# INTEGRÁLNÍ POČET – NEURČITÝ INTEGRÁL, URČITÝ INTEGRÁL


**Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově**

**Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia**

**Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu**



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky



**Prostějov 2010**

# Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

# Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

# Obsah

Integrální počet ... 5
Základní vzorce pro výpočet primitivní funkce ... 8
Varianta A ... 8
Základní vzorce pro výpočet primitivní funkce ... 10
Varianta B ... 10
Základní vzorce pro výpočet primitivní funkce ... 12
Varianta C ... 12
Integrální počet ... 14
Integrační metody ... 14
Integrační metody – metoda per partes ... 15
Varianta A ... 15
Integrační metody – metoda per partes ... 17
Varianta B ... 17
Integrační metody – metoda per partes ... 19
Varianta C ... 19
Integrační metody – metoda substituční ... 21
Varianta A ... 21
Integrační metody – metoda substituční ... 23
Varianta B ... 23
Integrační metody – metoda substituční ... 25
Varianta C ... 25
Integrační metody – integrace lomené funkce ... 27
Varianta D ... 27
Integrální počet ... 29
Určitý integrál ... 29
Určitý integrál ... 32

Varianta A ........................................................................................................ 32
Určitý integrál .................................................................................................... 34
Varianta B ........................................................................................................ 34
Určitý integrál .................................................................................................... 36
Varianta C ........................................................................................................ 36
Integrální počet ........................................................................................................ 38
Metody výpočtu určitého integrálu ........................................................................ 38
Metody výpočtu určitého integrálu ...................................................................... 39
Varianta A – metoda per partes ........................................................................... 39
Metody výpočtu určitého integrálu ...................................................................... 41
Varianta B – metoda substituce ............................................................................ 41
Metody výpočtu určitého integrálu ...................................................................... 43
Varianta C ........................................................................................................ 43
Integrální počet ........................................................................................................ 45
Užití určitého integrálu .......................................................................................... 45
Užití integrálního počtu ........................................................................................ 48
Varianta A – obsah rovinného útvaru .................................................................. 48
Užití integrálního počtu ........................................................................................ 50
Varianta B – obsah rovinného útvaru .................................................................. 50
Užití integrálního počtu ........................................................................................ 52
Varianta C – objem rotačního tělesa .................................................................... 52

# Integrální počet

**Primitivní funkce**

Mějme dány dvě funkce $f: y = 4x^3$ a $F: y = x^4$

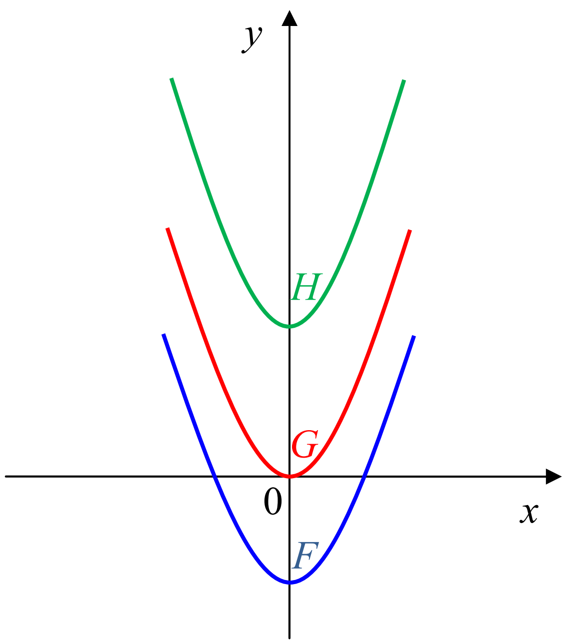
Pro derivaci funkce ***F*** platí: $\forall x \in \mathbb{R};\ F'(x) = (x^4)' = 4x^3$.

Což znamená, že funkce ***f*** je derivací funkce ***F***.

$F'(x) = f(x)$.

Najít k funkci ***f*** funkci ***F***, pro kterou $F'(x) = f(x)$ je základní úloha integrálního počtu.

***Mějme dány funkce F, f definované v otevřeném intervalu (a, b). Jestliže pro všechna*** $\forall x \in (a, b)$ ***platí:*** $F'(x) = f(x)$***, říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b).***




Známe-li v intervalu *(a, b)* k dané funkci ***f*** jednu primitivní funkci, známe jich nekonečně mnoho. Přičtením konstanty *C* jsou vyřešeny všechny případy.

Známe-li graf jedné primitivní funkce ***F*** k funkci ***f*** v intervalu, pak grafy všech primitivních funkcí k funkci ***f*** v intervalu dostaneme posunutím grafu funkce ***F*** ve směru osy *y*.

***Je-li funkce F v intervalu (a, b) primitivní funkcí k funkci f, pak každá primitivní funkci k funkci f je tvaru*** $\boldsymbol{F(x) + C}$***, kde C je reálná konstanta.***

***Pro označení primitivní funkce slouží zápis:***

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

***funkce f se nazývá integrand***

***$\int$ je integrační znak***

***C je integrační konstanta***

***dx*** je symbol, který slouží k odlišení integrační proměnné od případných parametrů.

Postup, při kterém určujeme primitivní funkci $F(x) + C$ k dané funkci *f*, nazýváme integrování nebo také integrace funkce *f*.

***Ke každé funkci spojité v intervalu existuje v tomto intervalu primitivní funkce.***

**Základní vzorce pro primitivní funkce**

$$\int 0dx = C; x \in \mathbb{R}$$

$$\int dx = x + C; x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; x \in (0, +\infty), n \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; x \in (-\infty, +\infty), n \in \mathbb{N}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C; x \in (0, +\infty)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C; x \in (-\infty, 0)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C; x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\int e^x dx = e^x + C; x \in \mathbb{R}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C; x \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C; x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tgx + C; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$

$$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cotgx + C; x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Existují-li v otevřeném intervalu *(a, b)* primitivní funkce k funkcím $f_1(x), f_2(x)$ a jsou-li $c_1, c_2$ libovolné konstanty, existuje primitivní funkce k funkci $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ a platí:

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] dx = c_1 \int f_1(x)\, dx + c_2 \int f_2(x)\, dx$$

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$$

## Základní vzorce pro výpočet primitivní funkce

### Varianta A

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int(\boldsymbol{x^5+2x^3+15})\,\boldsymbol{dx}$

*Řešení:*

Použijeme základní vzorce pro výpočet a pravidla pro integrování součtu funkcí.

$$\int(\boldsymbol{x^5+2x^3-15})\,\boldsymbol{dx} = \int x^5\,dx + \int 2x^3\,dx - \int 15\,dx =$$

$$= \int x^5\,dx + 2\int x^3\,dx - 15\int dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C_1 + 2\cdot\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_2\right) - 15\cdot(x + C_3)$$

$$= \frac{x^6}{6} + 2\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right) - 15x + (C_1 + C_2 + C_3) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - 15x + C$$

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$$\left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - 15x + C\right)' = \frac{6x^5}{6} + \frac{4x^3}{2} - 15 = \frac{x^5}{6} + 2x^3 - 15$$

| Výsledek řešení: |
| --- |
| $$\int(\boldsymbol{x^5+2x^3+15})\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - 15x + C}$$ |

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int(2x^4 - 5x^2 + 5x - 4)\,dx$

b) $\int\left(3x^5 - 4x^3 - 2x^2 - x\right)dx$

[a) $\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{5}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x + C$ ; b) $\frac{1}{2}x^6 - x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int(e^x + x)\,dx$

b) $\int(5^x - 1)\,dx$

[a) $5e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$; b) $\frac{5^x}{\ln 5} - x + C$]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int(4\cos x + 3x^2)\,dx$

b) $\int\left(\frac{5}{\sin^2 x}\right)dx$

[a) $4\sin x + x^3 + C$; b) $-5cotgx + C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int(2\sin x + 2^x)\,dx$

b) $\int\left(\frac{3}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

[a) $-2\cos x + \frac{2^x}{\ln 2} + C$; b) $3tgx - x + C$]

## Základní vzorce pro výpočet primitivní funkce

### Varianta B

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^{2}}\right) \boldsymbol{dx}$$

*Řešení*:

$$\int\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^{2}}\right) \boldsymbol{dx}=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right) dx=\int x^{\frac{1}{2}}\, dx+\int x^{\frac{2}{3}}\, dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C_{1}+\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C_{2}=$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C_{1}+\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C_{2}=\frac{2}{3}\sqrt{x^{3}}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^{5}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x}+C$$

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$$\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x}+C\right)^{\prime}=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C\right)^{\prime}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^{2}}$$

Výsledek řešení:

$$\int\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{x}^{2}}\right) \boldsymbol{dx}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{x}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int\left(2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ b) $\int\left(5\sqrt[4]{x^7}+\cos x\right)dx$

[a) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$; b) $\frac{20}{11}x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}+\sin x+C$ ]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt{5}\right)dx$ b) $\int\left(3e^x+3\sqrt[4]{x^5}\right)dx$

[a) $\frac{3}{16}x\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}x\cdot\sqrt{x}+\sqrt{5}x+C$; b) $3e^x+\frac{4}{3}x^2\cdot\sqrt[4]{x}+C$]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int\left(\frac{\sqrt[6]{x^5}}{6}+\frac{1}{x}\right)dx$ b) $\int\left(\frac{7}{4}\sqrt[4]{x}+\sqrt{\frac{x}{5}}\right)dx$

[a) $\frac{\sqrt[6]{x^5}}{11}x+\ln|x|+C$; b) $\frac{7}{5}x\cdot\sqrt[4]{x}+\frac{2}{3\sqrt{5}}x\cdot\sqrt{x}+C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int\left(\frac{\sqrt[5]{x^3}}{5}+\frac{5}{x}\right)dx$ b) $\int\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}-\frac{3}{4}\sqrt{x}\right)dx$

[a) $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{8}x+5\ln|x|+C$; b) $\frac{\sqrt{3}}{4}x\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}+C$]

## Základní vzorce pro výpočet primitivní funkce

### Varianta C

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int\left(\frac{\boldsymbol{x^3-1}}{\boldsymbol{x-1}}\right)\boldsymbol{dx}$$

*Řešení:*

$$\int\left(\frac{\boldsymbol{x^3-1}}{\boldsymbol{x-1}}\right)\boldsymbol{dx}=\int(x^2-x+1)\,dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{x^{1+1}}{1+1}+x+C=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$$

Výsledek řešení:

$$\int\left(\frac{\boldsymbol{x^3-1}}{\boldsymbol{x-1}}\right)\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C}$$

**Nelze postupovat takto!!**

$$\int\left(\frac{\boldsymbol{x^3-1}}{\boldsymbol{x-1}}\right)\boldsymbol{dx}=\boldsymbol{\frac{\int(x^3-1)\,dx}{\int(x-1)\,dx}=\frac{x^4-x}{x^2-x}+C=\frac{x^3-1}{x-1}+C=x^2-x+1+C}$$

**Žádná věta o integrování podílu neexistuje!**

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int\left(\frac{x^3}{x}-\frac{x^2}{\sqrt{x}}+1\right)dx$

b) $\int\left(\frac{x^4+x^2+1}{x}\right)dx$

[a) $\frac{x^3}{3}-\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}+x+C$; b) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\ln x+C$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int\left(\frac{x^4}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2x}\right)dx$

b) $\int\left(\frac{x^2+x-1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

[a) $\frac{2}{9}x^4\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2+C$; b) $\frac{3}{8}x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int[(x-1)^2\cdot(x+1)]\,dx$

b) $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$

[a) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$; b) $3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-12\sqrt[4]{x}+C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int[(x^2-1)\cdot(x-1)]\,dx$

b) $\int\left(\frac{4}{\sqrt[5]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$

[a) $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C$; b) $5\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+C$]

# Integrální počet

## Integrační metody

***<u>Integrování metodou per partes</u>***

Integrování po částech, je založena na derivaci součinu dvou funkcí. Jsou-li dány dvě funkce *u = u (x), v = v(x),* které mají vlastní derivace, pak pro jejich derivaci součinu platí:

$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

***Mají-li funkce u(x), v(x) v intervalu (a, b) spojité derivace, pak v (a,b) platí:***

$$\int \boldsymbol{u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x)} - \int \boldsymbol{u'(x) \cdot v(x) dx}$$

Integrování metodou per partes užíváme u funkcí, které jsou ve tvaru součinu a kde je možnost nahradit jednu funkcí derivací funkce druhé.

***<u>Integrování metodou substituční</u>***

Substituční metoda nám umožňuje zavedením nové proměnné převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze integrovat snadněji. Používáme derivaci složené funkce.

$t = g(x_0)$

$y = f(t)$

$y = [f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

***Nechť*** $F(t)$ ***je primitivní funkcí k funkci*** $f(t)$ ***v intervalu*** $(\alpha, \beta)$***. Nechť funkce*** $t = g(x)$ ***má derivaci*** $g'(x)$ ***v intervalu*** $(a, b)$. ***Pro každé*** $x \in (a, b)$ ***nechť hodnota*** $g(x)$ ***patří do intervalu*** $(\alpha, \beta)$***. Pak v intervalu*** $(a, b)$ ***je funkce*** $F(g(x))$ ***primitivní funkcí k funkci*** $f(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\int \boldsymbol{f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx} = \int \boldsymbol{f(t)\, dt = F(g(x)) + C}$$

$$t = g(x)$$

## Integrační metody – metoda per partes

### Varianta A

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int \boldsymbol{x \cdot \cos x \, dx}$

*Řešení:*

Použijeme pro výpočet metodu per partes.

$\int \boldsymbol{x \cdot \cos x \, dx} = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x - (-\cos x + C) =$

$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

$u = x \qquad v' = \cos x$

$u' = 1 \qquad v = \sin x$

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$(x \cdot sin\, x + cos\, x + C)' = sin\, x + x \cdot cos\, x - sin\, x = x \cdot cos\, x$

Výsledek řešení:

$$\int \boldsymbol{x \cdot cos\, x \, dx = x \cdot sin\, x + cos\, x + C}$$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{x \cdot \sin x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{x \cdot e^x \, dx}$

[a) $\sin x - x \cdot \cos x + C$; b) $e^X \cdot (x-1) + C$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{x^2 \cdot \ln x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot x \, dx}$

[a) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$; b) $-\frac{(5)^{-x}}{\ln 5}\left(x + \frac{1}{\ln 5}\right) + C$ ]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{2^x \cdot x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{\ln x}{x^2} dx}$

[a) $\frac{2^x}{\ln 2}\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + C$; b) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{x^3 \cdot \ln x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx}$

[a) $\frac{x^4 \cdot \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$; b) $2\sqrt{x} \cdot ln\, x - 4\sqrt{x} + C$]

## Integrační metody – metoda per partes

### Varianta B

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int \boldsymbol{x^2 \cdot \sin x \, dx}$

*Řešení:*

Použijeme pro výpočet metodu per partes, kterou aplikujeme dvakrát.

$\int \boldsymbol{x^2 \cdot \sin x \, dx} = -x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot (-\cos x)\, dx = -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot (\cos x)\, dx =$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - \int 2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - 2(-\cos x) + C =$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u = x^2$ | $v' = \sin x$ | $a = 2x$ | $b' = \cos x$ |
| $u' = 2x$ | $v = -\cos x$ | $a' = 2$ | $b = \sin x$ |

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$(-x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C)' =$

$= -2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\sin x) + 2\sin x + 2x \cdot cos\, x - 2\sin x = x^2 \cdot \sin x$

Výsledek řešení:

$$\int \boldsymbol{x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{x \cdot \ln^2 x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\ln^2 x \, dx}$

[a) $\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$; b) $x \cdot (\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\ln x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{x^2 \cdot e^x \, dx}$

[a) $x \cdot (\ln x - 1) + C$; b) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$ ]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{x \cdot \ln x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{x^2}{e^x} \, dx}$

[a) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$; b) $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{(x^2 - 3x + 2) \cdot e^x \, dx}$ b) $\int \boldsymbol{(x^2 - x) \cdot e^x \, dx}$

[a) $x^2e^x - 5xe^x + 7e^x + C$; b) $x^2e^x - 3xe^x + 3e^x + C$]

## Integrační metody – metoda per partes

### Varianta C

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int \boldsymbol{e^x \cdot \sin x \, dx}$

*Řešení:*

Použijeme pro výpočet metodu per partes, kterou aplikujeme dvakrát.

$$\int \boldsymbol{e^x \cdot \sin x \, dx} = -e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\cos x)\, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot (\cos x)\, dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u = e^x$ | $v' = \sin x$ | $a = e^x$ | $b' = \cos x$ |
| $u' = e^x$ | $v = -\cos x$ | $a' = e^x$ | $b = \sin x$ |

Výpočet integrálu metodou per partes nevede k řešení, jelikož se vracíme na začátek k funkci, kterou jsme chtěli původně integrovat. Pro tento typ výpočtu integrálů používáme početního obratu, při kterém se snažíme vypočítat hledanou primitivní funkci z početní rovnice:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx + \int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x$$

$$2\int e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x)$$

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$$\left[\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x)\right]' = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) =$$

$$= \frac{e^x}{2}\sin x - \frac{e^x}{2}\cos x + \frac{e^x}{2}\cos x + \frac{e^x}{2}\sin x = e^x \sin x$$

Výsledek řešení:

$$\int \boldsymbol{e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x)}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci: $\int \boldsymbol{e^x \cdot cos\, x\, dx}$

$[\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x + \cos x) + C]$

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci: $\int \boldsymbol{\cos^2 x\, dx}$

$[\frac{1}{2} \cdot (x + \sin x \cdot \cos x) + C]$

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci: $\int \boldsymbol{\sin^2 x\, dx}$

$[\frac{1}{2} \cdot (x - \sin x \cdot \cos x) + C]$

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci: $\int \boldsymbol{\sin(\ln x)\, dx}$

$[\frac{x}{2} \cdot [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C]$

## Integrační metody – metoda substituční

### Varianta A

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int \mathbf{12x \cdot (x^2 + 15)^{11}\, dx}$

*Řešení:*

Použijeme metodu substituční k výpočtu primitivní funkce:

$$\int \mathbf{12x \cdot (x^2 + 15)^{11}\, dx} = \int 12x \cdot t^{11} \cdot \frac{dt}{2x} = 6\int t^{11} dt = 6\frac{t^{11+1}}{11+1} + C =$$

$$= 6\frac{t^{12}}{12} + C = \frac{1}{2}t^{12} + C = \frac{1}{2}(x^2 + 15)^{12} + C$$

$t = x^2 + 15$

$dt = 2x \cdot dx$

$\frac{dt}{2x} = dx$

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$$\left[\frac{1}{2}(x^2 + 15)^{12} + C\right]^{/} = \frac{12}{2}(x^2 + 15)^{11} \cdot 2x = 12x \cdot (x^2 + 15)^{11}$$

Výsledek řešení:

$$\int \mathbf{12x \cdot (x^2 + 15)^{11}\, dx} = \mathbf{\frac{1}{2}(x^2 + 15)^{12} + C}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{x^2 \cdot (2x^3 - 4)^5\, dx}$

b) $\int \boldsymbol{4x \cdot \sqrt[4]{x^2 + 4} dx}$

[a) $\frac{1}{36}(2x^3 - 4)^6 + C$ ; b) $\frac{8}{5}(x^2 + 4) \cdot \sqrt[4]{x^2 + 4} + C$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{9x^2 \cdot (x^3 - 1)^8\, dx}$

b) $\int \boldsymbol{6x \cdot \sqrt[5]{x^2 - 8} dx}$

[a) $\frac{1}{3}(x^3 - 1)^9 + C$ ; b) $\frac{5}{2}(x^2 - 8) \cdot \sqrt[5]{x^2 - 8} + C$]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\left(\frac{1}{8}x - 11\right)^{15} dx}$

b) $\int \boldsymbol{\sin(5x)\, dx}$

[a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}x - 11\right)^{16} + C$ ; b) $-\frac{1}{5}\cos(5x) + C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^{11} dx}$

b) $\int \boldsymbol{\cos(4x)\, dx}$

[a) $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x - 4\right)^{12} + C$ ; b) $\frac{1}{4}\sin(4x) + C$]

## Integrační metody – metoda substituční

## Varianta B

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int \mathbf{2\sin x \cdot \cos^3 x\, dx}$

*Řešení:*

Použijeme metodu substituční k výpočtu primitivní funkce:

$$\int \mathbf{2\sin x \cdot \cos^3 x\, dx} = \int -2\sin x \cdot t^3 \cdot \frac{dt}{\sin x} = -2\int t^3 \cdot dt = -2\frac{t^{3+1}}{3+1} + C =$$

$$= -2\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{2}\cos^4 x + C$$

$t = \cos x$

$dt = -\sin x \cdot dx$

$-\dfrac{dt}{\sin x} = dx$

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$$\left[-\frac{1}{2}\cos^4 x + C\right]^{/} = -\frac{4}{2}\cos^3 x \cdot (-\sin x) = 2\cos^3 x \cdot \sin x$$

Výsledek řešení:

$$\int \mathbf{2\sin x \cdot \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\cos^4 x + C}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\sin x \cdot \sqrt{\cos x}\, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{6x}{(x^2+2)} dx}$

[a) $\frac{2}{3}\cos x \cdot \sqrt{\cos x} + C$ ; b) $3 \cdot \ln(x^2+2) + C$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\sin^2 x \cdot \cos x\, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{x}{(x^2+1)^2} dx}$

[a) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$ ; b) $-\frac{1}{2(x^2+1)} + C$]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\frac{\ln^2 x}{x} dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx}$

[a) $\frac{\ln^3 x}{3} + C$ ; b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{5x^2 \cdot e^{3x}\, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt[3]{x-2}} dx}$

[a) $\frac{5}{3}e^{3x} + C$ ; b) $3\sqrt[3]{(x-2)^2} + C$]

## Integrační metody – metoda substituční

### Varianta C

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$\int \boldsymbol{\sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx}$

*Řešení:*

Použijeme metodu substituční k výpočtu primitivní funkce s úpravou goniometrických vzorců:

$$\int \boldsymbol{\sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx} = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int (\sin^2 x \cdot \cos x - \sin^4 x \cdot \cos x)\, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx - \int \sin^4 x \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int t^2\, dt - \int z^4\, dz = \frac{t^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C = \boldsymbol{\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C}$$

| | |
|---|---|
| $t = \sin x$ | $z = \sin x$ |
| $dt = \cos x \cdot dx$ | $dz = \cos x \cdot dx$ |
| $\frac{dt}{\cos x} = dx$ | $\frac{dz}{\cos x} = dx$ |

Kontrolu výsledku můžeme provést následným derivováním:

$$\left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C\right]' = \frac{3}{3}\sin^2 x \cdot \cos x - \frac{5}{5}\sin^4 x \cdot \cos x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = \sin^2 x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$$

Výsledek řešení:

$$\int \boldsymbol{\sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\sin^3 x\, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx}$

[a) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$ ; b) $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + \mathrm{C}$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\cos^5 x\, dx}$ b) $\int \boldsymbol{\sin^4 x \cdot \cos^3 x\, dx}$

[a) $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$ ; b) $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + \mathrm{C}$]

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx}$ b) $\int \boldsymbol{\mathrm{tg}^3 x\, dx}$

[a)$\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$ ; b) $\ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int \boldsymbol{\frac{\cos x}{\sin^3 x} dx}$ b) $\int \boldsymbol{\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx}$

[a) $-\frac{1}{2\sin^2 x} + C$ ; b) $\cos x - 2\mathrm{arctg}(\cos x) + C$]

## Integrační metody – integrace lomené funkce

### Varianta D

Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int \frac{\mathbf{2x^2-3x-1}}{\mathbf{x^3+2x^2-x-2}}\,\mathbf{dx}$$

*Řešení:*

Použijeme metodu integrace lomené funkce:

$$\int \frac{\mathbf{2x^2-3x-1}}{\mathbf{x^3+2x^2-x-2}}\,\mathbf{dx} = \int \frac{A}{(x+1)}dx + \int \frac{B}{(x-1)}dx + \int \frac{C}{(x+2)}dx$$

$$x^3+2x^2-x-2 = (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$$

$$2x^2-3x-1 = A\cdot(x+2)\cdot(x-1) + B\cdot(x+2)\cdot(x+1) + C\cdot(x-1)\cdot(x+1)$$

$$2x^2-3x-1 = A\cdot(x^2+x-2) + B\cdot(x^2+3x+2) + C\cdot(x^2-1)$$

$$\mathbf{2}x^2 - \mathbf{3}x - \mathbf{1} = \boldsymbol{A}x^2 + \boldsymbol{A}x - \mathbf{2}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}x^2 + \mathbf{3}\boldsymbol{B}x + \mathbf{2}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}x^2 - \boldsymbol{C}$$

Z rovnice vybereme a porovnáme koeficienty, které si odpovídají společnými proměnnými.

$$2 = A + B + C$$

$$-3 = A + 3B$$

$$-1 = -2A + 2B - C$$

Po úpravě těchto rovnic (řešíme jako lineární rovnice) dostáváme hodnoty pro A, B, C:

$$A = -2;\, B = -\frac{1}{3};\, C = \frac{13}{3}$$

$$\int \frac{A}{(x+1)}dx + \int \frac{B}{(x-1)}dx + \int \frac{C}{(x+2)}d = \int -\frac{2}{(x+1)}dx + \int -\frac{1}{3(x-1)}dx +$$

$$+\int \frac{13}{3(x+2)}dx = -\int \frac{2}{(x+1)}dx - \int \frac{1}{3(x-1)}dx + \int \frac{13}{3(x+2)}dx =$$

$$= -2\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{13}{3}\ln|x+2| + C$$

Výsledek řešení:

$$\int \frac{\mathbf{2x^2-3x-1}}{\mathbf{x^3+2x^2-x-2}}\,\mathbf{dx} = \mathbf{-2\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{13}{3}\ln|x+2| + C}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx$$

$[3\ln|x-1| - \ln|x+2| + C]$

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int \frac{x-1}{2x^2+3x+1}\,dx$$

$[-3\ln|2x+1| + 2\ln|x+1| + C]$

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int \frac{2x-1}{x^2\cdot(2+3x)}\,dx$$

$[\frac{1}{x} - \frac{21}{4}\ln|2+3x| + \frac{27}{4}\ln|x| + C]$

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int \frac{x^3+6x^2+9x+7}{(x-2)^3\cdot(x-5)}\,dx$$

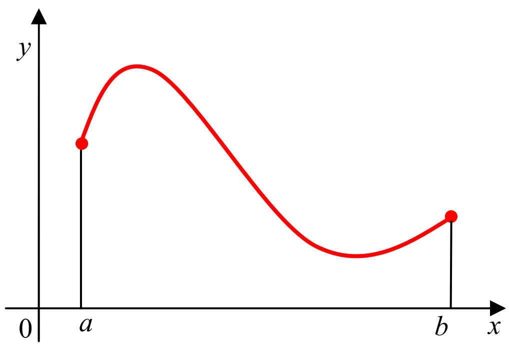
$[-\frac{100}{9}\ln|x-2| + \frac{100}{9}\ln|x-5| + \frac{64}{3(x-2)} + \frac{19}{2(x-2)^2}]$

# Integrální počet

## Určitý integrál

Základní úloha integrálního počtu je nalezení primitivní funkce k dané funkci v daném intervalu. Tato primitivní funkce souvisí s řadou konkrétních úloh pro výpočet obsahu rovinných útvarů a objemu rotačních těles.
Pojem určitý integrál se definuje na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ pomocí primitivní funkce.

***Mějme dány funkce** $F, f$ **definované na uzavřeném intervalu** $\langle a, b\rangle$**. Jestliže pro každé** $x \in \langle a, b\rangle$ **platí** $F'(x) = f(x)$**, přičemž derivací funkce** $F$ **v bodě** $a$ **rozumíme derivaci v bodě** $a$ **zprava, derivací funkce** $F$ **v bodě** $b$ **derivaci v bodě** $b$ **zleva, říkáme, že funkce** $F$ **je primitivní funkcí k funkci** $f$ **na uzavřeném intervalu** $\langle a, b\rangle$**.***




*Graf funkce $y = f(x); x \in \langle a, b\rangle$, funkce je v tomto intervalu spojitá a nezáporná. Tento graf funkce, přímky $x = a; x = b$ a přímka $y = 0$ omezují jistý rovinný útvar o jistém obsahu. Našim úkolem je určit obsah tohoto útvaru.*

*Provádíme hrubý odhad velikosti obsahu útvaru pomocí největší a nejmenší funkční hodnoty funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

***Nechť** $F$ **je primitivní funkce k funkci** $f$ **v intervalu** $\langle a, b\rangle$. **Rozdíl** $F(b) - F(a)$ **funkčních hodnot funkce** $F$ **v libovolných bodech** $a, b$ **tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce** $f$ **v mezích od** $a$ **do** $b$ **a značí se** $\int_a^b f(x)\,dx$**.***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Newtonův určitý integrál, kde *a* – je dolní mez integrálu, *b* – je horní mez integrálu.

Daných primitivních funkcí je nekonečně mnoho, jsou vzájemně posunuty o konstantu *C*. Hodnota rozdílu funkčních hodnot funkce *F* nezávisí na tom, kterou z primitivních funkcí k funkci *f* zvolíme.

$G(x) = F(x) + C$

$G(b) - G(a) = F(b) + C - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$

***Určitý integrál je reálné číslo, jednoznačně určené funkcí f a mezemi $a, b$. Za těchto podmínek udává určitý integrál obsah útvaru, ohraničeného grafem funkce f, osou x, a přímkami $x = a; x = b$.***

**Věty:**

$$\boldsymbol{\int_a^b [c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)]\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)dx}$$

Při výpočtu určitého integrálu nemáme možnost kontrolovat správnost výpočtu jako při výpočtu primitivní funkce, kde se vždy dodatečně derivováním výsledku můžeme přesvědčit o jeho správnosti.

***Je-li** f **spojitá a nezáporná funkce v intervalu** $\langle a, b\rangle$**, pak***

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx \geq 0}$$

***Jsou-li** f, g **funkce spojité v intervalu** $\langle a, b\rangle$ **a je-li** $f(x) \geq g(x)$ **pak***

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \geq \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx}$$

***Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko***

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = -\int_b^a \boldsymbol{f(x)dx}$$

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]} = -\int_b^a \boldsymbol{f(x)dx}$$

<u>**Věta o aditivnosti určitého integrálu.**</u>

***Je-li funkce** f **spojitá v intervalu, který obsahuje libovolně položené body** a, b, c**, pak platí:***

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int_a^c \boldsymbol{f(x)dx} + \int_c^b \boldsymbol{f(x)dx}$$

## Určitý integrál

### Varianta A

Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{-2}^{3} (4x^3 + 1)\, dx$$

*Řešení:*

Použijeme základní vzorce pro výpočet a pravidla pro integrování součtu funkcí.

$$\int_{-2}^{3} (4x^3 + 1)\, dx = \int_{-2}^{3} 4x^3\, dx = \int_{-2}^{3} 1\, dx = \left[\frac{4x^{3+1}}{3+1}\right]_{-2}^{3} + [x]_{-2}^{3} = [x^4]_{-2}^{3} + [x]_{-2}^{3} =$$

$$[3^4 - (-2)^4] + [3 - (-2)] = (81 - 16) + (5) = 70$$

Výsledek řešení:

$$\int_{-2}^{3} (4x^3 + 1)\, dx = 70$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte určitý integrál:

a) $\int_0^2 (4x^3)\,dx$ b) $\int_{-2}^{0} \left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

[a) 16 ; b) $\frac{8}{6}$]

2) Vypočtěte určitý integrál:

a) $\int_{-1}^{2} (2x^3 - 4)\,dx$ b) $\int_{-1}^{1} \left(x^5 + \frac{1}{2}x\right) dx$

[a) $-4{,}5$ ; b) 0]

3) Vypočtěte určitý integrál:

$\int_0^{\pi} 4\sin x\,dx$ [8]

4) Vypočtěte určitý integrál:

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\,dx$ [1]

## Určitý integrál

## Varianta B

Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{-2}^{1} \mathbf{3\sqrt[3]{x^2}\,dx}$$

*Řešení*:

$$\int_{-2}^{1} 5\sqrt[3]{x^2}\,dx = \int_{-2}^{1} 5x^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{5x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_{-2}^{1} = \left[\frac{5x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_{-2}^{1} = \left[3x^{\frac{5}{3}}\right]_{-2}^{1} = 3\left[x\cdot\sqrt[3]{x^2}\right]_{-2}^{1} =$$

$$= 3\left[\left(1\cdot\sqrt[3]{(1)^2}\right) - \left(-2\cdot\sqrt[3]{(-2)^2}\right)\right] = 3\left(1 + 2\sqrt[3]{4}\right) = 3 + 6\sqrt[3]{4}$$

Výsledek řešení:

$$\int_{-2}^{1} \mathbf{5\sqrt[3]{x^2}\,dx = 3 + 6\sqrt[3]{4}}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte určitý integrál:

a) $\int_0^8 4\sqrt[3]{x}\,dx$

b) $\int_1^{16} \sqrt[4]{x^5}\,dx$

[a) 48; b) 511 ]

2) Vypočtěte určitý integrál:

a) $\int_{-9}^0 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1\right) dx$

b) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) dx$

[a) 0; b) −5,5]

3) Vypočtěte určitý integrál:

$\int_1^e \frac{2}{x} dx$

[2]

4) Vypočtěte určitý integrál:

$\int_0^2 2^x\,dx$

[$\frac{3}{\ln 2}$]

## Určitý integrál

## Varianta C

Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{-2}^{6} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) dx$$

*Řešení:*

$$\int_{-2}^{6} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) dx = \int_{-2}^{6} (x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-2}^{6} = \left[\frac{6^2}{2} + 6 - \left(\frac{(-2)^2}{2} - 2\right)\right] = 24$$

Výsledek řešení:

$$\int_{-2}^{6} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) dx = 24$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

1) Vypočtěte určitý integrál:

a) $\int_{-1}^{3} (x-1)\cdot(x-2)\, dx$

b) $\int_{1}^{2} (2x-1)\cdot(x+2)\, dx$

[a) $\frac{16}{3}$; b) $\frac{37}{6}$]

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int_{e}^{e^2} \left(-\frac{4}{x}\right) dx$

b) $\int_{0}^{2} e^x\, dx$

[a) $-7$; b) $e^2-1$]

3) Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x - x)\, dx$$

$[\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{18}]$

4) Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)\, dx$$

$[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}]$

# Integrální počet

## Metody výpočtu určitého integrálu

**metoda substituce**

Slouží k výpočtu určitého integrálu ze složené funkce, kde nahradíme elementární funkci novou proměnnou a zjednodušíme tak složenou funkci. V případě zavedení nové proměnné se podle zvolené substituce změní také meze určitého integrálu.

Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a, b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b f[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Nové meze v substituci $t = g(x)$ určíme jako funkční hodnoty $g(a)$, $g(b)$.

**metoda per partes**

***Jsou-li*** $u = u(x), v = v(x)$ ***funkce mající v intervalu*** $\langle a, b\rangle$ ***spojité derivace, pak platí***

$$\int_a^b u \cdot v' \cdot dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u' \cdot v \cdot dx$$

Hodnoty horní a dolní meze se v metodě per partes nemění oproti původním hodnotám mezí.

## Metody výpočtu určitého integrálu

### Varianta A – metoda per partes

Vypočti určitý integrál metodou per partes:

$$\int_{0}^{\pi} (x+1) \cdot \sin x \, dx$$

*Řešení:*

Použijeme pro výpočet metodu per partes.

$$\int_{0}^{\pi} (x+1) \cdot \sin x \, dx = [-(x+1) \cdot \cos x]_0^\pi - \int_{0}^{\pi} -\cos x \, dx =$$

$$= -[(x+1) \cdot \cos x]_0^\pi + \int_{0}^{\pi} \cos x \, dx = -[(x+1) \cdot \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi =$$

$$= -[(\pi+1) \cdot \cos \pi - (0+1) \cdot \cos 0] + \sin \pi - \sin 0 = -[-\pi - 1 - 1] + 0 = 2 + \pi$$

$u = x + 1 \qquad v' = \sin x$

$u' = 1 \qquad v = -\cos x$

Výsledek řešení:

$$\int_{0}^{\pi} (x+1) \cdot \sin x \, dx = 2 + \pi$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x \, dx$$

$[2e - 5]$

2) Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_0^3 (x + 1) \cdot e^x \, dx$$

$[3e^4]$

3) Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx$$

$[\frac{1}{9}(2e^3 - 1)]$

4) Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_1^e x \cdot \ln x \, dx$$

$[\frac{1}{4}(e^2 - 1)]$

## Metody výpočtu určitého integrálu

## Varianta B – metoda substituce

Vypočti určitý integrál metodou substituce:

$$\int_{0}^{\pi} 2x \cdot \sin(x^2)\, dx$$

*Řešení:*

$$\int_{0}^{\pi} 2x \cdot \sin(x^2)\, dx = \int_{0}^{\pi^2} 2x \cdot \sin(t) \frac{dt}{2x} = \int_{0}^{\pi^2} \sin(t)\, dt = [-\cos t]_0^{\pi^2} = -[\cos \pi^2 - \cos 0]$$

$$= -(-1 - 1) = 2$$

$t = x^2$ $\qquad$ $t(0) = 0^2 = 0$

$dt = 2x \cdot dx$ $\qquad$ $t(\pi) = \pi^2$

$$\frac{dt}{2x} = dx$$

Výsledek řešení:

$$\int_{0}^{\pi} 2x \cdot \sin(x^2)\, dx = 2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_{-1}^{2} \boldsymbol{x \cdot \mathrm{e}^{1+x^2}\, dx}$$

$[\frac{1}{2}(e^5 - e^2)]$

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$[\frac{3}{2}]$

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_{-1}^{3} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$$

[3]

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_{-1}^{3} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$[e^2 - 1]$

## Metody výpočtu určitého integrálu

## Varianta C

Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$$

*Řešení:*

$$\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx = \int_{2}^{3} \frac{t+1}{t-1} 2t \cdot dt = 2\int_{2}^{3} \frac{t^2+t}{t-1}\,dt = 2\int_{2}^{3} \left(t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2}+2t+2\ln|t-1|\right]_2^3 = 2\left[\left(\frac{3^2}{2}+2\cdot 3+2\ln|3-1|\right)-\left(\frac{2^2}{2}+2\cdot 2+2\ln|2-1|\right)\right]$$

$$= 2[(10{,}5+2\ln 2)-(6)] = 9+4\ln 2$$

$t = \sqrt{x+1}$ $\quad$ $t(3) = \sqrt{3+1} = 2$ $\quad$ $(t^2+t) \div (t-1) = t+2+\frac{2}{t-1}$

$t^2 = x+1$ $\quad$ $t(8) = \sqrt{8+1} = 3$

$2t \cdot dt = dx$

Výsledek řešení:

$$\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx = 9+4\ln 2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$[\frac{128}{15}]$

2) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

$[\frac{6}{5}]$

3) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

$$\int_1^2 (3x+2)\cdot \ln x\,dx$$

$[10\ln 2 - \frac{17}{4}]$

4) Vypočtěte primitivní funkci k funkci:

a) $\int_1^e \ln x\,dx$

$[1]$

# Integrální počet

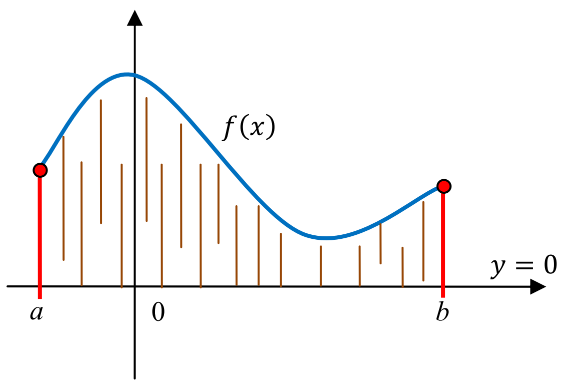
## Užití určitého integrálu

Pomocí určitého integrálu je možné vypočítat obsahy rovinných útvarů, objemy a povrchy rotačních těles a délky rovinných křivek.

**Výpočet obsahu rovinného útvaru**

Při výpočtu obsahu musí být daný útvar vymezen po svém obvodu. Nejčastěji je omezen osou $x$ (přímka o rovnici $y = 0$), dolní a horní hranicí, což jsou přímky $(x = a; x = b)$, dále grafem spojité nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.

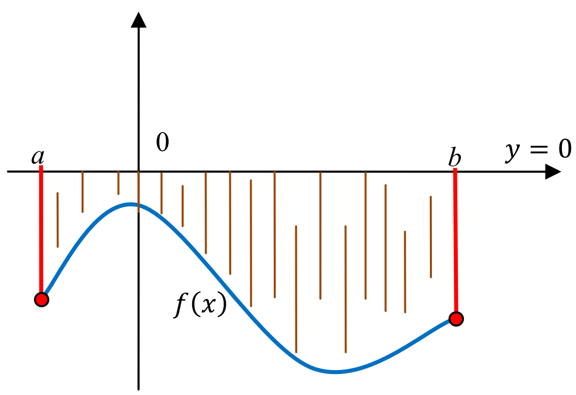
Pro obsah takového útvaru platí:




$$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Při řešení některých úloh může nastat situace, kdy integrovaná funkce nabývá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nekladných hodnot, tzn., že integrál $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

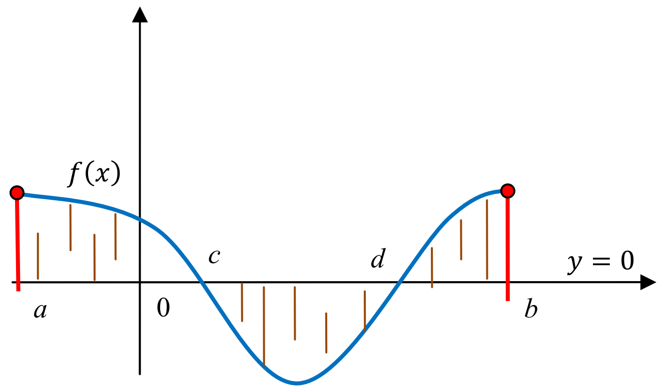
Potom obsah útvaru omezeného takovouto funkcí musíme určit jako absolutní hodnotu příslušného určitého integrálu:




$$\boldsymbol{S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Posledním případem pro umístění útvaru a jeho výpočtu obsahu je možnost, že funkce omezující tento útvar může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.
V tomto případě rozdělíme interval na části, ve kterých nabývá funkce kladných hodnot a části, ve kterých nabývá záporných hodnot. Výpočet pak provedeme:

$$\boldsymbol{S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx}$$

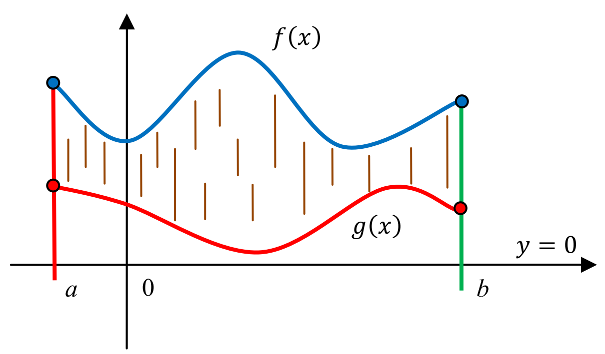



**<u>Výpočet obsahu útvaru omezeného dvěma funkcemi</u>**

Útvar je ohraničen dvěma křivkami $y = f(x); y = g(x); x = a; x = b$
Obě funkce jsou nezáporné na intervalu $\langle a, b\rangle$, spojité a $f(x) \geq g(x)$, pro $x \in \langle a, b\rangle$.
Pro obsah takovéhoto útvaru dostáváme:

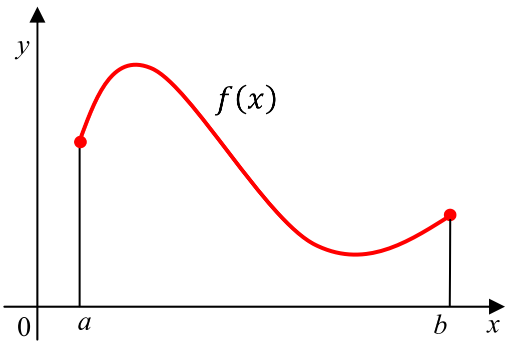
$$\boldsymbol{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Tento vzorec platí i pro funkce, které jsou záporné, jelikož velikost obsahu mezi těmito funkcemi je nezávislý na společném posunutí těchto funkcí.



**Výpočet objemu rotačních těles**

Jde o výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru omezeného funkcí $f(x)$ a přímkami $x = a; x = b$ kolem osy $x$.




***Pro objem rotačního tělesa platí:***

$$\boldsymbol{V = V(b) - V(a) = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

(Objem válce rotačnímu tělesu vepsanému a objem válce rotačnímu tělesu opsanému)

$$\boldsymbol{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$

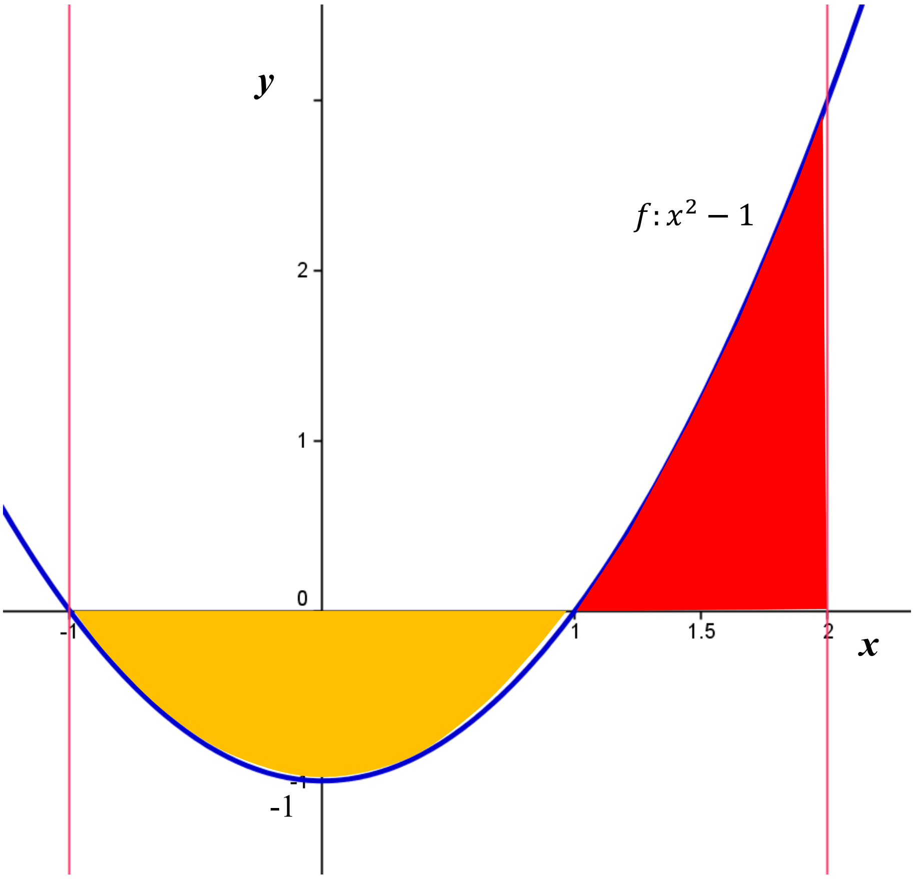
## Užití integrálního počtu

### Varianta A – obsah rovinného útvaru

Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:

$f: y = x^2 - 1; y = 0; x = -1; x = 2$

Řešení:




Grafem funkce je parabola, která je posunuta po ose $y$. Společně s dalšími podmínkami nám ohraničuje útvar, jehož obsah máme určit. Daný útvar rozdělíme na dvě části, pod osou $x$ (oranžový), nad osou $x$ (červený). Pro obsah daného útvaru platí:

$$S = S_1 + S_2 = \left| \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx \right| + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_{-1}^{1} \right| + \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_{1}^{2} =$$

$$= \left| \left[ \frac{1^3}{3} - 1 - \left( \frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right) \right] \right| + \left[ \frac{2^3}{3} - 2 - \left( \frac{(1)^3}{3} - 1 \right) \right] = \left| -\frac{4}{3} \right| + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Výsledek řešení:

Obsah daného útvaru omezeného křivkami $f: y = x^2 - 1; y = 0; x = -1; x = 2$, je $\mathbf{\frac{8}{3}}$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete obsah útvaru vymezeného křivkou o funkci: $y = \frac{1}{3}x^2$; $\langle -2; 2\rangle$.

[1,8]

2) Určete obsah útvaru vymezeného křivkou o funkci: $y = \sqrt{x}$; $\langle 0; 16\rangle$.

[85,3]

3) Určete obsah útvaru vymezeného křivkami: $y = x$; $y = x + \sin^2 x$; $x = 0$; $x = \pi$.

$[\frac{\pi}{2}]$

4) Určete obsah útvaru vymezeného křivkami: $y = e^{-x} \cdot \sin x$; $y = 0$; $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

$[\frac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}]$

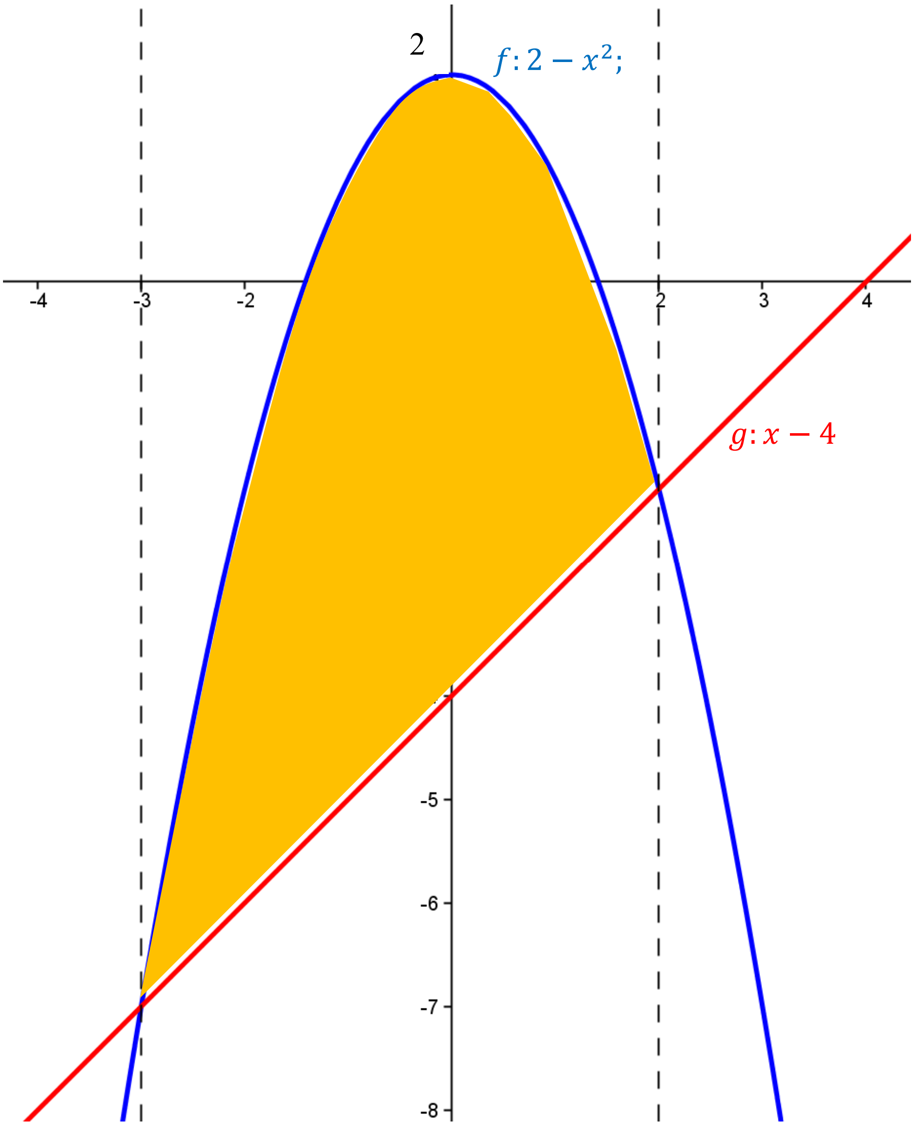
## Užití integrálního počtu

### Varianta B – obsah rovinného útvaru

Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami:

$f: y = 2 - x^2; g: y = x - 4$

Řešení:




Grafy funkcí *f, g* vymezují obsah, jehož velikost máme určit. Nejprve potřebujeme určit průsečíky obou grafů funkcí, abychom našli dolní a horní mez, pro výpočet obsahu.

$f: y = 2 - x^2; g: y = x - 4$

$2 - x^2 = x - 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = -3;\ x_2 = 2$

Průsečíky funkcí jsou body $-3; 2$.

$$S = \int_{-3}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-3}^{2} [2 - x^2 - (x - 4)]dx = \int_{-3}^{2} (-x^2 - x + 6)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} =$$

$$= \left[-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2\right] - \left[-\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} + 6 \cdot (-3)\right] = \left(\frac{22}{3}\right) - \left(-\frac{27}{2}\right) = \frac{125}{6}$$

Výsledek řešení:

Obsah daného útvaru omezeného křivkami $f: y = 2 - x^2; g: y = x - 4$, je $\boldsymbol{\frac{125}{6}}$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete obsah útvaru ohraničeného křivkou $y = 0{,}5x^2$ a přímkou $y = x + 4$

[18]

2) Určete obsah útvaru ohraničeného křivkou $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ a osami souřadnic.

[13,5]

3) Určete obsah útvaru ohraničeného oblouky dvou protínajících se parabol

$y = 2x^2 - 8x + 3, y = x^2 - 4x + 6$ [4]

4) Určete obsah útvaru ohraničeného oblouky kubickou funkcí $y = x^3$ a přímkou $y = x$.

[0,5]

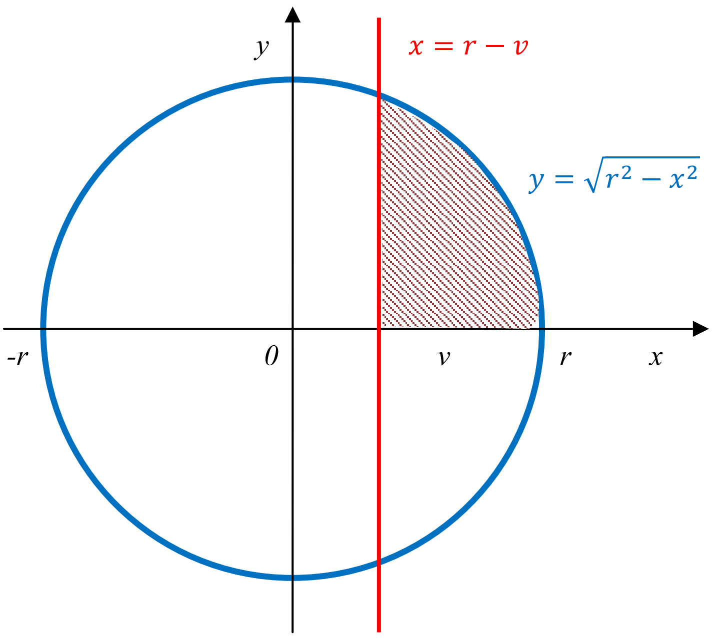
## Užití integrálního počtu

### Varianta C – objem rotačního tělesa

Vypočtěte objem kulové úseče, která je částí koule o poloměru $5cm$ a jejíž výška je $3cm$.

Řešení:

Nejprve potřebujeme získat předpisy funkce křivky, jejíž rotací vznikne objem kulové výseče. Dále potřebujeme získat horní a dolní mez pro výpočet objemu.




Kružnice má analytické vyjádření: $x^2 + y^2 = r^2$, tzn., že funkce se udávající předpis křivky je:$f: y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Další křivky určující výšku kulové úseče jsou: $g: x = r - v$, $h: x = r$, $i: y = 0$.

Dolní mez je určena: $g: x = r - v = 5 - 3 = 2$

Horní mez je určena: $h: x = r = 5$

$$V = \pi \int_{r-v}^{r} f^2(x)dx = \pi \int_{r-v}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{r-v}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} =$$

$$= \pi \left[r \cdot r^2 - \frac{r^3}{3} - \left((r - v) \cdot r^2 - \frac{(r - v)^3}{3}\right)\right] =$$

$$= \pi \left[\frac{2r^3}{3} - r^3 + vr^2 + \frac{1}{3}(r^3 - 3r^2v + 3rv^2 - v^3)\right] = \pi \left(rv^2 - \frac{1}{3}v^3\right) = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi v^2(3r - v) = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot (3 \cdot 5 - 3) = 36\pi$$

| |
|---|
| Výsledek řešení:<br>Objem kulové úseče je $36\pi cm^3$ . |

***Příklad***:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení***:

1) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = x, y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2$ kolem osy $x$.

$[\frac{5}{6}\pi]$

2) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = x^2, y = x$, kolem osy $x$.

$[\frac{2}{15}\pi]$

3) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = x^2 + 3,\ x = -1, x = 1, y = 0$ kolem osy $x$.

$[\frac{112}{5}\pi]$

4) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y^2 + x - 4 = 0,\ x = 0$ kolem osy $y$.

$[\frac{512}{15}\pi]$