]
9) Jaký je počet všech přirozených čísel, která jsou menší než 206 a v jejichž dekadickém zápisu se vyskytuje šestka nejvýše jednou? [18]

Pravidlo součtu

Varianta B

***Příklady*:**

1) Určete počet všech přirozených trojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.
2) Ve skupině uchazečů o práci ovládá každý uchazeč alespoň jeden ze dvou jazyků. 20 uchazečů mluví anglicky a 14 francouzsky. 10 uchazečů mluví oběma jazyky. Kolik uchazečů je na konkurzu?

Řešení:

1) Počet všech trojciferných čísel 900

   Počet všech trojciferných čísel se dvěma stejnými číslicemi 243

   Počet všech trojciferných se třemi stejnými číslicemi 9

   $x = 900 - 9 - 243 \quad x = 648$

2) Počet uchazečů mluvících anglicky 20

   Počet uchazečů mluvících francouzsky 14

   Počet uchazečů mluvících oběma jazyky 10

   Pokud bychom sečetli pouze uchazeče mluvící anglicky a francouzsky, uchazeči ovládající oba jazyky by byli započtení dvakrát. Proto je musíme odečíst.

   $x = 20 + 14 - 10 \quad x = 24$

***Příklad*:**

[Varianta A](#)
[Varianta B](#)
[Varianta C](#)

Výsledek řešení:

1) Počet všech trojciferných čísel, v nichž se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou, je 648
2) Na konkurz přišlo 24 uchazečů

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, ve kterých se každá číslice vyskytuje právě jednou. [0]
2) Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, ve kterých se každá číslice vyskytuje alespoň dvakrát. [252]
3) Ve skupině 50 lidí ovládá každý člověk alespoň jeden programovací jazyk. 30 lidí ovládá programovací jazyk Pascal, 26 lidí ovládá jak programovací jazyk Pascal, tak programovací jazyk Delphi. Kolik lidí ve skupině ovládá programovací jazyk Delphi? [46]
4) V pokusné laboratoři se lék A testuje na 36 pokusných myších, lék B se testuje na 42 pokusných myších, 12 myší dostává oba léky najednou. Kolik pokusných myší mají v laboratoři? [66]
5) Na konferenci se sejde 162 vědců. 102 vědců ovládá Angličtinu, 60 vědců ovládá Francouzštinu, 75 vědců ovládá Němčinu. Angličtinu a Francouzštinu zároveň ovládá 20 vědců, Angličtinu a Němčinu zároveň ovládá 70 vědců a Francouzštinu a Němčinu zároveň ovládá 10 vědců. Všechny jazyky ovládají pouze tři vědci.
   a) Kolik vědců ovládá alespoň jeden ze tří jazyků? [140]
   b) Kolik vědců neovládá ani jeden ze tří jazyků? [22]
6) V zábavním parku fungují tři atrakce. První atrakci absolvovalo jednoho 138 dětí, druhou atrakci absolvovalo 226 dětí, třetí atrakci absolvovalo 68 dětí. První a druhou atrakci zvládlo navštívit 80 dětí, druhou a třetí atrakci 70 dětí a první a třetí atrakci 60 dětí. Všechny tři atrakce zvládlo za jeden den jen 15 dětí. Kolik dětí navštívilo zábavní park, jestliže každé dítě bylo alespoň na jedné atrakci? [237]

Pravidlo součtu

Varianta C

Příklady:

Určete počet všech možných tahů koněm na šachovnici 8x8.

Řešení:

Koněm můžeme táhnout vždy do tvaru písmene L (jakýmkoli směrem). Rozdělíme si políčka do množin podle počtu tahů, které lze z daného políčka udělat.

A	B	C	C	C	C	B	A
B	C	D	D	D	D	C	B
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
C	D	E	E	E	E	D	C
B	C	D	D	D	D	C	B
A	B	C	C	C	C	B	A

Z políčka označeného písmenem A je možno táhnout dvěma způsoby, písmenem B třemi způsoby, písmenem C čtyřmi způsoby, písmenem D šesti způsoby a písmenem E osmi způsoby.

Políčka označená písmenem A jsou 4, celkový součet možných tahů z políčka A je 4x2=8. U dalších písmen postupujeme obdobně.

Jednotlivé součty můžeme sečíst, protože množiny druhů políček jsou disjunktní.

$$4\cdot 2+8\cdot 3+20\cdot 4+16\cdot 6+16\cdot 8=8+24+80+96+128=336$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

Počet všech možných tahů koněm na šachovnici je 336.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet všech možných tahů koněm na šachovnici 8x8, jestliže můžu táhnout pouze z černého políčka. [168]
2) Určete počet všech možných tahů králem na šachovnici 8x8. [420]
3) Určete počet všech možných tahů králem na šachovnici, jestliže
   a) lze táhnou z bílého políčka pouze na bílé políčko a z černého políčka pouze na černé políčko. [220]
   b) lze táhnout z černého políčka pouze na bílé políčko a z bílého políčka pouze na černé políčko. [224]

Pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklad: Určete počet všech pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Na místě desetitisíců můžeme vybírat z devíti číslic 1, 2, …, 9, takže $n_1 = 9$.

Na místě tisíců může být jakákoli cifra, kromě té, která byla na místě desetitisíců, takže $n_2 = 9$.

Na místě stovek může být jakákoli cifra, kromě těch, které byly na místě tisíců a desetitisíců, takže $n_3 = 8$.

Dále uvažujeme podobným způsobem $n_4 = 7$ a $n_5 = 6$.

Nyní už stačí počty jen vynásobit.

$x = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$

Počet všech pěticiferných čísel, která odpovídají zadaným podmínkám, je 27 216.

Pravidlo součinu

Varianta A

***Příklady*:**

1) Určete počet všech přirozených trojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou a která začínají jedničkou.
2) Karel chce zabalit dárek pro kamaráda, ale zapomněl koupit balicí papír. Když přijde těsně před zavírací dobou do obchodu, mají už jen dva druhy balicího papíru a tři barvy stuh. Kolika způsoby lze zabalit dárek?

Řešení:

1) První člen je daný.

   Na místě desítek může být jakákoli číslice kromě jedničky, protože číslice se nesmí opakovat. Dohromady je to devět možností.

   Na místě jednotek může být jakákoli číslice kromě jedničky a číslice, která je na místě desítek. Máme tedy osm možností.

   $x = 1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$
2) Ke každému ze dvou balicích papírů můžeme dát jednu ze tří stuh. Celkem tedy máme $x = 2 \cdot 3 = 6$ možností

***Příklad*:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

Výsledky řešení:

1) Počet trojciferných čísel, která odpovídají zadání je 72.
2) Karel má 6 možností jak zabalit dárek.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. [4 536]
2) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel utvořených z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. [3024]
3) Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel utvořených z číslic 0, 1, 2, 4, 6, 8. [38 880]
4) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, které mají na místě jednotek dvojku a na místě tisícovek trojku. [648]
5) Určete počet všech šestimístných telefonních čísel. Kolik z nich začíná pětkou? [531 441, 59 049]
6) Kód zámku na kolo je trojmístný a skládá se z číslic. Jak dlouho budu odemykat zámek, když zapomenu kód a uhodnu kód až posledním možným pokusem. Vytočení jednoho kódu trvá dvacet vteřin. [14 580 vteřin]
7) Ve vrhu jezevčíka je šest fenek a čtyři psi. Kolika možnými způsoby lze provést výběr dvou štěňat, jestliže chci, aby jedno byl pes a druhý fenka. [24]
8) V misce je sedm žlutých jablek, osm zelených jablek a deset červených jablek. Kolika způsoby lze provést výběr tří jablek, jestliže chci, aby každé bylo jiné barvy. [560]

Pravidlo součinu

Varianta B

***Příklady*:**

1) Hloupý Honza cestuje z království Za Sedmero řekami do království Za Osmero řekami. Cestou se musí zastavit v hospodě U Draka. Z království Za Sedmero řekami vedou do hospody čtyři cesty a z hospody do království Za Osmero řekami vedou tři cesty. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat cestu.
   a) Z jednoho království do druhého a zpět
   b) Z jednoho království do druhého a zpět tak, že žádná cesta není použita dvakrát.
2) V misce je 12 gumových bonbonu a 20 hašlerek. Anička si může vybrat buď hašlerku, anebo gumový bonbon tak, aby Pavla, která si po ní vybere jednu hašlerku a dva gumové bonbony, měla co největší možnost výběru.

Řešení:

1)
   a) Ke každé ze čtyř cest z prvního království do hospody můžeme přiřadit jednu ze tří cest z hospody do druhého království. Cesta zpět je obdobná.
      $x = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$
   b) Na cestu do druhého království má Honza stejně možností jako v případě a), na cestu zpět má Honza dvě možnosti jak se vrátit do hospody a tři možnosti, jak s e dostat z hospody do království Za Sedmero řekami. Rovnice vypadá následovně.
      $x = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$
2) Pokud si Anička vybere gumový bonbon, tak bude mít Pavla $x = 11 \cdot 10 \cdot 20 = 2200$ možností výběru. Pokud si Anička vybere hašlerku, bude mít Pavla $x = 12 \cdot 11 \cdot 19 = 2508$ možností výběru.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1)
   a) Cestu tam a zpět lze vybrat 144 způsoby.
   b) Cestu lze vybrat 72 způsoby.
2) Anička si musí vybrat hašlerku

***Příklady k procvičení*:**

1) Ze Žďánic do Bečvár vede jedna silnice, dvě lesní cesty a jedna cyklostezka. Určete počet způsobů, kterými je možno se dostat
   a) ze Žďánic do Bečvár a zpět. [16]
   b) ze Ždánic do Bečvár a zpět tak, aby cesta zpět do Žďánic byla jiná než cesta do Bečvár. [12]
   c) ze Žďánic do Bečvár a zpět tak, aby byla silnice použita právě jednou. [6]
2) Jana s Pavlem se rozhodnou, že v Lednickém areálu chtějí navštívit zámek, romantickou zříceninu a Minaret. Mezi zámkem a zříceninou funguje pěší cesta, drožka a loď, mezi zříceninou a Minaretem funguje cesta pro pěší a loď a mezi zámkem a Minaretem funguje cesta pro pěší, loď a drožka. Určete, kolika způsoby lze vykonat cestu.
   a) ze zámku na zříceninu do Minaretu a zpět do zámku (v tomto pořadí). [18]
   b) ze zámku do Minaretu tak, že každým místem můžu projít nejvýše jednou. [9]
   c) ze zříceniny na Minaret a zpět, jestliže mezi Minaretem a zříceninou nefunguje přímá cesta z důvodu rekonstrukčních prací. [81]
3) Ve skříni jsou sešity a propisky. David si má vybrat sešit nebo propisku tak, aby Mirek, který přijde po něm a vezme si dvě propisky a sešit, měl co největší možnost výběru. Co si vybere David, jestliže ve skříni je
   a) 20 propisek a 12 sešitů. [David si vybere sešit.]
   b) 12 propisek a 20 sešitů. [David si vybere sešit]
   c) 10 propisek a 10 sešitů. [Je jedno, co si David vybere.]
4) V obchodě mají 6 černých kabátů, 7 hnědých kabátů a 9 zelených kabátů. Jaký kabát si vybere paní Skromná, aby paní Nerozhodná, která přijde po ní a vybere si od každého barvy kabátu jeden kabát, měla co největší možnost výběru.
   [Paní Skromná si vybere zelený kabát.]
5) V misce jsou dva druhy polodrahokamů. Žaneta přijde k misce a vybere si jeden ametyst. Sylva přijde po Žanetě a z misky si vybere jeden ametyst a 2 acháty. Kolik muselo být v misce minimálně achátů, jestliže víme, že si Žaneta vybrala tak, aby Sylva měla co největší možnost výběru a v misce bylo 6 ametystů.
   [V misce bylo minimálně 12 achátů.]

Pravidlo součinu

Varianta C

Příklady:

1) Určete počet všech trojciferných čísel, jejichž dekadický zápis je složen z číslic 0,2,4,5,6,7,8 (každá z nich se může opakovat), která jsou dělitelná dvěma.
2) Je dán čtverec EFGH a na každé jeho straně 2 vnitřní body. Určete počet všech trojúhelníku ABC, jejichž vrcholy leží v daných bodech na různých stranách čtverce EFGH.

Řešení:

1) Aby bylo číslo dělitelné dvěma, musí mít na konci sudou číslici, takže je 5 možností, které můžou být na místě jednotek. Čísla se mohou opakovat, proto na místě desítek můžou být všechny číslice ze zadání příkladu, takže $n_2 = 7$. Na místě stovek může být jakákoli číslice kromě nuly, takže $n_3 = 6$.

   $x = 5 \cdot 7 \cdot 6 = 210$
2) Vrchol A může zvolit na jakékoli straně, takže pro něj máme $4 \cdot 2$ možnosti, jak ho vybrat. Bod B lze vybrat už jen na třech stranách, takže je $3 \cdot 2$ způsobů, jak ho vybrat. Bod C lze vybrat už jen na dvou stranách, takže je $2 \cdot 2$ způsobů, jak ho vybrat. Ale šest uspořádaných trojic takto vybraných trojúhelníků určuje stejný trojúhelník. Takže musíme daný počet vydělit šesti.

   $$x = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{6} = 32$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení: 1) Počet čísel je 210. 2) Počet trojúhelníků je 32.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, ve kterých se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou a které jsou dělitelné
   a) 5 [5712]
   b) 4 [6720]
2) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, která jsou dělitelná
   a) 5 [1980]
   b) 4 [2250]
3) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel větších než 2000, která jsou dělitelná
   a) 2 [3981]
   b) 10 [781]
4) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel menších než 8000, ve kterých se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou a která jsou dělitelná 5. [728]
5) Je dán čtverec XYVW a na každé jeho straně 5 vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníku ABC, jejichž vrcholy leží v daných bodech na různých stranách čtverce XYVW. [500]
6) Je dán čtverec XYVW a na každé jeho straně $(n+1)$ vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníku ABC, jejichž vrcholy leží v daných bodech na různých stranách čtverce XYVW. [$4n^3+12n^2+16n+8$]
7) Je dán pětiúhelník EFGHI a na každé jeho straně je 6 vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků XYZ, jejichž vrcholy leží v daných bodech na různých stranách pětiúhelníku EFGHI. [2 160]
8) Je dán pětiúhelník EFGHI a na každé jeho straně je m vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků XYZ, jejichž vrcholy leží v daných bodech na různých stranách pětiúhelníku EFGHI. [$10\,m^3$]

Souhrnné příklady k procvičení

1) Určete počet všech trojciferných čísel, ve kterých se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou a která mají na místě desítek 0.
   a) Počítejte pomocí kombinatorického pravidla součtu. [72]
   b) Počítejte pomocí kombinatorického pravidla součinu. [72]
2) Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8x8 vybrat dvě různobarevná políčka? Kolika způsoby to lze udělat tak, aby obě neležela ve stejné řadě ani ve stejném sloupci. [1 024,768]
3) Mějme čtverec o straně 3, který je rozdělen rovnoběžkami se stranami na 9 jednotkových čtverců. Určete kolik je v daném obrazci čtverců. [14]
4) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis je složen z číslic 1, 2, 3, 4, 5 (každá se může opakovat), která jsou dělitelná
   a) dvěma [250]
   b) pěti [125]
5) Z místa P do Q vedou dvě různé trasy, z místa Q do R vede šest různých tras. Určete, kolika způsoby lze vybrat trasu
   a) z P do R a zpět. [144]
   b) z P do R a zpět tak, že žádná z těchto osmi tras není použita dvakrát. [60]
   c) z P do R a zpět tak, že právě jedna z těchto osmi tras je použita dvakrát. [132]
   d) z P do R tak, že právě dvě z těchto osmi tras jsou použity dvakrát. [12]

Faktoriál

Faktoriál čísla n (značíme $n!$) je číslo rovné součinu všech kladných celých čísel menších nebo rovných n.

Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Pozn.:

Při úpravách výrazů s faktoriály často využíváme faktu, že platí:

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$

Příklad: Upravte výraz $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!}$

Řešení: Využijeme vztahu, že $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1) \cdot n!-n!}{(n+1)!} = \frac{n! \cdot n}{(n+1)!} = \frac{n! \cdot n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{n}{n+1}$$

Faktoriál

Varianta A

Příklady:

1) Vypočítejte $\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}$

2) Zjednodušte $\dfrac{15!+16!+17!}{18!+17!}$

Řešeni:

1) Využijeme toho, že $5! = 5\cdot 4\cdot 3!$ a $2! = 2\cdot 1$

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$$

2) Využijeme, že $18! = 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15!$, $17! = 17\cdot 16\cdot 15!$ atd., pak vytkneme $15!$ a dopočítáme

$$\frac{15!+16!+17!}{18!+17!} = \frac{15!+16\cdot 15!+17\cdot 16\cdot 15!}{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15!+17\cdot 16\cdot 15!} = \frac{15!\cdot(1+16+17\cdot 16)}{15!\cdot(18\cdot 17\cdot 169+17\cdot 16)} = \frac{289}{5168} = \frac{17}{304}$$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

1) 10

2) $\dfrac{17}{304}$

***Příklady k procvičení*:**

9) Vypočítejte

c) $\frac{4!}{3!}$ [4]

d) $\frac{10!}{6!}$ [5040]

e) $\frac{9!}{7!\cdot 2!}$ [36]

f) $\frac{10!}{8!\cdot 3!}$ [15]

g) $\frac{12!}{11!+11!}$ [6]

h) $\frac{14!}{2!\cdot(10!+10!)}$ [6006]

i) $\frac{12!+12!}{9!\cdot(10!-10!)!}$ [2640]

10) Zjednodušte a vypočtěte

a) $\frac{12!\cdot 8!}{10!\cdot 9!}$ $\left[\frac{44}{3}\right]$

b) $\frac{2!\cdot 8!\cdot 10!}{10!\cdot 4!\cdot 6!}$ $\left[\frac{14}{3}\right]$

c) $\frac{4!+4!+6!}{6!+8!}$ $\left[\frac{16}{855}\right]$

d) $\frac{10!+11!-9!}{12!+11!+4\cdot 10!}$ $\left[\frac{17}{210}\right]$

e) $\frac{3\cdot 7!}{8!+0!\cdot 6!+9!}$ $\left[\frac{7}{187}\right]$

f) $\frac{10\cdot 6!}{8!+5\cdot 6!+9!}$ $\left[\frac{2}{113}\right]$

g) $\frac{5\cdot 3!}{6!}+\frac{2!}{7!}$ $\left[\frac{53}{1260}\right]$

h) $\frac{8\cdot 3!}{4!\cdot 2!}+\frac{4!}{5!}$ $\left[\frac{6}{5}\right]$

Faktoriál

Varianta B

Příklady:

1) Zjednodušte. Předpokládejte přípustné hodnoty proměnných.

$$\frac{1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}-\frac{1}{(n-1)!}$$

2) Řešte rovnici v množině N.

$$10\cdot(n+1)!=2(n+2)!$$

Řešení:

1) Rozložíme $(n+1)!=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$ a $n!=n\cdot(n-1)!$ převedeme na společného jmenovatele a dopočítáme.

$$\frac{1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}-\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{n\cdot(n-1)!}+\frac{n}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}-\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$=\frac{(n+1)+n-n\cdot(n+1)}{(n+1)!}=\frac{n-n^2+1}{(n+1)!}$$

2) $10\cdot(n+1)!=2(n+2)!$ $\quad / 2\cdot(n+2)!$

$$\frac{5\cdot(n+1)!}{(n+2)\cdot(n+1)!}=1$$ využijeme, že $(n+2)!=(n+2)\cdot(n+1)!$

$$\frac{5}{n+2}=5$$ dopočítáme

$$5=n+2$$

$$n=3$$

Zk.: pro $n=3$

$L=10\cdot 4!=240$ $\quad P=2\cdot 5!=240$ $\quad L=P$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $\dfrac{n-n^2+1}{(n+1)!}$

2) $n_1=3$

***Příklady k procvičení*:**

1) Zjednodušte, předpokládejte přípustné hodnoty proměnných

a) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$ $[n+2]$

b) $\frac{n!}{(n-1)!}$ $[n]$

c) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!}$ $\left[\frac{1}{2n+1}\right]$

d) $\frac{(n+2)!}{(n^2+3n+2)}$ $[n!]$

e) $\frac{(n+2)!}{(n+3)!}+\frac{(n+1)!}{(n+3)!}$ $\left[\frac{1}{n+2}\right]$

f) $\frac{(4n)!}{(4n+1)!}+\frac{(4n)!}{(4n-1)!}$ $\left[\frac{16n^2+4n+1}{4n+1}\right]$

g) $\frac{1}{n}-\frac{n!}{(n-1)\cdot(n-2)!}$ $\left[\frac{(1-n)\cdot(1+n)}{n}\right]$

h) $2\cdot\frac{n!}{(n-3)!}+\frac{2\cdot(n+1)!}{(n-1)!}$ $[2n^3-2n^2]$

i) $\frac{(n!)^2}{(n+1)!}+\frac{(n-1)}{4}$ $[4n\cdot(n-2)!+n-1]$

j) $\frac{n!}{(n+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+2)!}+\frac{1}{n^2+3n+2}$ $\left[\frac{2}{n+1}\right]$

k) $\frac{3n+3}{(3n+3)!}+\frac{3n+4}{(3n+4)!}-\frac{(3n+5)\cdot(3n+4)}{(3n+5)!}$ $\left[\frac{1}{3n+2}\right]$

l) $\frac{(n^2-1)\cdot(n-2)!}{(n+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+2)!}-\frac{(n-1)!}{n!}$ $\left[\frac{1}{n+2}\right]$

m) $\frac{n!}{(n+1)!}\div\frac{(n+1)!}{2n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ $\left[\frac{1-n}{(n+1)^2}\right]$

n) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+2)!}\div\frac{(n-1)!}{(n+1)!}-\frac{(n-1)!}{(n-2)!\cdot(n+1)}$ $\left[\frac{2n+1}{n^2+1}\right]$

2) Řešte rovnice v množině N

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}=3(n-2)$ $[3]$

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+1)!}{2\cdot(n+2)!}=\dfrac{n}{2}$ $[NŘ]$

c) $\dfrac{x!}{(x-2)!}=3x$ $[4]$

d) $\dfrac{(x-5)!+(x-3)!}{(x-4)!}=3$ $[5]$

e) $4\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}-4n=8$ $[4]$

f) $(n+1)!+25\cdot(n-1)!=n!$ $[5]$

Faktoriál

Varianta C

Příklady:

1) Vyjádřete pomocí faktoriálu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

2) Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty n platí:

$$n \cdot n! - n \cdot (n-1)! + 3 \cdot (n+1)! - n^2 \cdot (n-1)! = (n-1)! \cdot (3n^2 + 2n)$$

Řešení:

1) Nejprve musíme rozšířit výrazem $\frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, čitatel je po rozšíření roven $n!$, jmenovatel je po rozšíření roven $(n-k)!$.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$
$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2) Upravíme levou stranu rovnice.

$$n \cdot n! - n \cdot (n-1)! + 3 \cdot (n+1)! - n^2 \cdot (n-1)! =$$
$$n \cdot n \cdot (n-1)! - n \cdot (n-1)! + 3 \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) - n^2 \cdot (n-1)! =$$
$$n \cdot (n-1)! \cdot (n - 1 + 3(n+1) - n) = n \cdot (n-1)! \cdot (3n+2) = (n-1)! \cdot (3n^2 + 2)$$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:
1) $\frac{n!}{(n-k)!}$
2) Platí

***Příklady k procvičení*:**

1) Vyjádřete pomocí faktoriálu

   a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 4$ $\left[\dfrac{10!}{3!}\right]$

   b) $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 50$ $\left[\dfrac{100!}{49!}\right]$

   c) $990 \cdot \ldots \cdot 6$ $\left[\dfrac{11!}{5!}\right]$

   d) $(A+B) \cdot (A+B-1) \cdot (A+B-2) \cdot \ldots \cdot (A+B-k+1)$ $\left[\dfrac{(A+B)!}{(A+B-k)!}\right]$

2) Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty n platí

   a) $n^2 \cdot [n!+(n-1)!] = n \cdot (n+1)!$

   b) $n \cdot n!+n^2 \cdot (n-1)! = n \cdot (n+1)!$

   c) $(2n+1)!-(2n)! = (2n)! \cdot 2n$

   d) $\dfrac{(n+1)!}{n} - \dfrac{n!}{n} = n!$

   e) $n!+(n-1)!+(n+1)! = (n-2)! \cdot (n+1) \cdot (n^2-1)$

   f) $n!-(n-1)!-(n-2)! = n \cdot (n-2)^2 \cdot (n-3)$

   g) $n \cdot n!+n^2 \cdot n!-n \cdot (n+1)!+n! = n!$

Souhrnné příklady k procvičení

1) Upravte na společného jmenovatele

a) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ $\left[\frac{5}{4!}\right]$

b) $\frac{12}{7!}-\frac{6}{8!}$ $\left[\frac{90}{8!}\right]$

c) $\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}-\frac{6}{7!}$ $\left[\frac{197}{7!}\right]$

d) $\frac{5}{4!}+3\cdot\frac{2}{2!}-1$ $\left[\frac{53}{4!}\right]$

2) Zjednodušte a určete podmínky

a) $\frac{(n+2)!}{n!}$ $[(n+2)\cdot(n+1), n\in N, n\geq 0]$

b) $\frac{(n+2)!}{(n-2)!}$ $[(n+2)\cdot(n+1)\cdot n, n\in N, n\geq 2]$

c) $\frac{(n-40)!}{(n-39)!}$ $\left[\frac{1}{n-39}, n\in N, n\geq 40\right]$

d) $\frac{(4n)!}{(4n-1)!}$ $[4n, n\in N, n\geq 1]$

e) $\frac{n}{(n-4)!}-\frac{2}{(n-5)!}$ $\left[\frac{8-n}{(n-4)!}, n\in N, n\geq 5\right]$

f) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!}-\frac{n!}{(n-1)!}$ $[-1, n\in N, n\geq 2]$

g) $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}-\frac{n!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+1)!}$ $\left[\frac{2}{n+2}, n\in N\right]$

3) Řešte v N nerovnice

a) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\geq 4$ $[n\geq 2]$

b) $\frac{(n+1)!}{n!}+\frac{n!}{(n-1)!}\geq 5$ $[n\geq 2]$

c) $\frac{(n+2)!}{n!}\geq 2\cdot\frac{n!}{(n-2)!}+6$ $[4\geq n\geq 2]$

d) $(n-2)!+n!\leq 3\cdot(n-1)!$ $[n=2]$

Kombinační číslo

Vlastnosti kombinačních čísel

Pro všechna nezáporná celá čísla $n,k \quad k \leq n$, je $\quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Symbol $\binom{n}{k}$ se nazývá ***kombinační číslo*** a čteme ho „*en* nad *ká*“

Kombinační číslo určuje počet všech k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny

Pro všechna nezáporná celá čísla n,k , $k \leq n$ platí: $\quad \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{n-k}} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$

Pro všechna nezáporná čísla n,k , $k+1 \leq n$ platí: $\quad \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k+1}} = \binom{\mathrm{n+1}}{\mathrm{k+1}}$

Příklad: Dokažte tvrzení:

Pro všechna nezáporná čísla n,k , $k+1 \leq n$ platí: $\quad \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k+1}} = \binom{\mathrm{n+1}}{\mathrm{k+1}}$

Řešení: Kombinační čísla napíšeme ve tvaru zlomku dle definice kombinačního čísla, faktoriály upravíme tak, abychom dostali zlomek ve tvaru $\dfrac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!}$,

který lze opět podle definice napsat ve tvaru kombinačního čísla $\binom{\mathrm{n+1}}{\mathrm{k+1}}$.

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} + \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k+1}} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k!)} + \frac{n!}{[n-(k+1)]! \cdot (k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)! + n! \cdot (n-k)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} =$$

$$\frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{\mathrm{n+1}}{\mathrm{k+1}}$$

Tvrzení je dokázané.

Vlastnosti kombinačních čísel

Varianta A

***Příklady*:**

Nechť $n \in N_0$, spočítejte

1) $\binom{10}{2}$ 2) $\binom{n}{0}$ 3) $\binom{0}{0}$ 4) $\binom{6}{4}+\binom{6}{5}$

Řešení:

1) Upravíme na zlomek dle definice kombinačního čísla, dopočítáme.

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = 5\cdot 9 = 45$$

2) Upravíme na zlomek dle definice kombinačního čísla, dopočítáme

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\cdot n!} = 1$$

3) Upravíme na zlomek dle definice kombinačního čísla, dopočítáme

$$\binom{0}{0} = \frac{0!\cdot 0!}{0!} = 1$$

4) Nejprve využijeme, že platí $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, pak upravíme na zlomek podle definice kombinačního čísla a dopočítáme.

$$\binom{6}{4}+\binom{6}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:
1) 45
2) b) 1
3) 1
4) 21

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočítejte

a) $\binom{12}{3}$ $[220]$

b) $\binom{6}{2}+\binom{5}{2}$ $[25]$

c) $\binom{7}{5}+\binom{7}{6}$ $[28]$

d) $\binom{16}{2}+\binom{16}{13}$ $[680]$

e) $\binom{9}{6}-\binom{8}{6}$ $[56]$

f) $\left(\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{7}{6}+\binom{7}{7}}\right)$ $\left[\dfrac{21}{8}\right]$

g) $\left(\dfrac{\binom{5}{2}+\binom{5}{4}}{\binom{4}{2}}\right)$ $\left[\dfrac{5}{2}\right]$

h) $\left(\dfrac{\binom{11}{9}-\binom{11}{2}}{\binom{11}{2}}\right)$ $[0]$

i) $\left(\dfrac{\binom{6}{3}-\binom{5}{2}}{\binom{3}{2}+\binom{2}{1}}\right)$ $[2]$

j) $\left(\binom{5}{3}+\binom{5}{1}\right)-\left(\binom{6}{4}-\binom{7}{4}\right)$ $[35]$

2) Zjednodušte, předpokládejte přípustné hodnoty x

a) $\binom{x}{1}$ $[x]$

b) $\binom{x}{2}$ $\left[\frac{x^2-x}{2}\right]$

c) $\binom{x}{x-2}$ $\left[\frac{x^2-x}{2}\right]$

d) $\binom{x-1}{x-3}$ $\left[\frac{x^2-3x+2}{2}\right]$

e) $\binom{x+50}{x+48}$ $\left[\frac{x^2+99x+2450}{2}\right]$

f) $\binom{x+3}{x+1}+\binom{x+2}{x+1}$ $\left[\frac{x^2+7x+10}{2}\right]$

g) $2\cdot\binom{x+7}{x+5}-\binom{x}{1}$ $\left[x^2+12x+42\right]$

h) $\binom{x+5}{x+3}-\binom{x+4}{x+2}$ $[x+4]$

i) $\left(\frac{\binom{x+1}{x}}{\binom{x}{1}+\binom{x}{0}}\right)$ $[1]$

j) $\frac{2}{x}\cdot\binom{x}{1}\cdot\binom{x}{2}-\left(\binom{x}{0}+\binom{x}{1}\right)$ $\left[x^2-2x-1\right]$

Vlastnosti kombinačních čísel

Varianta B

***Příklady*:**

1) Vyjádřete jediným kombinačním číslem

a) $\binom{20}{4}+\binom{20}{15}+\binom{21}{4}$

b) $\binom{9}{9}+\binom{10}{9}+\binom{11}{9}+\binom{12}{9}+\binom{13}{9}$

2) Řešte v N

$\binom{x}{2}+\binom{x}{x-1}=3$

Řešení:

1)

a) Podle vztahu $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ platí, že $\binom{20}{15}=\binom{20}{5}$, dále využijeme toho, že platí

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{20}{4}+\binom{20}{15}+\binom{21}{4}=\binom{20}{4}+\binom{20}{5}+\binom{21}{4}=\binom{21}{5}+\binom{21}{4}=\binom{22}{5}$$

b) $\binom{9}{9}=1=\binom{10}{10}$, v dalších úpravách využíváme vztahu $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{9}{9}+\binom{10}{9}+\binom{11}{9}+\binom{12}{9}+\binom{13}{9}=\left[\binom{10}{10}+\binom{10}{9}\right]+\binom{11}{9}+\binom{12}{9}+\binom{13}{9}=$$

$$=\left[\binom{11}{9}+\binom{11}{10}\right]+\binom{12}{9}+\binom{13}{9}=\left[\binom{12}{9}+\binom{12}{10}\right]+\binom{13}{9}=\binom{13}{9}+\binom{13}{10}=\binom{14}{10}$$

2) Kombinační čísla v rovnici upravíme podle definice kombinačního čísla, úpravou faktoriálů dojdeme ke kvadratické rovnici.

$$\binom{x}{2}+\binom{x}{x-1}=3$$

$$\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}+\frac{x!}{(x-1)!\cdot 1!}=3$$

$$\frac{x\cdot(x-1)}{2}+x=3$$

$$x^2+x-6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$$

$x_1=2$

$x_2=-3$ není z oboru přirozených čísel

Zk. pro $x_1=2$

$L(2)=\binom{2}{2}+\binom{2}{1}=1+2=3$ $\qquad$ $P(2)=3$ $\qquad$ $L(2)=P(2)$

$x_1=2$ je řešení rovnice

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Výsledky řešení:

1)

a) $\binom{22}{5}$

b) $\binom{14}{10}$

2) $x_1=2$

***Příklady k procvičení*:**

1) Vyjádřete jedním kombinačním číslem

a) $\binom{5}{4}+\binom{5}{2}$ $\left[\binom{6}{4}\right]$

b) $\binom{5}{4}+\binom{5}{3}+\binom{7}{4}$ $\left[\binom{7}{5}\right]$

c) $\binom{6}{2}+\binom{6}{1}+\binom{6}{5}+\binom{6}{2}$ $\left[\binom{8}{3}\right]$

d) $\binom{7}{7}+\binom{8}{7}+\binom{9}{7}+\binom{10}{7}$ $\left[\binom{11}{8}\right]$

e) $\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}+\binom{9}{4}$ $\left[\binom{10}{6}\right]$

f) $\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\ldots+\binom{50}{1}+\binom{51}{50}+\binom{52}{51}$ $\left[\binom{53}{2}\right]$

2) Řešte v N rovnice

a) $\binom{6}{3}\cdot x=\binom{10}{3}$ $[x=6]$

b) $\binom{x+5}{x+3}-\binom{x+4}{x+2}=10$ $[x=6]$

c) $\binom{x-1}{x-3}=3$ $[x=4]$

d) $\binom{x+3}{x+1}+\binom{x+2}{x+1}=5$ $[x=0]$

e) $2\cdot\binom{x+7}{x+5}-\binom{x}{1}=7x+48$ $[x=1]$

f) $\binom{4}{1}\cdot\binom{x+1}{x-1}+6\cdot\binom{3}{1}=\binom{x+1}{x}\cdot\binom{5}{2}$ $[x=2]$

g) $\frac{1}{2}\cdot\binom{x+8}{x+7}-\binom{x}{1}=\frac{1}{5}\cdot\binom{x+1}{x}\cdot\binom{x}{x-1}$ $[x=5]$

h) $\binom{x+1}{2}+\binom{x}{2}=4\cdot\binom{n+1}{n+1}$ $[x=2]$

Vlastnosti kombinačních čísel

Varianta C

***Příklad*:**

Nechť je dáno následující schéma

$$
\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \\
n=k & \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \binom{k}{k-1} & & \binom{k}{k}
\end{array}
$$

Toto schéma se nazývá ***Pascalův trojúhelník***.

Napište pátý řádek Pascalova trojúhelníku.

Řešení:

Jestliže kombinační čísla v tomto schématu vyčíslíme např. pro n=3, dostaneme schéma ve tvaru

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Sobě rovná čísla jsou rozmístěna podle svislé přímky procházející jeho vrcholem. Můžeme vidět, že platí, že součet dvou libovolných sousedních čísel v každém jeho řádku je roven číslu, které se nachází „pod jejich středem" v řádku následujícím. To znamená, že můžeme určit libovolný řádek Pascalova trojúhelníku, známe-li řádek předcházející.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

Pátý řádek Pascalova trojúhelníku: $\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

***Příklady k procvičení*:**

1) Napište

   a) šestý řádek Pascalova trojúhelníku

$$\left[\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}\right]$$

   b) řádek Pascalova trojúhelníků odpovídající n=7

$$\left[\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}\right]$$

   c) (k+1). řádek Pascalova trojúhelníku

$$\left[\binom{k+1}{0}\binom{k+2}{1}\binom{k+3}{2}\cdots\binom{k+1}{k-2}\binom{k+1}{k-1}\binom{7}{k+1}\right]$$

2) Napište devátý řádek Pascalova trojúhelníku, kombinační čísla vyčíslete.

$$[1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1]$$

3) Napište řádek Pascalova trojúhelníku odpovídající n=6, kombinační čísla vyčíslete.

$$[1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1]$$

4) Dopište druhou polovinu 10. řádku Pascalova trojúhelníku: 1 9 36 84 126

$$[1\ 9\ 36\ 84\ 126\ 126\ 84\ 36\ 9\ 1]$$

5) Sedmý řádek Pascalova trojúhelníku je 1 6 15 20 15 6 1. Odvoďte z něj šestý řádek.

$$[1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1]$$

Souhrnné příklady k procvičení

1) Určete, která z následujících kombinačních čísel jsou si rovna, aniž je vyčíslíte.

   a) $\binom{14}{2}, \binom{15}{8}, \binom{15}{4}, \binom{15}{5}, \binom{14}{12}, \binom{15}{11}, \binom{14}{11}$ $\qquad \left[\binom{14}{2} = \binom{14}{12}, \binom{15}{4} = \binom{15}{11}\right]$

   b) $\binom{50}{20}, \binom{51}{21}, \binom{52}{22}, \binom{50}{31}, \binom{51}{30}, \binom{52}{31}, \binom{54}{34}$ $\qquad \left[\binom{51}{21} = \binom{51}{30}\right]$

2) V N řešte nerovnice

   a) $\binom{5}{2} \cdot x \geq \binom{8}{2}$ $\qquad [\ x \in N, \quad x \geq 3]$

   b) $\binom{x+2}{2} - \binom{x}{2} \geq 3$ $\qquad [\ x \in N, \quad x \geq 2]$

   c) $\binom{x}{x-2} \leq 10$ $\qquad [\ x \in N, \quad 2 \leq x \leq 5]$

   d) $\binom{x+1}{2} + \binom{x+4}{2} \leq 51$ $\qquad [\ x \in N, \quad 1 \leq x \leq 5]$

3) Dokažte, že pro všechna nezáporná čísla n, k, $k \leq n$ platí: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

4) Dokažte, že pro všechna nezáporná čísla n,k taková, že k je menší než n platí:.

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

i.

Binomická věta

Pro všechna čísla a, b a každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

Kombinační čísla se nazývají ***binomické koeficienty***.

k-tý člen binomického rozvoje má tvar: $\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$

Příklad: Určete 6. člen binomického rozvoje výrazu $(-2+x)^{10}$.

Řešení: Dosadíme do vzorce pro výpočet k-tého členu binomického rozvoje.

$a=-2,\ b=x,\ k=6,\ n=10$

$$\binom{10}{5}\cdot(-2)^5 x^5 = \frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot 32\cdot x^5 = 9\cdot 7\cdot 4\cdot 32\cdot x^5 = 8064x^5$$

Šestý člen binomického rozvoje je $8064x^5$.

Binomická věta

Varianta A

***Příklady*:**

1) Vypočtěte pomocí binomické věty

   a) $(2+6x)^4$

   b) $2{,}1^3$

2) Určete pátý člen binomického rozvoje výrazu $(a+2i)^8$.

Řešení:

1)

   a) Dosadíme dle definice

$$(2+6x)^4 = \binom{4}{0}\cdot 2^4 + \binom{4}{1}\cdot 2^3\cdot 6x + \binom{4}{2}\cdot 2^2\cdot (6x)^2 + \binom{4}{3}\cdot 2\cdot (6x)^3 + \binom{4}{4}\cdot (6x)^4 =$$

$$= 16 + 192x + 864x^2 + 1728x^3 + 1296x^4$$

   b) Číslo 2,1 lze napsat jako $\left(2+10^{-1}\right)^3$, dále dosadíme dle definice binomické věty a dopočítáme.

$$\left(2+10^{-1}\right)^3 = \binom{3}{0}\cdot 2^3 + \binom{3}{1}\cdot 2^2\cdot 10^{-1} + \binom{3}{2}\cdot 2\cdot \left(10^{-1}\right)^2 + \binom{3}{3}\cdot \left(10^{-1}\right)^3 =$$

$$= 8 + 1{,}2 + 0{,}06 + 0{,}001 = 9{,}261$$

2) Dosadíme do vzorce pro výpočet k-tého členu binomického rozvoje.

   $a=0,\ b=2i,\ k=5,\ n=8$

$$\binom{8}{4}\cdot a^4\cdot (2i)^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot a^4\cdot (-16) = 5\cdot 2\cdot (-16)\cdot a^4 = -1120a^4$$

   Pátý člen binomického rozvoje je $-1120a^4$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1)

   a) $16 + 192x + 864x^2 + 1728x^3 + 1296x^4$

   b) $9{,}261$

2) $-1120a^4$

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte pomocí binomické věty

a) $\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ $\left[208+120\sqrt{3}\right]$

b) $(1+x)^5$ $\left[1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5\right]$

c) $(-a-b)^6$ $\left[a+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6\right]$

d) $\left(\sqrt{6}+2a\right)^4$ $\left[36+48\sqrt{6}a+144a^2+32\sqrt{6}a^3+16a^4\right]$

e) $(2x-3y)^5$ $\left[32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5\right]$

f) $\left(3i+\sqrt{3}\right)^4$ $\left[72\cdot\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right]$

g) $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^4$ $\left[x^4+2x^3y+\dfrac{3}{2}x^2y^2+\dfrac{1}{2}xy^3+\dfrac{y^4}{16}\right]$

h) $\left(x^2-\sqrt{x}\right)^5$ $\left[x^{10}-5x^8\sqrt{x}+10x^7-10x^5\sqrt{x}+5x^4-x\ \sqrt{x}\right]$

2) Vypočtěte pomocí binomické věty

a) $1{,}001^4$ $[1{,}004006004]$

b) $0{,}98^3$ $[0{,}941192]$

c) $2{,}26^3$ $[11{,}543176]$

d) $0{,}014^3$ $[0{,}000002744]$

3) Určete třetí člen binomického rozvoje výrazu

a) $\left(2\sqrt{x}+1\right)^7$ $\left[672x^2\sqrt{x}\right]$

b) $\left(a+\dfrac{c}{2a}\right)^5$ $\left[\dfrac{5ac^2}{2}\right]$

c) $(2y-3i)^{10}$ $\left[-103680\,y^8\right]$

4) Určete pátý člen binomického rozvoje výrazu

a) $\left(5z+w^3\right)^8$ $\left[43750\,z^4w^{12}\right]$

b) $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}\right)^6$ $\left[\dfrac{4860}{x^2y^4}\right]$

c) $\left(i+2\sqrt{2}\right)^7$ $[6720i]$

5) Určete 15. člen binomického rozvoje výrazu

a) $\left(\sqrt[6]{2x}+x\right)^{17}$ $\left[680\,x^{14}\sqrt{2x}\right]$

b) $\left(y-xy\right)^{18}$ $\left[3060\,x^{14}y^{18}\right]$

c) $\left(x+\frac{i}{y}\right)^{16}$ $\left[-\frac{120\,x^{2}}{y^{14}}\right]$

Binomická věta

Varianta B

1) Vypočtěte pomocí binomické věty $(1+x)^3-(1-x)^3$.

2) Který člen binomického rozvoje výrazu $\left(6x^3+\frac{9}{x^6}\right)^{12}$ je absolutní?

Řešení:

1) Dosadíme dle definice

$$(1+x)^3-(1-x)^3=\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\cdot x+\binom{3}{2}\cdot x^2+x^3-\left[\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\cdot(-x)+\binom{3}{2}\cdot(-x)^2+(-x)^3\right]=$$

$$=2\cdot\binom{3}{1}\cdot x+2x^3=6x+2x^3$$

2) Použijeme vzorec pro výpočet k-tého členu binomického rozvoje.

   Absolutní člen je ten, který neobsahuje x.

$$\binom{12}{k-1}\cdot\left(6x^3\right)^{12-(k-1)}\cdot\left(\frac{9}{x^6}\right)^{k-1}$$

$$\binom{12}{k-1}\cdot 6^{13-k}\cdot x^{39-3k}\cdot 9^{k-1}\cdot x^{6-6k}$$

$$\binom{12}{k-1}\cdot 6^{13-k}\cdot 9^{k-1}\cdot x^{45-9k}$$

   Aby nebyla ve výrazu obsažena nula, musí platit: $45-9k=0$.

   $9k=-45$

   $k=5$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

1) $6x+2x^3$
2) Absolutní je pátý člen binomického rozvoje.

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočítejte pomocí binomické věty

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4+\left(1-\sqrt{2}\right)^4$ [4]

b) $(1+i)^3-(1-i)^3$ $[4i]$

c) $(x+2y)^3-(x-2y)^3$ $\left[12x^2y+16y^3\right]$

d) $(1+a)^9+(-1-a)^9$ [0]

e) $(y+2)^4-(y+1)^4$ $\left[4y^3+18y^2+28y+15\right]$

f) $(y+1)^3-(y-2)^3$ $\left[9y^2-9y+9\right]$

2) Určete, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{21}$, je absolutní.

[Absolutní je 15. člen.]

3) Určete, který člen binomického rozvoje $\left(\sqrt{2a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{12}$, je absolutní.

[Absolutní je 7. člen.]

4) Určete, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(\frac{2}{17}y^3+\frac{i}{y}\right)^{13}$,obsahuje

a) y^3 [10. člen]

b) y^{15} [7. člen]

5) Určete, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(ab+\frac{1}{ab^6}\right)^{14}$

a) neobsahuje a [8. člen].

b) neobsahuje b [3. člen]

6) Určete, který člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^2-5x^{-6}\right)^{32}$,

a) je absolutní [9. člen]

b) obsahuje x^{-24} [12. člen]

Binomická věta

Varianta C

1) V binomickém rozvoji výrazu $(x^2+3)^{10}$ určete koeficient členu obsahujícího x^6.
2) S využitím binomické věty vyjádřete jako jedno číslo součet

$$\binom{6}{0}-\binom{6}{1}\cdot+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}.$$

Řešení:

1) Musíme zjistit, který člen obsahuje x^6. Použijeme vzorec pro výpočet k-tého členu binomického rozvoje.

$$\binom{10}{k-1}\cdot\left(x^2\right)^{10-(k-1)}\cdot 3^{k-1}$$

$$\binom{10}{k-1}\cdot x^{22-2k}\cdot 3^{k-1}$$

Koeficient x musí být roven šesti.

$22-2k=6$

$k=8$

$k=8$ dosadíme do téhož vzorce a dopočítáme.

$$\binom{10}{7}\cdot\left(x^2\right)^3\cdot 3^7=\frac{10!}{7!\cdot 3!}\cdot x^6\cdot 3^7=10\cdot 9\cdot 4\cdot 729\cdot x^6=262440x^6$$

Koeficient je 262 440.

2) Je vidět, že daný součet odpovídá binomickému rozvoji $(1-1)^6$.

$$\binom{6}{0}-\binom{6}{1}+\binom{6}{2}-\binom{6}{3}+\binom{6}{4}-\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=(1-1)^6=0^6=0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:
1) Koeficient je 262 440.
2) 0

***Příklady k procvičení*:**

1) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x^5+1\right)^5$ určete koeficient členu obsahujícího

   a) x^8 $[5]$

   b) x^6 $[10]$

2) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x^2-3\right)^8$ určete koeficient členu obsahujícího

   a) x^6 $[-13608]$

   b) x^{10} $[4536]$

3) V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{y^3}{2}+\sqrt{2}\right)^{14}$ určete koeficient členu obsahujícího

   a) y^{24} $\left[\frac{3003}{32}\right]$

   b) y^{15} $\left[1001\sqrt{2}\right]$

4) V binomickém rozvoji výrazu $\left(2y^4-\frac{1}{y^2\sqrt[6]{y^4}}\right)^{13}$ určete koeficient členu obsahujícího

   a) y^{-4} $[-292864]$

   b) y^{-28} $[26]$

5) Nalezněte koeficient členu, který obsahuje x^3 u mnohočlenu $x\cdot(1-x)^5-x^2\cdot(1+x)^4$.

   $[6]$

6) Nalezněte koeficient členu, který obsahuje x^4 u mnohočlenu $\frac{(2x+1)^5}{x}+\left(\sqrt{x}+1\right)^{10}$.

   $[77]$

7) Nalezněte koeficient členu, který obsahuje x^6 u mnohočlenu

   $x^2\cdot(2+x)^5-x^3\cdot(3x+1)^6+\left(x^2+1\right)^7$. [-495]

8) S využitím binomické věty vyjádřete jako jedno číslo součet

a) $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$ [128]

b) $\binom{4}{0}-2\cdot\binom{4}{1}+4\cdot\binom{4}{2}-8\cdot\binom{4}{3}+16\cdot\binom{4}{4}$ [1]

c) $32\cdot\binom{5}{0}-48\cdot\binom{5}{1}+72\cdot\binom{5}{2}-108\cdot\binom{5}{3}+162\cdot\binom{5}{4}-243\cdot\binom{5}{5}$ [−1]

d) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ [2^n]

e) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}$ [0]

f) $\binom{n}{0}+3\cdot\binom{n}{1}+9\cdot\binom{n}{2}+\cdots+3^{n-1}\binom{n}{n-1}+3^n\binom{n}{n}$ [4^n]

g) $\binom{n}{0}-2\cdot\binom{n}{1}+4\cdot\binom{n}{2}-8\cdot\binom{n}{3}+\cdots+(-2)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-2)^n\binom{n}{n}$ [$(-1)^n$]

Souhrnné příklady k procvičení:

1) S využitím binomické věty řešte rovnici

   a) $(y+1)^3-(y-2)^3=9$ $[x_1=0, x_2=1]$

   b) $(x+1)^4-(x-1)^4-2x^2(4x+1)=8$ $[x=2]$

2) V binomickém rozvoji výrazu $(3+2x)^6$ je čtvrtý člen roven číslu 160. Vypočtěte x.

   $\left[x=\frac{1}{3}\right]$

3) V binomickém rozvoji výrazu $\left(1+\frac{1}{y}\right)^{10}$ je třetí člen roven číslu 5. Vypočtěte y.

   $[y=3]$

4) V binomickém rozvoji výrazu $\left(2y+\sqrt{2}\right)^{12}$ je jedenáctý člen roven číslu 528.

   Vypočtěte y. $\left[y=\frac{1}{4}\right]$

5) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x+x^2\right)^n$ určete n tak, aby třetí člen byl tvaru $\frac{15}{4}x^8$.

   $[n=6]$

6) V binomickém rozvoji výrazu $\left(2y+\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^n$ určete n tak, aby sedmý člen byl tvaru

   $215040y$. $[n=10]$

7) Určete počet racionálních členů binomického rozvoje výrazu

   a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{52}$ $[26]$

   b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^6$ $[2]$

8) Určete všechny členy binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[4]{3}\right)^7$, které jsou racionálním číslem. $[420]$

9) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x^2+\frac{1}{5x}\right)^7$ určete člen, který obsahuje x^2, a dále určete pro která x je tento člen roven $\frac{343}{3125}$. $\left[\frac{7}{125}x^2, \pm\frac{7}{5}\right]$

10) V binomickém rozvoji výrazu $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^9$ určete, který člen obsahuje x, a dále určete, pro která $x \in Z$ je tento člen větší nebo roven než -12. $\left[5.\check{c}len, x \in Z \wedge x \geq 0\right]$

11) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x^5+\frac{1}{x^2}\right)^n$ je koeficient u druhého členu 7-krát větší než koeficient u posledního členu. Určete absolutní člen. $[21]$

12) V binomickém rozvoji výrazu $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ je koeficient u druhého členu o 5 větší než koeficient u posledního členu. Určete absolutní člen. $[15]$

13) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^n$ je koeficient u třetího členu 91-krát větší než koeficient u posledního členu. Určete absolutní člen. $[1001]$

14) V binomickém rozvoji výrazu $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ je koeficient u třetího členu o 65 větší než koeficient u posledního členu. Určete absolutní člen. $[495]$

Variace

Nechť je dána neprázdná konečná množina, která má n prvků.
Každá uspořádaná k-tice, sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou, se nazývá **k-členná variace** *(variace k-té třídy)* **z n prvků**.

Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je:

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \text{pro všechna } k \le n$$

Příklad: Určete počet všech přirozených trojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z číslic 0,2,3,5,7 vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Tvoříme uspořádané trojice z pěti různých číslic.

Jejich počet je $V(3,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Nesmíme zapomenout, že je třeba odečíst všechna čísla začínající nulou.

Jejich počet je $V(2,4) = 4 \cdot 3 = 12$

$V(3,5) - V(2,4) = 60 - 12 = 48$

Počet všech trojciferných čísel vyhovujících zadaným podmínkám je 48.

Variace

Varianta A

***Příklady*:**

1) Vytvořte všechny variace druhé třídy z prvků množiny $M = \{x, y, z\}$ tak, že se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.
2) Z kolika různých prvků je možné vytvořit 132 variací druhé třídy?

Řešení:

1) Tvoříme uspořádané dvojice ze tří prvků. Jejich počet bude $V(2,3) = 3 \cdot 2 = 6$

   $[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z]$, $[y, x]$, $[z, x]$, $[z, y]$

2) Použijeme vzorec pro výpočet počtu k-členných variací z n prvků. Sestavíme následující rovnici, kterou upravíme.

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 132$$

$$\frac{n \cdot (n-1)! \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 132$$

$$n \cdot (n-1) = 132 \quad Z$$

$$n^2 - n - 132 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+528}}{2}$$

$$n_1 = 12$$

$$n_2 = -11$$

Záporný počet prvků je nesmysl.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z]$, $[y, x]$, $[z, x]$, $[z, y]$
2) 132 variací 2. třídy je možné vytvořit z 12 prvků.

Příklady k procvičení:

1) Vytvořte všechny uspořádané trojice z prvků množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ tak, že se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

[[1,2,3],[1,2,4],[1,3,2],[1,3,4],[1,4,2], [1,4,3],[2,1,3],[2,1,4],[2,3,1],[2,3,4], [2,4,1],[2,4,3],[3,1,2],[3,1,4],[3,2,1], [3,2,4],[3,4,1],[3,4,2],[4,1,2],[4,1,3], [4,2,1],[4,2,3],[4,3,1],[4,3,2]]

2) Kolik variací páté třídy je možné sestavit z osmi různých prvků? [6720]
3) Kolik uspořádaných čtveřic lze vytvořit z třiceti různých prvků, jestliže se v nich žádný prvek neopakuje? [24 387]
4) Z kolika různých prvků lze vytvořit 30 521 variací první třídy? [30 521]
5) Z kolika různých prvků lze vytvořit 1722 variací druhé třídy? [42]
6) Určete počet prvků, z nichž lze utvořit
   a) 272 dvoučlenných variací. [17]
   b) 1122 dvoučlenných variací. [34]
7) Určete počet prvků, jestliže počet variací druhé třídy bez opakování je 25 krát menší než počet variací třetí třídy bez opakování. [27]
8) Z kolika prvků lze vytvořit 4 krát více variací čtvrté třídy než variací třetí třídy? [7]
9) Určete počet prvků, z nichž lze utvořit
   a) 56 krát více čtyřčlenných variací než dvoučlenných variací. [10]
   b) 30 krát méně variací třetí třídy než variací páté třídy. [9]
10) Zvětšíme-li počet prvků o jeden, zvětší se počet variací třetí třídy bez opakování o 330. Určete původní počet prvků. [11]
11) Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet dvoučlenných variací z těchto prvků
    a) o 26
    b) 2,1 krát

    Určete původní počet prvků. [a) 6, b) 5]
12) Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet variací čtvrté třídy 3 krát. Určete původní počet prvků. [10]
13) Zmenší-li se počet prvků o 2, zmenší se počet variací druhé třídy z těchto prvků vytvořených o 38. Určete původní počet prvků. [11]

Variace

Varianta B

***Příklady*:**

1) Kolik různých trojciferných přirozených čísel dělitelných deseti lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jestliže se žádná číslice neopakuje.
2) Mistrovství světa v hokeji se účastní 16 mužstev, Kolik různých umístění může být na prvních třech místech.

Řešení:

1) Čísla dělitelná deseti musí mít na konci nulu, takže sestavujeme uspořádané dvojice z devíti prvků.

   Jejich počet je $V(2,9) = \frac{9!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$

2) Máme vytvořit uspořádané trojice z 16 prvků.

   Jejich počet je $V(3,16) = \frac{16!}{13!} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) Počet všech trojciferných přirozených čísel dělitelných deseti je 72.
2) Na prvních třech místech může být 3360 různých umístění.

***Příklady k procvičení*:**

1) Kolik různých dvojciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 2, 4, 6, 8, jestliže se žádná číslice neopakuje. [$V(2,4)=12$]
2) Kolik různých trojciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 1, 3, 5, 7, 9, jestliže se žádná číslice neopakuje. [$V(3,5)=60$]
3) Kolik je čtyřciferných přirozených čísel s různými ciframi, jestliže tato čísla neobsahují cifry 0,2,4. [$V(4,7)=840$]
4) Kolik je trojciferných přirozených dvojkou dělitelných čísel s různými ciframi, jestliže tato čísla neobsahují cifry 0, 4, 6, 8. [$V(2,5)=20$]
5) Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 6, 7, jestliže se žádná číslice neopakuje a na místě desítek je šestka. [$V(3,5)=60$]
6) Kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 5, 7, 9 tak, aby se žádná číslice neopakovala. Kolik jich je dělitelných dvěma? [$V(4,6)=360$, $V(3,5)=60$]
7) Kolika způsoby lze rozdělit tři medaile mezi 28 účastníků soutěže v orientačním běhu? [$V(3,28)=19656$]
8) V hokejové extralize je 14 mužstev. Kolika způsoby může být na konci ligového ročníku obsazeno první, druhé a třetí místo. [$V(3,14)=2184$]
9) V anglické první fotbalové lize hraje 20 mužstev, z nichž se do ligy mistrů mají možnost kvalifikovat první čtyři. Kolika způsoby může být na konci soutěže obsazeno první, druhé, třetí a čtvrté místo? [$V(4,20)=116280$]
10) V zastupitelstvu zasedá 20 lidí. Kolika způsoby můžeme zvolit starostu a místostarostu? [$V(2,20)=380$]
11) V senátu zasedá 81 senátorů. Kolika způsoby lze zvolit předsedu a místopředsedu? [$V(2,81)=6480$]
12) Pavel chce mít každou stěnu v pokoji nabarvenou jinou barvou. K dispozici má 8 různých barev (bílou, modrou, žlutou, černou, červenou, modrou, zelenou, oranžovou). Kolika způsoby, může vymalovat obývací pokoj, jestliže stěnu, která je naproti oknu, chce mít vymalovaný bílou barvou. [$V(3,7)=210$]
13) K otevření trezoru je třeba znát šestimístný číselný kód. Kolik existuje možností, jak kód sestavit, jestliže se žádná číslice neopakuje. [$V(6,10)=151200$]

14) K otevření trezoru je třeba znát šestimístný číselný kód. Kolik existuje možností, jak kód sestavit, jestliže se žádná číslice neopakuje a kód je dělitelný padesáti. [$V(4,8) = 1680$]

15) Do stojanu na CD a DVD se vejde 30 CD nebo DVD. Kolika způsoby do něj lze dát 5 různých CD? [$V(5,30) = 17100720$]

16) Čtyři přátele si slíbili, že si každý rok o Vánocích pošlou pohlednici. Kolik pohlednic bylo rozesláno? [$V(2,4) = 12$]

Variace

Varianta C

***Příklady*:**

1) Na parkovišti je pět řad parkovacích míst. Do každé řady se vejdou čtyři auta. Dvě místa v první řadě jsou rezervována pro handicapované. Kolika způsoby může zaparkovat šest různých aut, jestliže pan Slabozraký bude parkovat na místě pro handicapované. (Nikdo jiný na místě pro handicapované parkovat nebude).
2) Kolik různých přirozených čísel větších než 100 a menších než 12 000 lze utvořit tak, aby se v jejich dekadickém zápisu žádná číslice neopakovala?

Řešení:

1) Pan Slabozraký má dvě možnosti, jak zaparkovat, zbytek aut může parkovat na kterémkoli z dalších 18 míst. Takže budeme tvořit uspořádané pětice z osmnácti prvků, které vynásobíme dvěma.

$$2 \cdot V(5,18) = 2 \cdot \frac{18!}{13!} = 2 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 = 2056320$$

2) Sestavujeme troj a čtyř a pěticiferná čísla z desíti číslic.

   Počet všech trojciferných číslic větších než 100, která nezačínají nulou je $V(3,10) - V(2,9)$

   Počet všech čtyřciferných číslic, která nezačínají nulou je $V(4,10) - V(3,9)$

   Pěticiferná čísla musí být menší než 12 000, takže musí začínat jedničkou a na místě tisícovek musí být nula. Počet takových pěticiferných čísel je $V(3,8)$

$$V(3,10) - V(2,9) + V(3,10) - V(2,9) + V(3,8) = \frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!} + \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} + \frac{8!}{4!} = 648 + 4536 + 336 = 5520$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) Auta mohou zaparkovat 2 056 320 způsoby.
2) Je možno sestavit 5520 takových čísel.

***Příklady k procvičení*:**

1) Kolik čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7. $[V(7{,}4) - V(6{,}3) = 720]$
2) Kolik různých přirozených nejvýše trojmístných čísel s různými číslicemi lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. $[7 + V(8{,}2) - V(7{,}1) + V(8{,}3) - V(7{,}2) = 350]$
3) Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer přirozených čísel, která jsou čtyřmístná sudá. $[2 \cdot V(4{,}3) = 48]$
4) Určete počet všech přirozených čísel menších než 358, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 3, 5, 7, 9, každá nejvýše jednou. $[4 + V(4{,}2) + 1 = 17]$
5) Určete počet všech přirozených čísel menších než 476, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 3, 5, 7, 9, každá nejvýše jednou. $[V(3{,}2) + 4 + V(4{,}2) = 22]$
6) Určete počet všech lichých trojciferných přirozených čísel s různými číslicemi, jejichž dekadický zápis je tvořen z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 6. $[2 \cdot V(5{,}2) - 2 \cdot V(4{,}1) = 32]$
7) Určete počet všech sudých trojciferných čísel s různými číslicemi, jejichž dekadický zápis je tvořen z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 6. $[3 \cdot V(5{,}2) - 3 \cdot V(4{,}1) + V(5{,}2) = 68]$
8) O telefonním čísle víme, že je devítimístné, neobsahuje žádné dvě stejné číslice, nezačíná nulou a je dělitelné 20. Kolik telefonních čísel přichází v úvahu. $[4 \cdot V(7{,}8) = 161280]$
9) Ve třídě 3. B je 18 lavic, které jsou uspořádány do šesti řad po třech lavicích. Do každé lavice se můžou posadit dva studenti. Kolika způsoby lze rozmístit 30 studentů, jestliže
   a) Marek a Kamila budou sedět spolu. $[2 \cdot V(36{,}29) = 1{,}476 \cdot 10^{37}]$
   b) Radek chce sedět v první řadě. $[6 \cdot V(35{,}29) = 8{,}61 \cdot 10^{37}]$
   c) Lucie nechce sedět s Honzou. $[V(306) - 36 \cdot V(28{,}34) = 5{,}02 \cdot 10^{38}]$
   d) Karolína nechce sedět v poslední řadě. $[30 \cdot V(35{,}29) = 4{,}306 \cdot 10^{38}]$
10) V chemické učebně je 15 lavic, které jsou spořádány do pěti řad po třech lavicích. Do každé lavice se můžou posadit dva studenti. Kolika způsoby lze rozmístit 13 studentů tak,
   a) aby každý seděl v lavici sám. $[2 \cdot V(13{,}15) = 1{,}308 \cdot 10^{12}]$
   b) aby druhá a čtvrtá řada byla prázdná. $[V(13{,}18) = 5{,}34 \cdot 10^{13}]$
   c) aby Petr a Libor neseděli spolu. $[V(13{,}30) - 30 \cdot V(11{,}28) = 7{,}2 \cdot 10^{17}]$
   d) aby Hanka seděla v první řadě v prostřední lavici. $[2 \cdot V(12{,}29) = 4{,}972 \cdot 10^{16}]$

Permutace

Permutace z n prvků *je uspořádaná* n*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Počet $P(n)$ všech k-členných permutací z n prvků je:

$$P(n) = n!$$

Příklad: Kolika způsoby lze zamíchat balíček 32 karet?

Řešení: Rozlišujeme čísla i barvy, takže budeme tvořit uspořádané 32-tice z 32 prvků.

Jejich počet je $P(32) = 32! = 2{,}63 \cdot 10^{35}$

Karty lze zamíchat $2{,}63 \cdot 10^{35}$ způsoby.

Permutace

Varianta A

***Příklady*:**

1) Vytvořte všechny uspořádané trojice z prvků množiny $M = \{A, B, C\}$ tak, aby se žádný prvek neopakoval.
2) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, která lze sestavit z číslic 1,2,3,4 tak, aby se žádná číslice neopakovala.

Řešení:

1) Jedná se o permutaci ze tří prvků, počet takových trojic bude $P(3) = 3! = 3 \cdot 2 = 6$

   $[A, B, C]_,\ [A, C, B]_,\ [B, A, C]_,\ [B, C, A]_,\ [C, A, B]_,\ [C, B, A]$
2) Tvořím uspořádané čtveřice ze čtyř prvků

   Jejich počet je $P(4) = 4! = 24$

   Počet všech čtyřciferných čísel sestavených z daných číslic je 24.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $[A, B, C]_,\ [A, C, B]_,\ [B, A, C]_,\ [B, C, A]_,\ [C, A, B]_,\ [C, B, A]$
2) Počet všech čtyřciferných čísel sestavených z daných číslic je 24.

***Příklady k procvičení*:**

1) Vytvořte všechny uspořádané dvojice z prvků množiny $M = \{1, 2\}$ tak, aby se žádný prvek neopakoval. [[1, 2],[2, 1]]
2) Vytvořte všechny uspořádané čtveřice z prvků množiny $M = \{w, x, y, z\}$ tak, aby se žádný prvek neopakoval. [[w, x, y, z],[w, x, z, y],[w, y, x, z],[w, y, z, x], [w, z, x, y],[w, z, y, x],[x, w, y, z],[x, w, z, y], [x, y, w, z],[x, y, z, w],[x, z, w, y],[x, z, y, w], [y, w, x, z],[y, w, z, x],[y, x, w, z],[y, x, z, w], [y, z, w, x],[y, z, x, w],[z, w, x, y],[z, w, y, x], [z, x, w, y],[z, x, y, w],[z, y, w, x],[z, y, x, w]]
3) Kolik permutací bez opakování je možné sestavit z pěti různých prvků? [120]
4) Kolik uspořádaných osmic lze vytvořit z osmi různých prvků tak, aby se žádný prvek neopakoval? [40 320]
5) Kolik šesticiferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, jestliže se v žádném čísle nemá opakovat žádná číslice. [720]
6) Kolik čtyřciferných přirozených čísel je možné sestavit z číslic 2, 4, 6, 8, jestliže se v žádném čísle nemá opakovat žádná číslice. [24]
7) Kolik čtyřciferných přirozených čísel dělitelných pěti je možné sestavit z číslic,
   a) 0, 2, 4, 6,
   b) 4, 5, 6, 7,

   jestliže se v žádném čísle nemá opakovat číslice. [a) 6, b) 6]
8) Kolik pěticiferných přirozených lichých čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 4, 6, 8, jestliže v jejich dekadickém zápisu jsou každé dvě číslice různé. [24]
9) Kolika způsoby lze postavit do řady 15 vojáků? [$1{,}308 \cdot 10^{12}$]
10) Ve třídě 4.A je 30 míst a v plném počtu 30 studentů. Kolika způsoby lze sestavit zasedací pořádek? [$2{,}62 \cdot 10^{32}$]
11) Na vědecké konferenci má vystoupit 7 různých vědců. Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení. [5 040]

12) Kolik různých slov majících i nemajících smysl lze vytvořit z písmen slova

a) FLORIDA [5 040]

b) JUDITA [720]

c) KNIHA [120]

13) Závod v triatlonu má 52 účastníků. Určete počet všech možných výsledků této soutěže, jestliže

a) všichni závod dokončí. [$8{,}07 \cdot 10^{67}$]

b) polovina závodníků závod vzdá. [$4{,}03 \cdot 10^{26}$]

Permutace

Varianta B

***Příklady*:**

1) Zvětší -li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací bez opakování z těchto prvků 20 krát. Určete původní počet prvků.
2) Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova KOMBINACE tak, aby v tomto přemístění nějaká skupina po sobě jdoucích písmen tvořila slovo EMA.

Řešení:

1) Dle zadání vytvoříme rovnici $P(n+2)=20P(n)$, kterou vyřešíme. Řešení musí být přirozené číslo.

   $P(n+2)=20\cdot P(n)$

   $(n+2)!=20\cdot n!$

   $(n+2)\cdot(n+1)=20$

   $n^2+3n-18=0$

   $n_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+72}}{2}$

   $n_1=3$

   $n_2=-6$

2) Trojici písmen EMA bereme jako jedno písmeno. Budeme tvořit uspořádané sedmice ze sedmi prvků.

   Jejich počet je $P(7)=7!=5040$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) Prvky jsou 3.
2) Písmena slova KOMBINACE lze požadovaným způsobem přemístit 5 040 krát.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet prvků tak, aby z něj bylo možné vytvořit
   a) 5040 permutací bez opakování [7]
   b) 120 permutací bez opakování. [5]
2) Zvětší-li se počet prvků o jeden, zvětší se počet permutací bez opakování z těchto prvků
   a) 7 krát.
   b) 132 krát.

   Určete původní počet prvků. [a) 6, b) 131]
3) Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací bez opakování z těchto prvků
   a) 72 krát.
   b) 132 krát.
   c) 210 krát
   d) 380 krát.

   Určete původní počet prvků. [a) 7, b) 10, c) 13, d) 18]
4) Zmenší-li se počet prvků o 3, zmenší se počet permutací bez opakování z těchto prvků
   a) 24 krát.
   b) 60 krát.

   Určete původní počet prvků. [a) 4, b) 5]
5) Na mezinárodní vědecké konferenci vystoupí 8 vědců z osmi různých zemí. Určete počet pořadí,
   a) v nichž vědec z Finska vystupuje ihned po vědci z USA. [$P(7) = 5040$]
   b) v nichž vědec z Německa vystupuje mezi vědcem z Holandska a Ruska. [$P(6) = 720$]
6) Závodu v moderní gymnastice se účastní 17 děvčat. Určete počet všech možných pořadí, kde
   a) se Aneta umístí ihned za Kamilou. [$P(16) = 2{,}09 \cdot 10^{13}$]
   b) Klára skončí mezi Dominikou a Monikou. [$P(15) = 1{,}31 \cdot 10^{12}$]
7) Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova EVROPA tak, aby v tomto přemístění nějaká skupina po sobě jdoucích písmen tvořila slovo EPO. [$P(4) = 24$]
8) Určete kolik různých přirozených osmiciferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 tak, aby se žádná číslice neopakovala a aby dvojka byla ihned za jedničkou. [$P(7) = 5040$]

Permutace

Varianta C

***Příklady*:**

1) Kolika způsoby lze seřadit 11 lidí, jestliže Monika a David nechtějí stát vedle sebe.
2) Určete, kolika způsoby můžeme navléknout na nit deset různě barevných korálků. Konec nitě poté svážeme.

Řešení:

1) Počet všech možností, jak vedle sebe seřadit 11 lidí je $P(11) = 11!$.

   Počet všech možností, jak vedle sebe seřadit 11 lidí je, když David a Monika stojí vedle sebe je $2 \cdot P(10) = 2 \cdot 10!$.

   $P(11) - 2 \cdot P(10) = 11! - 10! = 39916800 - 7257600 = 32659200$

2) Uspořádání, které se liší jen otočením v kruhu, nepovažujeme za různé.

   Nejprve určíme počet všech uspořádání, jako kdybychom navlékali vedle sebe $P(10) = 10!$.

   V tomto počtu jsou ale započítány i umístění, která se liší jen otočením v kruhu. Těchto umístění je deset pro každé upořádání.

   $\frac{P(10)}{10} = \frac{10!}{10} = 9! = 362880$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) Lidi lze seřadit 32 659 200 způsoby.
2) Korálky můžeme navléknout 362 880 způsoby.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete, kolika způsoby může 12 dětí nastoupit do řady, jestliže
   a) dvě děti chtějí stát vedle sebe. [$2 \cdot P(11) = 79\ 833\ 600$]
   b) jedno dítě chce stát na kraji. [$2 \cdot P(11) = 79\ 833\ 600$]
   c) dvě děti chtějí stát vedle sebe a jedno na kraji. [$2 \cdot 2 \cdot P(11) = 14\ 515\ 2500$]
   d) tři děti chtějí stát vedle sebe. [$P(3) \cdot P(11) = 21\ 772\ 800$]
   e) dvě děti nechtějí stát vedle sebe. [$P(12) - 2 \cdot P(11) = 399\ 168\ 000$]
   f) jedno dítě nechce stát na kraji. [$P(12) - 2 \cdot P(11) = 399\ 168\ 000$]
2) Novoročního plaveckého závodu ve Vltavě se kvůli velké zimě zúčastnilo jen 8 plavců. Určete počet pořadí, v nichž pan Vondruška doplaval za panem Štikou.
   [$\frac{1}{2} \cdot P(8) = 20160$]
3) Určete počet všech způsobů, jakými lze postavit do řady 3 muže a 5 žen tak, aby všechny ženy stály před muži. [$P(3) \cdot P(5) = 720$]
4) Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, v nichž se číslice neopakují a která lze utvořit z číslic 2, 3, 4, 5, 6, 7 tak, že
   a) sudé číslice stojí na lichých místech a liché číslice stojí na sudých místech.
   [$P(3) \cdot P(3) = 36$]
   b) žádné dvě sudé ani žádné dvě liché číslice nestojí vedle sebe. [$2 \cdot P(3) \cdot P(3) = 72$]
5) Určete, kolika způsoby se můžou posadit rytíři kulatého stolu, jestliže záleží jen na vzájemném umístění. Rytířů je 25. [$\frac{P(25)}{25} = 6{,}204 \cdot 10^{23}$]
6) Na duchovní seanci přijde 6 účastníků. Kolika způsoby se můžou rozesadit okolo kulatého stolu, jestliže záleží jen na vzájemném pořadí. [$\frac{P(6)}{6} = 120$]

Souhrnné příklady k procvičení

1) Vypočtěte
   a) $V(2,5) - P(4)$ [-4]
   b) $P(4) + P(3)$ [30]
   c) $V(3,6) + V(2,6) + V(1,6)$ [156]
   d) $V(2,4) - 2 \cdot P(4) + 3 \cdot V(2,4)$ [0]
2) Řešte rovnice
   a) $V(1, x+1) = 20$ $[x = 19]$
   b) $V(2, x-1) = 0$ [nemá řešení]
   c) $V(2, x-4) = 32$ $[x = 12]$
   d) $V(2, x+3) = 12$ $[x = 1]$
3) Řešte v N nerovnice
   a) $V(2, x-2) \geq 0$ $[x \in N \wedge x \geq 4]$
   b) $V(2, x+2) \leq 20$ $[x \in N \wedge x \leq 3]$
   c) $-3 \cdot V(2, x-1) \geq -60$ $[x \in N \wedge x \leq 6]$
4) Určete, kolika způsoby může (m+1) chlapců a (n+2) dívek nastoupit do zástupu tak, aby nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci. $[(m+1)! \cdot (n+2)!]$
5) V biochemické laboratoři se rozhodlo prozkoumat účinnost pěti léků, které měl být podávány pokusným myším vždy po dvou, přičemž chtěli zjistit, zda záleží na pořadí užívaných látek. Každý pokud byl proveden na jedné myši. Kolik myší bylo potřeba? [20]
6) Martin byl s přáteli na utkání v házené, po kterém šel s přáteli oslavit svůj svátek do oblíbené hospůdky, kde vypil 10 piv. Doma se ho manželka ptala, jak utkání skončilo, ale Martin si po deseti vypitých pivech byl schopen vzpomenou pouze na to, že utkání neskončilo nerozhodně a že žádné z obou družstev nevstřelilo vice než 27 a méně než 16 košů. Určete počet všech možných výsledků. [132]
7) Kolik různých výsledků může mít zápas ve florbale, jestliže obě mužstva nastřílí nejvýše po čtyřech gólech, přičemž hostující mužstvo dostane alespoň jeden gól a remíza nastane pouze v případě, že obě mužstva střelí pouze dva góly. [17]

8) Kolik pěticiferných čísel bez opakování je možno sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, jestliže čísla mají začínat 2 nebo 4 nebo 5. [72]
9) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic obsažena 0,2,4,5 právě jednou. Kolik z těchto číslic je větších než 4000.

[18, 12]

Kombinace

K-členná kombinace z n prvků *je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Počet $K(k,n)$ všech k-členných kombinací z n prvků je:

$$K(k,n) = \binom{n}{k}$$

Příklad: Do tanečních chodí 32 dívek a 28 chlapců. Kolik různých párů mohou vytvořit?

Řešení: Tvoříme neuspořádané dvojice $\{dívka, chlapec\}$.

Počet všech možností, jak vybrat dívku je $K(1,32)$.

Počet možností, jak vybrat chlapce je $K(1,28)$.

Oba počty vynásobíme. Využíváme kombinatorické pravidlo součinu.

$$K(1,32)\cdot K(1,28) = \binom{32}{1}\cdot\binom{28}{1} = 32\cdot 28 = 896$$

Můžeme vytvořit 896 různých párů.

Kombinace

Varianta A

***Příklady*:**

1) Vytvořte všechny neuspořádané trojice z prvků množiny $M = \{a, b, c, d\}$ tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.
2) Řešte v N rovnici $K(2, x+2) = 3$

Řešení:

1) Jedná se o troj-člennou kombinaci ze čtyř prvků. Počet takových kombinací je

$$K(3,4) = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

$\{a,b,c\}$ $\{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$ $\{a,b,d\}$

2) Kombinační číslo nahradíme zlomkem, rovnici upravíme.

$$K(2, x+2) = 3$$

$$\binom{\mathrm{x}+2}{2} = 3$$

$$\frac{(x+2)!}{x! \cdot 2!} = 3$$

$$(x+2)\cdot(x+1) = 6$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -4$$

-4 není přirozené číslo, takže výsledek je pouze číslo 1

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $\{a,b,c\}$ $\{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$ $\{a,b,d\}$
2) $x_1 = 1$

Příklady k procvičení:

1) Vytvořte všechny neuspořádané dvojice z prvků množiny M tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

   a) $M = \{1, 2, 3, 4\}$ $[\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{1,4\}\ \{2,3\}\{2,4\}\ \{3,4\}]$

   b) $M = \{1, 2, 3\}$ $[\{1,2\}\ \{1,3\}\ \{2,3\}]$

2) Určete počet všech pětičlenných kombinací z

   a) deseti prvků. [252]

   b) patnácti prvků. [3003]

3) Řešte v N rovnice

   a) $K(2, x+1) = 3$ $[x = 2]$

   b) $K(2, x-10) = 10$ $[x = 15]$

   c) $K(2, x-5) = 45$ $[x = 15]$

   d) $K(x+3, x+4) = 3$ $[v\ N\ nemá\ řešení]$

   e) $K(x+3, x+5) = 10$ $[v\ N\ nemá\ řešení]$

   f) $\binom{2}{1} \cdot K(2, x) = 2 \cdot \binom{x-4}{2} + 44$ $[x = 8]$

   g) $K(1, x) \cdot K(5,6) + \binom{4}{3} \cdot K(2, x+2) = -K(3,5) + \frac{1}{5} \cdot K(2,8) \cdot K(1,5)$ $[x = 1]$

   h) $K(2, x+1) \cdot K(1,4) - \binom{5}{3} \cdot K(1, x+1) = -K(2,6) - K(2,3)$ $[x = 2]$

4) Řešte v N nerovnice

   a) $K(2, x+1) \le 36$ $[x \in N \wedge 1 \le x \le 8]$

   b) $K(2, x-6) \ge 3$ $[x \in N \wedge x \ge 9]$

   c) $K(x-2, x) \le K(x-4, x-2) + 15$ $[x \in N \wedge 4 \le x \le 9]$

Kombinace

Varianta B

Příklady:

Ve třídě je 13 děvčat a 15 chlapců. Kolika způsoby je možné vybrat 3 studenty tak, aby ve skupině byli

1) samí chlapci
2) samé dívky
3) 2 chlapci a jedna dívka

Řešení:

1) Vybírám trojici chlapců z patnácti. Je mi jedno v jakém pořadí. Takže tvoříme neuspořádané trojice z patnácti prvků.

   Jejich počet je $K(3,15) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$.

2) Vybírám trojici dívek z třinácti. Je mi jedno v jakém pořadí. Takže tvoříme neuspořádané trojice z 13 prvků.

   Jejich počet je $K(3,13) = \binom{13}{3} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 286$.

3) Vybírám dvojici chlapců z patnácti a jednu dívku z třinácti. Je mi jedno v jakém pořadí.

   Počet všech možností jak vybrat chlapce je $K(2,15) = \binom{15}{2}$

   Počet všech možností jak vybrat dívky je $K(1,13) = \binom{13}{1}$

   Oba počty vynásobíme $K(2,15) \cdot K(1,13) = \binom{15}{2} \cdot \binom{13}{1} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} \cdot 13 = 15 \cdot 13 \cdot 7 = 1365$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) Studenty je možné vybrat 455 způsoby.
2) Studenty je možné vybrat 286 způsoby.
3) Studenty je možné vybrat 1365 způsoby.

Příklady k procvičení:

1) Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8x8 vybrat
   a) 4 políčka. $[K(4,64) = 635\ 376]$
   b) 5 políček. $[K(5,64) = 7\ 624\ 512]$
2) Na setkání přišlo 10 účastníků. Všichni si navzájem podali ruce. Kolik podání ruky neuskutečnilo? $[K(2,10) = 45]$
3) Podnik má 9 zaměstnanců. Na daný úkol jsou potřeba 3. Kolika způsoby je lze vybrat? $[K(3,9) = 84]$
4) Kolikerým způsobem je možné sestavit delegaci, ve které budou 3 muži a 2 ženy, je-li k dispozici 15 mužů a 11 žen? $[K(3,15) \cdot K(2,11) = 25\ 025]$
5) V podniku na výrobu bonbonů pracuje 15 mužů a 16 žen. Kolika způsoby lze vybrat 7 zaměstnanců tak, aby byli vybrání 3 muži a 4 ženy? $[K(3,15) \cdot K(4,16) = 828\ 100]$
6) V krabici je 12 výrobků, z nichž jsou právě tři vadné. Kolika způsoby lze vybrat 4 výrobky tak, aby nejvýše jeden byl vadný. $[K(3,9) \cdot K(1,3) + K(4,9) = 378]$
7) Kolik hráčů se účastnilo žákovského turnaje ve stolním tenisu, jestliže hrál každý s každým jednou a bylo odehráno 91 zápasů? [14]
8) Jakub má deset různých mincí a Michal má osm jiných různých mincí. Kolka způsoby si Michal může vyměnit dvě své mince za dvě mince Jakuba? $[K(2,10) \cdot K(2,8) = 1260]$
9) Při přípitku novomanželům se ozvalo 66 ťuknutí. Kolik bylo na svatbě lidí, jestliže si ťukal každý s každým. [12]
10) Určete, kolika způsoby je možno z dvaceti dětí vybrat 5, jestliže chceme, aby mezi vybranými
    a) nebyl Tomáš. $[K(5,19) = 11\ 628]$
    b) nebyli zároveň David a Václav. $[K(5,20) - K(3,18) = 14\ 688]$

Kombinace

Varianta C

Příklady:

1) V rovině je dáno šest bodů. Kolik přímek je těmito body určeno, jestliže
   a) žádné 3 neleží ve stejné přímce?
   b) právě 3 leží ve stejné přímce?
2) Zámecká podlaha v tanečním sále je rozdělena na 50x50 černých a bílých čtverců tak, že černý a bílá se střídají jako na šachovnici. Určete, kolika způsoby lze na podlaze vybrat
   a) dvojici čtverců neležících ve stejném sloupci.
   b) trojici čtverců tak, aby všechny nebyli stejné barvy.

Řešení:

1)

a) Protože žádné dva body neleží ve stejné přímce, můžeme tvořit neuspořádané dvojice ze šesti prvků (přímka je určena dvěma body).

Jejich počet je $K(2,6)=\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$.

b) Počet přímek, které jsou určeny body, které neleží ve stejné přímce je $K(2,3)$.

Počet přímek, které jsou určeny body, které leží ve stejné přímce je 1.

Každý ze tří bodů, ležících ve stejné přímce je možno spojit s jedním z bodů, které neleží ve stejné přímce. Počet těchto přímek je $3\cdot K(1,3)$.

$$K(2,3)+3\cdot K(1,3)+1=\binom{3}{2}+3\cdot\binom{3}{1}+1=3+9+1=13$$

2)

a) Vybereme libovolnou dvojici čtverců. Od tohoto výběru musíme odečíst všechny výběry, ve kterých leží oba čtverce ve stejném sloupci.

Počet všech možností, jak vybrat libovolnou dvojici čtverců $K(2,2500)$.

Počet všech možností, jak vybrat dva čtverce ležící ve stejném sloupci je $50\cdot K(2,50)$.

$$K(2,100)-10\cdot K(2,10)=\binom{2500}{2}-50\cdot\binom{50}{2}=\frac{2500!}{2498!\cdot 2!}-50\cdot\frac{50!}{48!\cdot 2!}=3062500$$

b) Vybereme libovolnou trojici čtverců. Od tohoto výběru odečteme všechny trojice čtverců, které jsou tvořeny samými černými čtverci a samými bílými čtverci

Počet všech možností, jak vybrat libovolnou trojici čtverců $K(3,2500)$.

Počet všech možností, jak vybrat trojici čtverců, taky aby byli jen bílé $K(3,1250)$.

Počet všech možností, jak vybrat trojici čtverců, taky aby byli jen černé $K(3,1250)$.

$$K(3,2500) - 2 \cdot K(3,1250) = \binom{2500}{3} - 2 \cdot \binom{1250}{3} = \frac{2500!}{2497! \cdot 3!} - 2 \cdot \frac{1250!}{1247! \cdot 3!} = 1{,}95 \cdot 10^9$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1)

a) Body je určeno 15 přímek

b) Body je určeno 13 přímek.

2)

a) Dvojici čtverců lze vybrat 3 062 500 způsoby.

b) Trojici čtverců lze vybrat $1{,}95 \cdot 10^9$ způsoby.

Příklady k procvičení:

1) Kolik přímek je určeno 7 body, jestliže
   a) právě tři leží na stejné přímce. $[K(2,4)+1+3\cdot(1,4)=19]$
   b) právě čtyři leží na stejné přímce. $[K(2,3)+1+4\cdot(1,3)=16]$
2) Kolik přímek je určeno 9 body, jestliže
   a) právě tři leží na stejné přímce. $[K(2,6)+1+3\cdot(1,6)=34]$
   b) právě čtyři leží na stejné přímce. $[K(2,5)+1+4\cdot(1,5)=31]$
3) Kolik přímek je určeno 16 body, jestliže
   a) právě dvě leží na stejné přímce. $[K(2,14)+1+2\cdot(1,14)=120]$
   b) právě čtyři leží na stejné přímce. $[K(2,12)+1+4\cdot(1,12)=115]$
4) Zámecká podlaha v tanečním sále je rozdělena na 20x20 černých a bílých čtverců tak, že černý a bílá se střídají jako na šachovnici. Určete, kolika způsoby lze na podlaze vybrat
   a) trojici čtverců. $[K(3,400)=10\ 586\ 800]$
   b) dvojici čtverců neležících ve stejném sloupci. $[K(2,400)-20\cdot K(2,200)=76\ 000]$
   c) trojici čtverců tak, aby všechny nebyli stejné barvy.
   $[K(3,400)-2\cdot K(3,200)=1\ 568\ 000]$
   d) dvojici čtverců neležících v témže sloupci ani v téže řadě.
   $[K(2,400)-40\cdot K(2,20)=72\ 200]$
   e) trojici čtverců tak, aby jeden byl černý a dva bílé.
   $[K(1,200)\cdot K(2,200)=3980000]$
5) Zámecká podlaha v tanečním sále je rozdělena na 10x10 černých a bílých čtverců tak, že černý a bílá se střídají jako na šachovnici. Určete, kolika způsoby lze na podlaze vybrat
   a) pětici čtverců. $[K(5,100)=75\ 287\ 520]$
   b) pětici čtverců neležících ve stejném sloupci. $[K(5,100)-10\cdot K(5,10)=75\ 282\ 000]$
   c) čtveřici čtverců tak, aby všechny nebyli stejné barvy.
   $[K(4,100)-2\cdot K(4,50)=3\ 460\ 625]$
   d) čtveřici čtverců neležících v témže sloupci ani v téže řadě.
   $[K(4,100)-10\cdot K(4,10)=39\ 191\ 25]$
   e) pětici čtverců tak, aby jeden byl černý a čtyři bílé.
   $[K(1,50)\cdot K(4,50)=11\ 515\ 000]$

Souhrnné příklady k procvičení

1) Zmenší-li se počet prvků o čtyři, zmenší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků
   a) třikrát.
   b) o 38.
   Určete původní počet prvků. [a) 10, b) 12]
2) Zvětší li se počet prvků o tři, zvětší se počet kombinací druhé třídy z těchto prvků
   a) pětkrát.
   b) o 33.
   Určete původní počet prvků. [a) 3, b) 10]
3) Z kolika prvků lze vytvořit
   a) 45 kombinací druhé třídy. [10]
   b) 105 kombinací druhé třídy. [15]
   c) 325 kombinací druhé třídy. [26]
   d) 91 kombinací druhé třídy [14]
4) Počet dvoučlenných kombinací z n prvků je o 27 větší než počet jednočlenných kombinací z n prvků. Určete počet prvků. [9]
5) Na přednášce z fyziky se sešlo 12 dívek a 20 chlapců. Kolika způsoby lze vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou
   a) právě 3 dívky. [250 800]
   b) alespoň 5 dívek. [16 764]
   c) alespoň jedna dívka. [23 521 308]
   d) samí chlapci. [38 760]
6) Karel za den vyrobil 16 kusů židlí, z nichž 2 mají vadu. Kolika způsoby lze vybrat
   a) 4 libovolné židle. [1820]
   b) 4 židle bez vady [1001]
   c) 4 židle, z nichž je právě jedna vadná. [728]
   d) 4 židle, z nichž je alespoň jedna bez vady. [1001]
   e) 4 židle, z nichž je alespoň jedna vadná. [806]

7) Ivan podcenil přípravu na písemku z češtiny a z 60 témat se naučil jen 45. Na písemce bude 10 otázek, každá z jiného tématu. Ivan potřebuje znát odpověď alespoň na 3 otázky, jinak nedostane lepší známku než pětku a hrozí mu propadnutí z češtiny.
Kolik je možností, jak zadat písemku, aby Ivan znal odpověď alespoň na 3 otázky?
$\left[7{,}538 \cdot 10^{10}\right]$

8) Kolik pětiprvkových podmnožin má množina $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$? [252]

9) V osudí je 9 bílých a 12 červených lístků. Kolika způsoby lze náhodně vybrat 7 lístků tak, aby alespoň jeden byl bílý? [115 488]

10) Kolika možnými způsoby je možné seřadit 10 závodníků do dvou řad po pěti, jestliže v každé řadě záleží na pořadí? [3 628 800].

11) Určete, kolika způsoby je možné na šachovnici 8x8 postavit 4 různé figury tak, aby dvě stály na černých a dvě na bílých polích. [5 904 384]

12) Deset lidí se má ubytovat ve třech hotelových pokojích. Každý z pokojů je v jiném patře. Pokoj v prvním patře je čtyřlůžkový, pokoj v druhém patře je třílůžkový stejně jako pokoj ve třetím patře. Kolika způsoby je možné rozmístit deset lidí v těchto třech pokojích.
[84 000]

Variace s opakováním

K-členná variace s opakováním z n prvků *je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.*

Počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací s opakováním z n prvků je:

$$V'(k,n) = n^k$$

Příklad: Kolik různých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Řešení: Číslice se mohou opakovat. Jedná se o variaci čtvrté třídy s opakováním z osmi prvků. Nesmíme zapomenout, že na začátku nesmí být nula.
Počet všech čtyřciferných číslic z osmi prvků je $V'(4,8)$
Počet všech možností kde je na začátku nula, je $V'(3,8)$

$$V'(4,8) - V'(3,8) = 8^4 - 8^3 = 7 \cdot 8^3 = 3584$$

Počet všech čtyřciferných čísel vyhovujících zadaným podmínkám je 3584.

Variace s opakováním

Varianta A

***Příklady*:**

1) Určete všechny dvoučlenné variace s opakováním ze dvou prvků p, q.
2) Kolik různých trojciferných čísel lze vytvořit z číslic 5, 6, 7, 8.?

Řešení:

1) Tvoříme uspořádané dvojice ze dvou prvků. Prvky se mohou opakovat.
   Jejich počet bude $V'(2,2) = 2^2 = 4$
2) Číslice se mohou opakovat, na pořadí nám záleží, proto půjde o variaci třetí třídy s opakováním ze čtyř prvků.
   $V'(3,4) = 4^3 = 64$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $[p, p]$, $[p, q]$, $[q, q]$, $[q, p]$
2) Lze vytvořit 64 čísel.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete všechny trojčlenné variace s opakování z prvků
   a) a [a, a, a]
   b) 1, 2 [[1, 1, 1,],[1, 1, 2],[1, 2, 1],[1, 2, 2], [2, 2, 2],[2, 2, 1],[2, 1, 2],[2, 1, 1]]
2) Kolik trojčlenných variací s opakováním je možné vytvořit z
   a) osmi různých prvků. [6561]
   b) 50 různých prvků. [$7{,}18 \cdot 10^{23}$]
3) Kolik různých čtyřciferných čísel lze vytvořit z číslic
   a) 2 a 3 [16]
   b) 1, 2, 3, 4 [256]
   c) 2, 4, 6, 8, 9 [625]
   d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 [4096]
4) Kolik vrhů lze provést
   a) dvěma kostkami [36]
   b) pěti kostkami [7776]
   c) (a+b) kostkami [6^{a+b}]
5) Trezor má kód sestavený z číslic 0, 1, 2,…, 8, 9. Kolik možných kódů lze vytvořit, jestliže kód je
   a) pětimístný [100 000]
   b) devítimístný [1 000 000 000]
6) Kolik možných výsledků je při hodu čtyřmi mincemi. [16]
7) Abeceda má 26 písmen. Kolik různých slov (majících i nemajících smysl) o pěti písmenech z nich lze vytvořit. Kolik z nich začíná písmenem A. Kolik z nich nekončí písmenem Q. [11 881 376, 456 976, 11 424 400]
8) Kolik různých trojciferných čísel dělitelných deseti lze vytvořit z číslic
   a) 0, 2, 4, 6 [27]
   b) 1, 2, 3, 4 [0]
   c) 5, 6, 7, 8, 9, 0 [216]

Variace s opakováním

Varianta B

***Příklady*:**

1) Řešte rovnici v N

   $V'(2,x)+x\cdot V'(3,3)=28$

2) Z kolika prvků můžeme vytvořit 784 variací druhé třídy s opakováním?

Řešení:

1) Rovnici upravíme podle vzorce $V'(k,n)=n^k$ a dopočítáme

   $V'(2,x)+x\cdot V'(3,3)=28$

   $x^2+x\cdot 3^3=28$

   $x^2+27x-28=0$

   $$x_{1,2}=\frac{-27\pm\sqrt{29+112}}{2}$$

   $$x_{1,2}=\frac{-27\pm 29}{2}$$

   $x_1=1$

   $x_2=-28$ není z oboru přirozených čísel

   Zk. pro $x_1=1$

   L= $1^2+1\cdot 3^3=1+27=28$ P=28 L=P

   $x_1=1$ je řešení rovnice

2) Ze zadání sestavíme rovnici, kterou vyřešíme. Řešení musí být přirozené číslo.

   $V'(2,n)=784$

   $n^2=784$

   $n_{1,2}=\pm 28$

   Protože počet prvků nemůže být záporné číslo, řešením je $n_1=28$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $x_1=1$
2) $n_1=28$

***Příklady k procvičení*:**

1) Z kolika prvků lze sestavit
   a) 289 [17]
   b) 441 [21]
   c) 529 [23]
   d) 841 [29]
   e) 1089 [33]
   f) 4489 [67]

   variací druhé třídy s opakováním.
2) Z kolika prvků lze sestavit
   a) 729 [9]
   b) 2197 [13]

   tříčlenných variací s opakováním.
3) Zvětší-li se počet prvků o dva, zvýší se počet dvoučlenných variací s opakováním
   a) o 28 [6]
   b) o 60 [14]

   Určete původní počet prvků.
4) Zmenší-li se počet prvků o 4, zmenší se počet dvoučlenných variací s opakováním
   a) o 64 [10]
   b) o 120 [17]

   Určete původní počet prvků.
5) Zvětší-li se počet trojčlenných variací o 3, zvětší se počet trojčlenných variací
   a) o 387 [5]
   b) o 657 [7]

   Určete původní počet prvků.
6) Zmenší-li se počet prvků o 2, zmenší se počet trojčlenných variací
   a) a) o 1352 [16]
   b) b) o 2648 [22]

   Určete původní počet prvků.
7) Řešte v N rovnice
   a) $V'(2,x)+V'(2,x+2)=-4$ $[x = 4]$
   b) $V'(2,x+1)+V'(3,2)=17$ $[x = 2]$

c) $V'(2,x) + x \cdot V'(1,x+1) = 3$ $[x = 2]$

d) $V'(2,x+5) + V'(2,x+3) + V'(2,x+1) = 83$ $[x = 2]$

e) $V'(3,x+1) - x \cdot V'(2,x+1) = 36$ $[x = 5]$

f) $V'(3,x+1) - x \cdot V'(2,x-1) = 61 + 7x$ $[x = 4]$

Variace s opakováním

Varianta C

***Příklady*:**

1) Určete počet podmnožin k-prvkové množiny.
2) Určete počet všech nejvýše šesticiferných čísel, která mají na konci pětku.

Řešení:

1) Prvky k-prvkové množiny si označíme čísly 1, 2, 3,…, k. každé její podmnožině přiřadíme uspořádanou k-tici, která se skládá z nul a jedniček. Přiřazení provedeme takto: Jestliže je ve zvolené podmnožině prvek označený číslem j, přiřadíme jí uspořádanou k-tici, jejímž j-tým členem je jednička. Jestliže tento prvek v množině není, bude na j-tém místě příslušné uspořádané k-tice nula.

   Takže například podmnožině $\{1,2,3,4\}$ množiny $\{1,2,3,4,5\}$ bude přiřazena uspořádaná pětice $[1,1,1,1,0]$.

   Podmnožině $\{2,5\}$ množiny $\{1,2,3,4,5\}$ bude přiřazena uspořádaná šestice $[0,1,0,0,0,1]$ atd.

   Každé takto uspořádané k-tici odpovídá jediná podmnožina k-prvkové množiny, proto je toto přiřazení vzájemně jednoznačné. Z toho můžeme odvodit, že k-prvková množina má právě tolik podmnožin, kolik existuje uspořádaných k-tic z nul a jedniček.

   Tyto k-tice jsou k-členné variace s opakováním ze dvou prvků, takže počet podmnožiny k prvkové množiny je 2^k.

2) Číslice se mohou opakovat, na pořadí nám záleží, proto půjde o variaci s opakováním z deseti prvků. Nesmíme zapomenout odečíst čísla, která mají na začátku nulu
Jednociferné číslo je jen jedno, je to 5.
Počet všech dvojciferných je $V'(1,10)-1$.
Počet všech trojciferných je $V'(2,10)-V'(1,10)$.
Počet všech čtyřciferných je $V'(3,10)-V'(2,10)$.
Počet všech pěticiferných je $V'(4,10)-V'(3,10)$.
Počet všech šesticiferných je $V'(5,10)-V'(4,10)$.
Jednotlivé počty stačí sečíst.
$1+10-1+10^2-10+10^3-10^2+10^4-10^3+10^5-10^4=100000$
Počet čísel je 100 000.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) 2^k
2) Počet čísel je 100 000.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet podmnožin množiny M.
   a) $M = \{x, y, z\}$ $[8]$
   b) $M = \{0, 1, 2, \cdots, n+1\}$ $[4 \cdot 2^n]$
   c) $M = \{1, 2, \cdots, n+1\}$ $[2 \cdot 2^n]$
2) Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až šesti prvcích.
   [$V'(1,2) + V'(2,2) + V'(3,2) + V'(4,2) + V'(5,2) + V'(6,2) = 126$]
3) Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až osmi prvcích.
   [$V'(1,2) + V'(2,2) + V'(3,2) + V'(4,2) + V'(5,2) + V'(6,2) + V'(7,2) + V'(8,2) = 510$]
4) Určete počet všech přirozených nejvýše čtyřciferných čísel dělitelných 20.
   [500]
5) Určete počet všech přirozených nejvýše čtyřciferných čísel, která jsou větší než 849 a menší než 1500. [650]
6) Určete počet všech nejvýše čtyřciferných čísel menších než 4000. [3999]
7) Určete počet všech nejvýše čtyřciferných čísel
   a) menších jak 1500 a větších jak 8. [1491]
   b) větších jak 15 a menších jak 5200. [5184]

Permutace s opakováním

Permutace s opakováním z n prvků *je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou.*

Počet $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ všech k-členných permutací s opakováním z n prvků $(k > n)$, kde se první prvek opakuje k_1-krát, druhý k_2-krát, atd. je:

$$P'(k_1, k_2 \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze přemístit písmena slova ARITMETIKA tak, aby obě písmena A byla vedle sebe?

Řešení: Bereme obě písmena A, jako jedno písmeno. Slovo dále obsahuje dvě písmena I a dvě písmena T. Půjde o permutaci s opakováním z devíti prvků kde $k_1 = 1$,

$k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 2$, $k_5 = 1$, $k_6 = 1$, $k_7 = 1$

$$\mathrm{P}'(1,1,2,2,1,1,1) = \frac{9!}{2! \cdot 2!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 90720$$

Písmena lze přemístit 90 720 způsoby.

Permutace s opakováním

Varianta A

***Příklady*:**

1) Určete všechny trojčlenné permutace s opakováním z prvků C, C, D.
2) Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, jež můžeme sestavit z číslic 1 a 2 tak, že v každém z nich je číslice 1 právě dvakrát.

Řešení:

1) Tvoříme uspořádané dvojice ze dvou prvků. Prvky se mohou opakovat.

   Jejich počet bude $P'(2,1) = \frac{3!}{2!} = 3$

2) Jestliže jednička má být v čísle právě dvakrát, dvojka tam musí být právě čtyřikrát.

   Tvořím uspořádané šestice kde $k_1 = 2$ a $k_2 = 4$.

   Jejich počet je: $P'(2,4) = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

1) $[C,C,D]$ $[C,D,C]$ $[D,C,C]$
2) Počet čísel je 15.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete všechny čtyřčlenné permutace z prvků
   a) 1, 1, 5, 5 [[1, 1, 5, 5],[1, 5, 1, 5],[1, 5, 5, 1], [5, 5, 1, 1],[5, 1, 5, 1],[5, 1, 1, 5]]
   b) 1, 3, 3, 3 [[1, 3, 3, 3],[3, 1, 3, 3],[3, 3, 1, 3],[3, 3, 3, 1]]
2) Kolik různých slov majících i nemajících smysl lze vytvořit z písmen slova
   a) OKO [3]
   b) OLOVO [20]
   c) KALIFORNIE [1 814 400]
   d) BRATISLAVA [604 800]
   e) MATEMATIKA [151 200]
3) Kolik šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 2, 4, 6, tak, že
   a) číslo 2 se v každém z nich vyskytuje právě třikrát a číslo 6 právě jednou [140]
   b) čísla 2 a 4 se v každém z nich vyskytují právě dvakrát [210]
4) Kolik pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 3, 5 tak, aby všechna byla sudá. [12]
5) Hodíme n-krát korunou. Víme, že orel padl právě dvakrát. Určete všechna možná uspořádání, jestliže
   a) házíme čtyřikrát [6]
   b) házíme jedenáctkrát [55]

Permutace s opakováním

Varianta B

***Příklad*:**

Kolika způsoby lze přemístit písmena slova TANGANIKA. Kolik z těchto přemístění nemá na prvním místě K.

Řešení:

Tvoříme uspořádané devítice ze dvou ze šesti prvků, kdy A se vyskytuje třikrát, N se vyskytuje dvakrát, ostatní písmenka jsou obsažena jednou.

Počet všech možných přemístění je: $P'(3,2,1,1,1,1) = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = 30240$

Počet přemístění, které nemá na prvním místě K, dostaneme tak, že od všech možných přemístění odečteme ty, které mají na začátku K.

Jejich počet je: $P'(3,2,1,1,1) = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$

$30240 - 3360 = 26880$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

Počet všech možných přemístění je 30 240.

Počet všech přemístění, která nemají na začátku písmeno K je 26 880.

***Příklady k procvičení*:**

1) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova GEOMETRIE. Kolik z těchto přemístění má na prvním místě G. Kolik z těchto přemístění nemá na prvním místě G.

   [$P'(3,1,1,1,1,1,1) = 604\ 80$, $P'(3,1,1,1,1,1) = 6720$, $P'(3,1,1,1,1,1,1) - P'(3,1,1,1,1,1) = 53\ 760$]

2) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova PALETA. Kolik z těchto přemístění má na prvním místě T. Kolik z těchto přemístění nemá na prvním místě T.

   [$P'(2,1,1,1,1) = 360$, $P'(2,1,1,1) = 60$, $P'(2,1,1,1,1) - P'(2,1,1,1) = 300$]

3) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova NOTEBOOK. Kolik z těchto přemístění má na prvním místě B. Kolik z těchto přemístění nemá na prvním místě B.

   [$P'(3,1,1,1,1,1) = 6720$, $P'(3,1,1,1,1) = 840$, $P'(3,1,1,1,1,1) - P'(3,1,1,1,1) = 5880$]

4) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova BARBORA. Kolik z těchto přemístění má na prvním místě B. [$P'(2,2,2,1) = 630$, $P'(2,2,1,1) = 180$]

5) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova MARIANA. Kolik z těchto přemístění má na prvním místě A. [$P'(3,1,1,1,1) = 840$, $P'(2,1,1,1,1,1) = 360$]

6) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova KARMA. Kolik z těchto přemístění nemá na prvním místě A. [$P'(2,1,1,1) = 60$, $P'(2,1,1,1) - P(4) = 36$]

7) Kolika způsoby lze přemístit písmena slova KOLENO. Kolik z těchto přemístění nemá na prvním místě O. [$P'(2,1,1,1,1) = 360$, $P'(2,1,1,1,1) - P(5) = 240$]

8) Určete počet šesticiferných čísel sestavených z číslic 0, 2, 4, tak, že v každém z nich se všechny číslice vyskytují právě dvakrát. [$P'(2,2,2) - P'(2,1,2) = 60$]

9) Určete počet devíticiferných čísel sestavených z číslic 0, 3, 8, tak, že v každém z nich se všechny číslice vyskytují právě třikrát. [$P'(3,3,3) - P'(2,3,3) = 1120$]

10) Máme 3 bílé korálky, 2 černé korálky a 5 červených korálků. Kolika způsoby je můžeme postavit do řady? Kolik z těchto seskupení má černé korálky na kraji?

    [$P'(3,2,5) = 2520$, $P'(3,5) = 56$]

Permutace s opakováním

Varianta C

***Příklady*:**

1) Určete počet všech sedmiciferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je roven dvěma.
2) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel sestavených z číslic 2 a 3 tak, že číslice 3 se v nich vyskytuje alespoň třikrát.

Řešení:

1) Jsou dvě možnosti, jak sestavit čísla, aby byl ciferných součet roven dvěma.

   první možnost: Číslo se skládá z číslic 0 a 1, kdy jednička je obsažena právě dvakrát a nula právě pětkrát.

   Počet takto sestavených čísel je: $P'(2,5) - P'(2,4)$

   druhá možnost: Číslo se skládá z číslic 2 a 0, kdy dvojka je obsažena právě jednou a nula právě šestkrát.

   Počet čísel sestavený z dvojky a nul je: 1

   $$P'(2,5) - P'(2,4) + P'(1,6) - 1 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} - \frac{6!}{4! \cdot 2!} + \frac{7!}{6!} - 1 = 21 - 15 + 1 = 12$$

2) Vypočítáme si počet možností, kde se číslice tři vyskytuje právě třikrát, právě čtyřikrát, právě pětkrát a sečteme je.

   Počet všech čísel, kde se dvojka vyskytuje právě dvakrát a trojka právě třikrát: $P'(2,3)$

   Počet všech čísel, kde se dvojka vyskytuje právě jednou a trojka právě čtyřikrát: $P'(1,4)$

   Počet všech čísel, kde se dvojka nevyskytuje, trojka se vyskytuje právě pětkrát: $P'(5)$

   $$P'(2,3) + P'(1,4) + P'(5) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} + \frac{5!}{4!} + 1 = 10 + 5 + 1 = 16$$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Výsledky řešení:

1) Počet čísel je 7.
2) Počet čísel je 16.

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete počet všech přirozených devíticiferných čísel, jejichž ciferný součet je roven
   a) čtyřem. [165]
   b) pěti. [505]
2) Určete počet všech přirozených čtyřciferných čísel, jejichž ciferný součet je menší než
   a) tři. [5]
   b) čtyři. [7]
3) Určete počet všech trojciferných přirozených čísel dělitelných devíti složených z číslic 2, 3, 4, 5, 9. Číslice se mohou opakovat. [10]
4) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, jež lze sestavit z číslic 1 a 2 tak, že číslice 1 se v nich vyskytuje
   a) alespoň dvakrát. [11]
   b) nejvýše dvakrát. [11]
5) Určete počet všech šesticiferných čísel, jež lze sestavit z číslic 0 a 7 tak, že číslice nula se v nich vyskytuje
   a) alespoň čtyřikrát. [6]
   b) nejvýše třikrát. [26]

Kombinace s opakováním

K-členná kombinace s opakováním z n prvků *je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.*

Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je:

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: V osudí jsou černé, bílé a červené koule. Koule téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby lze vybrat 3 koule, jestliže v osudí je 5 černých koulí, 4 bílé koule a 2 červené koule.

Řešení: Koule jsou nerozlišitelné, proto půjde o trojčlennou kombinaci s opakováním ze tří prvků (tři barvy koulí). Jejich počet je $K'(3,3)$

V osudí nejsou 3 červené koule, proto musíme možnost, že vytáhneme samé červené koule odečíst.

$$K'(3,3) - 1 = \binom{5}{3} - 1 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} - 1 = 9$$

Koule lze vybrat devíti způsoby.

Kombinace s opakováním

Varianta A

***Příklady*:**

1) Vytvořte všechny možné dvoučlenné kombinace s opakováním z prvků a, b, c.
2) Kolika způsoby lze rozdělit 8 stejných jablek mezi 6 lidí?

Řešení:

1) Tvoříme neuspořádané dvojice ze tří prvků. Prvky se mohou opakovat.

   Jejich počet bude $K'(2,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

2) Osmkrát vybereme mezi šesti lidmi. Někdo může dostat i více jablek. Tvoříme osmičlenné kombinace ze šesti prvků.

   Jejich počet bude $K'(8,6) = \binom{13}{8} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $\{a,a\}$ $\{a,b\}$ $\{b,b\}$ $\{b,c\}$ $\{a,c\}$ $\{c,c\}$
2) Jablka lze rozdělit 1287 způsoby.

***Příklady k procvičení*:**

1) Vytvořte všechny možné tříčlenné kombinace s opakováním z prvků
   a) 1, 2. [{1, 1, 1},{1, 1, 2},{1, 2, 2},{2, 2, 2}]
   b) 1, 2, 3. [{1, 1, 1},{1, 1, 2},{1, 2, 2},{2, 2 ,2}, {2, 2, 3},{2, 3, 3},{1, 3, 3}{1, 2, 3}]
2) Kolik čtyřčlenných kombinací s opakováním je možné vytvořit z
   a) 10 prvků [715]
   b) 3 prvků [15]
   c) 20 prvků [8855]
3) Kolik je možností zakoupení 5 sešitů, mám-li na výběr ze 6 druhů. Od každého druhu mají alespoň 5 kusů. [120]
4) Firma kupuje čtyři nová firemní auta. Má na výběr z deseti barev. Kolik je možností, jak vybrat. [715]
5) Pan Slanina kupuje na oslavu 6 láhví šampaňského. Na výběr má ze 4 druhů. Kolika způsoby může vybrat? Od každého druhu mají alespoň 10 kusů. [84]
6) Určete, kolika způsoby je možné rozmístit 25 triček do 4 zásuvek. [3276]
7) Kolika způsoby lze rozdělit 10 kusů ovoce mezi 10 dětí? [92378]
8) Existují 4 různé krevní skupiny (A, B, AB, O). Určete počet všech možných rozdělení 9 osob podle uvedených krevních skupin. [220]
9) V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky. Kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné. Určete, kolika způsoby lze vybrat 4 kuličky, jestliže v sáčku jsou alespoň 4 kuličky od každé barvy. [15]
10) Knihovna má 5 regálů. Do každého regálu se vejde 7 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 7 knih. [330]

Kombinace s opakováním

Varianta B

***Příklady*:**

1) Řešte rovnici

$$K'(2,n)+K'(2,n+1)=4$$

2) Zvětšíme-li počet prvků o jeden, zvětší se počet dvoučlenných kombinací s opakováním o 4. Určete původní počet prvků.

Řešení:

1) Rovnici upravíme podle vzorce $K'(k,n)=\binom{n+k-1}{k}$, určíme podmínky a dopočítáme.

$$K'(2,n)+K'(2,n+1)=4$$

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n+2}{2}=4$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!}+\frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}=4 \qquad n\in N \wedge n\geq 1$$

$$\frac{(n+1)\cdot n}{2}+\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}=4$$

$$(n+1)\cdot(2n+2)=8$$

$$n^2+2n-3=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2}$$

$$n_1=1$$

$$n_2=-3$$

Výsledek $n_2=-3$ nevyhovuje podmínkám, řešením rovnice je $n_1=1$

2) Ze zadání vytvoříme rovnici, kterou vyřešíme

$$K'(2,n) = K'(2,n+1) - 4$$

$$\binom{n+1}{2} - \binom{n+2}{2} = -4$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!} - \frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!} = -4 \quad n \in N \wedge n \geq 1$$

$$n^2 + n - n^2 - 3n - 2 + 8 = 0$$

$$-2n + 6 = 0$$

$$n = 3$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledky řešení:

1) $n_1 = 1$
2) Původní počet prvků je 3.

***Příklady k procvičení*:**

1) Zmenší-li se počet prvků o 2, zmenší se počet dvoučlenných kombinací s opakováním
   a) o 19. [10]
   b) o 29. [15]

   Určete původní počet prvků.
2) Zvětší-li se počet prvků o 3, zvětší se počet tříčlenných kombinací s opakováním
   a) o 46 [3]
   b) o 109 [5]

   Určete původní počet prvků.
3) Počet dvojčlenných kombinací s opakováním z n prvků je o 45 větší než jednočlenných kombinací z n prvků. Určete n. [10]
4) Určete, z kolika prvků je možné vytvořit
   a) 66 dvojčlenných kombinací s opakováním. [11]
   b) 153 dvojčlenných kombinací s opakováním. [17]
5) Řešte rovnice v N
   a) $K'(2,n) = 15$ [5]
   b) $K'(2,n) = 91$ [13]
   c) $K'(2,n) + K'(2,n+2) = 31$ [4]
   d) $K'(2,n) - K'(2,n+3) = -24$ [6]
   e) $K'(2,n) - K'(2,n-2) = 12$ [5]
   f) $K'(3,n) - K'(3,n+2) = -36$ [4]
   g) $K'(3,n) - K'(3,n-1) = 28$ [7]
   h) $K'(2,n) + K'(2,n+2) - K'(2,n+1) = 11$ [3]
   i) $K'(2,n) + K'(2,n-3) - K'(2,n-1) = 12$ [6]
   j) $K'(3,n) - K'(3,n+1) + K'(3,n+3) = K'(3,n+2) + 9$ [2]
   k) $K'(3,n-1) + K'(3,n+1) - K'(3,n) = K'(3,n-2) + 33$ [3]

Kombinace s opakováním

Varianta C

***Příklady*:**

1) Určete, kolika způsoby si může 5 osob rozdělit 6 stejných pentelek a 7 stejných obyčejných tužek.
2) V novinovém stánku mají deset druhů časopisů, přičemž každý časopis mají v 13 kusech. Kolika způsoby lze zakoupit 14 časopisů?

Řešení:

1) Počet všech možností jak přiřadit pět osob k šesti pentelkám (jedna osoba může dostat více pentelek, přičemž nezáleží na tom, v jakém pořadí ty pentelky dostanou) je: $K'(6,5)$

   Počet všech možností jak přiřadit pět osob k sedmi tužkám (jedna osoba může dostat více tužek, přičemž nezáleží na tom, v jakém pořadí ty tužky dostanou) je: $K'(7,5)$

   Použijeme kombinatorické pravidlo součinu a oba počty vynásobíme.

   $$K'(6,5)\cdot K'(7,5)=\binom{10}{6}\cdot\binom{11}{7}=10\cdot 7\cdot 3\cdot 11\cdot 10\cdot 3=69300$$

2) Budeme vybírat 14 časopisů z 10 druhů časopisu. Nezáleží nám na tom, v jakém pořadí si jednotlivé časopisy vybereme. Protože časopisů od každého druhu je jenom 13, musíme od celkového počtu možností, jak časopisy vybrat, odečíst ty možnosti, kdy jsme vybrali 14 stejným časopisů od jednoho druhu. Protože časopisů mají 10 druhů, je počet možností, kdy bylo vybráno 14 časopisů stejného druhu 10.

   Počet všech možností, jak vybrat 14 časopisů je: $K'(14,10)$

   $$K'(14,10)-10=\binom{23}{14}-10=\frac{23!}{9!\cdot 14!}-10=23\cdot 22\cdot 19\cdot 17\cdot 5-10=817190-10=817180$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

1) Pentelky a tužky si pět osob může rozdělit 69 300 způsoby.
2) Je 817 180 způsobů, jak si zakoupit časopisy.

Příklady k procvičení:

1) V pytli je 12 modrých, 10 žlutých a 10 červených rozlišováků. Rozlišováky téže barvy jsou nerozlišitelné. Určete, kolika způsoby lze vybrat 11 rozlišováků.

   [$K'(11,3) - 2 = 76$]

2) V pytli je 15 modrých, 12 žlutých a 11 červených trik. Trika téže barvy jsou nerozlišitelné. Určete, kolika způsoby lze vybrat 12 trik. [$K'(12,3) - 1 = 90$]

3) Určete, kolika způsoby si mohou 3 osoby rozdělit pět stejných čokolád, čtyři stejné sáčky bonbonů, čtyři stejné sáčky sušenek a čtyři stejné balíčky oplatek.

   [$K'(5,3) \cdot [K(4,3)]^3 = 70\ 875$]

4) V obchodě mají dva druhy marockého koření v balíčcích 25 gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 100 gramů koření, jestliže prvního druhu mají 3 balíčky a druhého druhu 5 balíčků. [$K'(4,2) - 1 = 4$]

5) V obchodě mají tři druhy čaje, každý po 75 gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 300 gramů čaje, jestliže od jednoho druhu mají 7 balíčků a od zbývajících pouze 3 balíčky. [$K'(4,3) - 2 = 13$]

Souhrnné příklady k procvičení

1) Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu
   a) (2,15) [364]
   b) (2,10) [165]
2) Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena ve slově ATLANTA tak, aby žádná trojice sousedních písmen nebyla tvořena třemi písmeny A. [360]
3) Heslo se skládá z pěti číslic (0, 1,…, 9) a tří písmen (každé můžeme volit z 26). Kolik existuje možností, jak zvolit heslo. [1 757 600 000]
4) Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 1, 2, 3, 4, 5. [23]
5) Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 3, 4, 5, 6, 8. [31]
6) Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách při vrhu čtyřmi kostkami? [126]
7) Určete, kolika způsoby je možno přemístit písmena slova KABELKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly. [72]
8) Určete, kolika způsoby je možno přemístit písmena slova PERMUTACE tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly. [1440]
9) Určete, kolika způsoby lze z jednoeurových a dvoueurových mincí zaplatit částku 10 euro, jsou-li oba druhy mincí k dispozici v dostatečném počtu. [6]
10) Kolika způsoby lze vybrat ze 50 mikročipů 3 mikročipy ke kontrole, jestliže po kontrole je vždy mikročip vrácen zpět. [22 100]
11) Poměr počtu variací druhé třídy bez opakování z n-prvkové množiny a počtu variací třetí třídy s opakováním z n prvků je 9:10. Určete počet prvků. [10]
12) K dispozici jsou 2 tabletky vitamínu C, 3 tabletky vitamínu B a 4 tabletky vitamínu D. každý den si lze vzít pouze jednu tabletku jednoho druhu vitamínu. Kolik existuje způsobů, jak si brát vitamíny? [1260]
13) Určete počet všech přirozených čísel větších než 400 000, které lze sestavit z cifer 2, 4, 7, vyskytuje-li se v v každém z nich cifra 2 dvakrát cifra 4 jedenkrát a cifra 7 třikrát. [40]
14) Určete, kolika způsoby lze rozdělit 14 láhví whisky mezi deset dospělých, jestliže
    a) každý člověk dostane alespoň jednu láhev [715]
    b) nejmladší člověk dostane dvě láhve. [293 930]

Literatura:

[1] Fuchs E., Kubát J. a kolektiv.: *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*, Prometheus, Praha, 2001

[2] Calda E., Dupač V.: *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*, Prometheus, Praha, 2001

[3] Jirásek F., Braniš K., Horák S., Vacek M.: *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU, 2. část*, Prometheus, Praha, 1999

[4] Kubát J., Hrubý D., Pilgr J.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy - Maturitní minimum*, Prometheus, Praha, 2003

[5] Calda E.: *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 3. díl*, Prometheus, Praha, 2000

[6] Hudcová M., Kubičíková L.: *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*, Prometheus, Praha, 2004

[7] Herman J., Kučera R., Šimša J.: Metody řešení matematických úloh II, Masarykova univerzita, Brno, 1997

[8] *http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/*

[9] *http://www.mg-akademie.cz/stranky_profesori/horsky/stat/st_3_PVC.pdf*