

# GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE

---

**Gymnázium Jiřího Wolkeru v Prostějově**  
**Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia**  
**Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve**  
**vyučování matematiky na gymnáziu**



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

**Prostějov 2010**

## Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

### Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

## Obsah

Goniometrie.....	6
Funkce.....	6
Funkce.....	7
Varianta A.....	7
Funkce.....	10
Varianta B.....	10
Funkce.....	12
Varianta C.....	12
Goniometrické funkce 1.....	15
Goniometrické funkce ostrého úhlu.....	15
Orientovaný úhel a jeho velikost.....	16
Goniometrické funkce 1.....	18
Varianta A.....	18
2. Goniometrické funkce 1.....	20
Varianta B.....	20
Goniometrické funkce 1.....	22
Varianta C.....	22
Goniometrické funkce 2.....	24
Funkce sinus a kosinus.....	24
Grafy funkcí sinus a kosinus.....	27
Goniometrické funkce 2.....	30
Varianta A.....	30
Goniometrické funkce 2.....	32
Varianta B.....	32
Goniometrické funkce 2.....	37
Varianta C.....	37

Goniometrické funkce 3 .....	41
Funkce tangens a kotangens .....	41
Grafy funkcí tangens a kotangens .....	45
Goniometrické funkce 3 .....	47
Varianta A .....	47
2. Goniometrické funkce 3 .....	49
Varianta B .....	49
Goniometrické funkce 3 .....	51
Varianta C .....	51
Goniometrické rovnice .....	56
Goniometrické rovnice .....	60
Varianta A .....	60
Goniometrické rovnice .....	63
Varianta B .....	63
Goniometrické rovnice .....	67
Varianta C .....	67
Goniometrické vzorce .....	69
Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi .....	69
Součtové vzorce a vzorce pro součet a rozdíl .....	69
Pro goniometrické funkce sinus a kosinus platí tyto věty: .....	69
Vzorce pro poloviční a dvojnásobný úhel .....	70
Trigonometrie .....	71
Další trigonometrické věty .....	72
Goniometrické vzorce a trigonometrie .....	73
Varianta A .....	73
Goniometrické vzorce a trigonometrie .....	76
Varianta B .....	76

Goniometrické vzorce a trigonometrie.....	78
Varianta C .....	78

## Goniometrie

### Funkce

#### Definice:

---

Funkce  $f$  se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové číslo  $p > 0$ , že pro každé  $k \in \mathbb{Z}$  platí následující podmínky:

- a) Je-li  $x \in D_f$ , pak  $x + kp \in D_f$ ;
- b)  $f(x + kp) = f(x)$ .

Číslo  $p$  se nazývá **perioda funkce  $f$** .

---

Pokud v množině čísel, která jsou periodami periodické funkce  $f$ , existuje nejmenší kladné číslo, nazýváme ho nejmenší perioda funkce  $f$ .

#### Definice:

---

Funkce  $h$  se nazývá **funkce složená** z funkcí  $f, g$  (v tomto pořadí), právě když platí:

- 1.) Definičním oborem funkce  $h$  je množina všech těch  $x \in D_g$ .
- 2.) Pro každé  $x \in D_h$  je  $h(x) = g(f(x))$ .

Funkce  $h$  se označuje  $g \circ f$ .

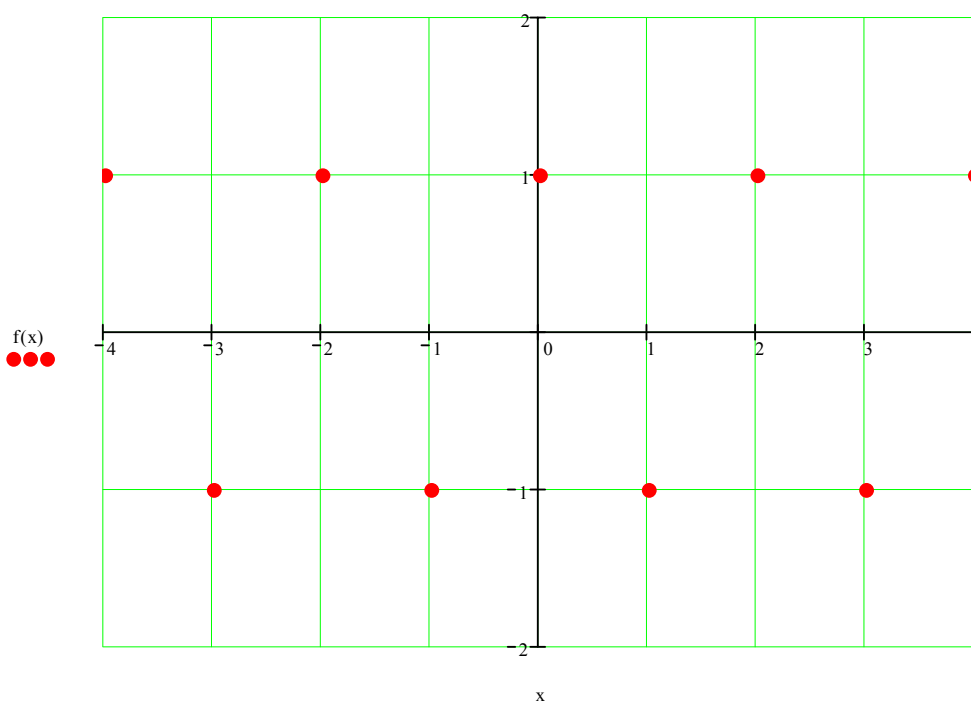
---

## Funkce

### Varianta A

**Příklad:** Načrtněte graf funkce  $y = (-1)^x, x \in \mathbf{Z}$ .

Řešení:



Hodnoty funkce se pravidelně opakují:

Pro každé číslo  $x \in \mathbf{Z}$ , které lze zapsat ve tvaru  $x = 2k$ , kde  $k$  je celé číslo, je  $(-1)^x = 1$ ;

pro každé číslo  $x \in \mathbf{Z}$ , které lze vyjádřit ve tvaru  $x = 2k + 1$ , kde  $k$  je celé číslo, je

$(-1)^x = -1$ .

Hodnoty se pravidelně opakují, funkce je periodická.

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Jaká je množina všech period funkce  $y = (-1)^x$ , kde  $x \in \mathbf{Z}$ ? Má funkce nejmenší periodu?

2) Zjistěte, které z daných funkcí jsou periodické, určete jejich nejmenší periodu (pokud existuje) a načrtněte jejich grafy:

a)  $y = 1^x, x \in \mathbf{Z}$ ,

b)  $y = 1^x + (-1)^x, x \in \mathbf{Z}$

3) Rozhodněte, zda funkce  $y = 2$  je periodická. Má tato funkce nejmenší periodu?

4) Zjistěte, které z uvedených funkcí jsou periodické. Určete jejich nejmenší periody (pokud existují). Načrtněte jejich grafy.

a)  $y = (-1)^{3x}, x \in \mathbf{Z}$

b)  $y = 1^{3x} + (-1)^{3x}, x \in \mathbf{Z}$

Výsledek řešení:

1.) Periodou je  $2n$ , kde  $n$  je přirozené číslo, nejmenší perioda je 2.

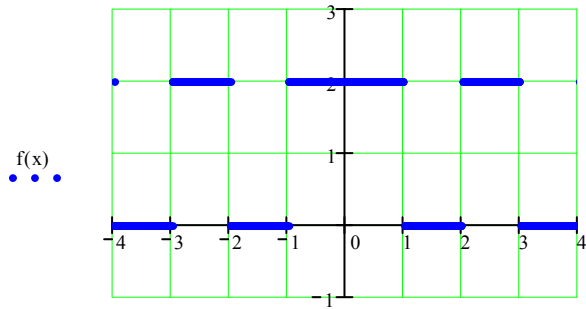
2.) a) Nejmenší perioda 1, pro všechna  $x \in \mathbf{Z}$ , je hodnota funkce 1 b) Nejmenší perioda 2, pro sudá  $x \in \mathbf{Z}$ , je hodnota funkce 2, pro lichá  $x \in \mathbf{Z}$ , je hodnota funkce 0.

3) Je periodická, nemá nejmenší periodu.

4) a) Je periodická s nejmenší periodou 2, pro lichá  $x$  je  $(-1)^{3x} = -1$  je, pro sudá  $x$  je  $(-1)^{3x} = 1$ ;

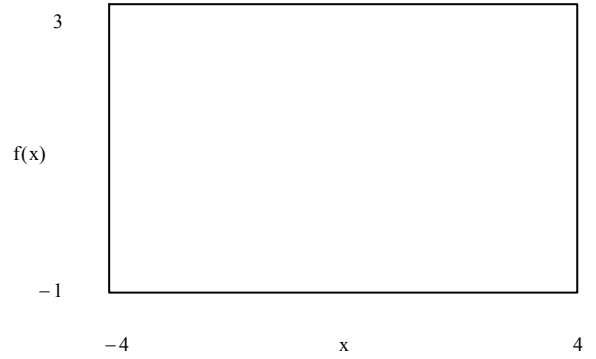
b) Je periodická s nejmenší periodou 2, pro lichá  $x$  je  $(-1)^{3x} + 1^{3x} = 0$  je, pro sudá  $x$  je  $(-1)^{3x} + 1^{3x} = 2$ .

2a)



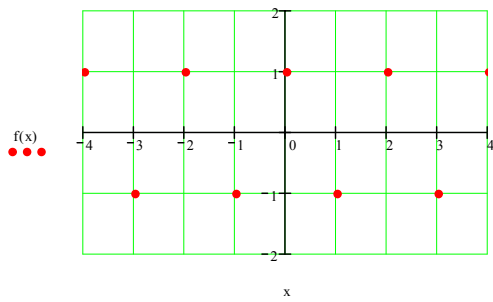
2b)

$$f(x) := 1^{\text{trunc}(x)} + (-1)^{\text{trunc}(x)}$$



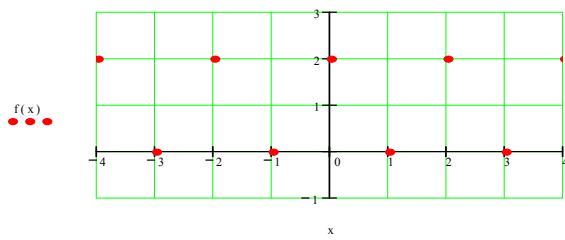
4a)

$$f(x) := (-1)^{3x}$$



4b)

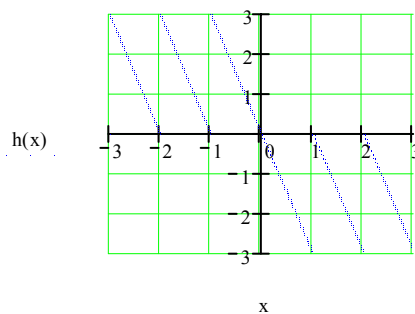
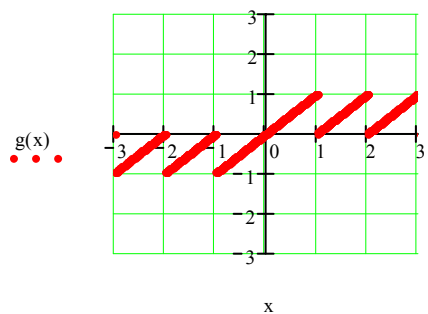
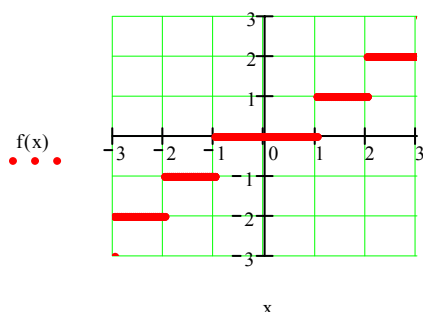
$$f(x) := (-1)^{3x} + 1^{3x}$$



## Funkce

### Varianta B

**Příklad:** Každé reálné číslo  $b$  lze zapsat ve tvaru  $b = c + d$ , kde  $c$  je celé číslo a  $d \in \langle 0, 1 \rangle$ . Číslo  $c$  se nazývá celá část čísla  $b$  a označujeme je  $[b]$ . Na obrázku jsou sestrojeny grafy funkcí  $f: y = [x]$  a  $g: y = x - [x]$ . Je některá z těchto funkcí periodická?



Řešení:

$y = [x]$  není periodická

$y = x - [x]$  je periodická s nejmenší periodou 1

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Načrtněte graf funkce, která je periodická a navíc má ještě tyto vlastnosti:

- Je omezená a sudá,
- Je shora omezená, ale není zdola omezená,
- Má minimum, nemá maximum.

2) Zjistěte, zda je daná funkce periodická, určete její nejmenší periodu (pokud existuje) a načrtněte její graf:

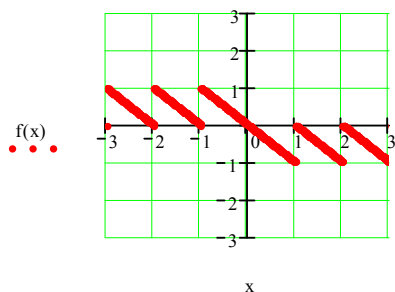
$$y = [x] - x$$

3) Načrtněte grafy funkcí:

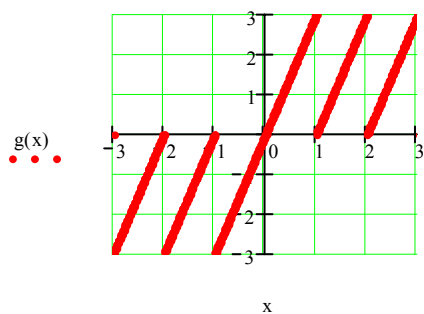
- $y = 3x - 3[x]$
- $y = 3[x] - 3x$

4) Rozhodněte, zda funkce  $y = 1^{[x]} + (-1)^{[x]}$  je periodická. Načrtněte její graf.

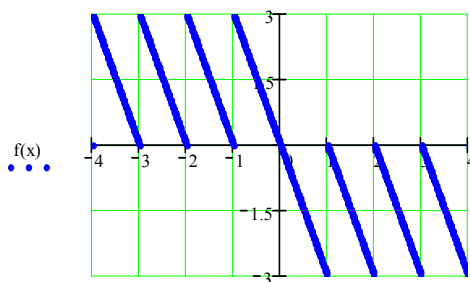
1.)



2a.)



2b.)



## Funkce

### Varianta C

**Příklad:** Jsou dány funkce  $f: y = \frac{1}{x}$ ,  $g: y = 3x - 2$ . Zapište funkci složenou z funkcí  $f, g$  (v tomto pořadí) pomocí předpisu  $y = (g \circ f)(x)$ .

Řešení:

Nebudeme provádět záměnu označení proměnných ve vyjádření funkcí  $f$  a  $g$ .

1.)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ ; do  $D_{g \circ f}$  patří všechna  $x \in D_f$ , pro která je  $f(x) \in D_g$ , čili  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Tuto podmínku splňuje každé  $x \in D_f$ , proto  $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2.) Pro každé  $x \in D_{g \circ f}$  je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) - 2 = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 = \frac{3}{x} - 2.$$

Je tedy  $g \circ f: y = \frac{3}{x} - 2$ .

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Jsou dány funkce  $g_1: y = 2x - 3$ ,  $g_2: y = x + 1$ . Určete složené funkce  $g_2 \circ g_1$ ;  $g_1 \circ g_2$ .

2) Jsou dány funkce  $k_1: y = \frac{1}{x}$ ,  $k_2: y = \sqrt{1 - x^2}$ . Určete složené funkce

$$k_1 \circ k_2; k_2 \circ k_1; k_1 \circ k_1$$

3) Máme dány funkce  $r: y = x^2 + 1$ ,  $s: y = -x + 2$ . Určete složené funkce  $s \circ r$ ;  $r \circ s$  a sestrojte jejich grafy.

4) Uvažujte funkce  $u: y = \log x$ ,  $v: y = |x - 1|$ . Sestrojte grafy funkcí  $u \circ v$ ;  $v \circ u$ .

$$1.) y = 2x - 2 ; \quad y = 2x - 1$$

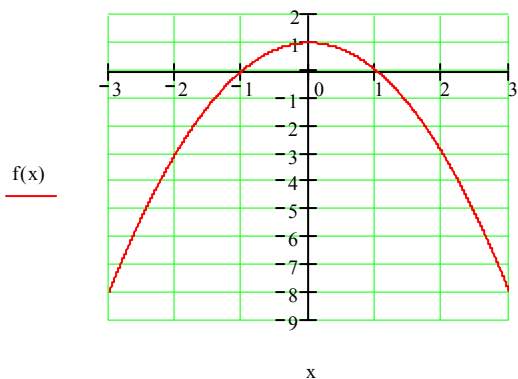
$$2.) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; \quad y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} ; \quad y = x$$

$$3.) y = -x^2 + 1 \quad y = x^2 - 4x + 5$$

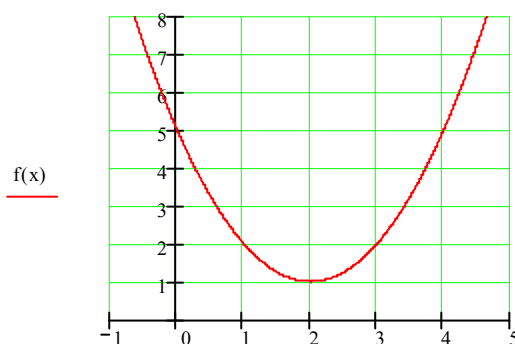
$$4.) y = \log|x - 1| ; \quad y = |\log x - 1|$$

## Grafy k úlohám

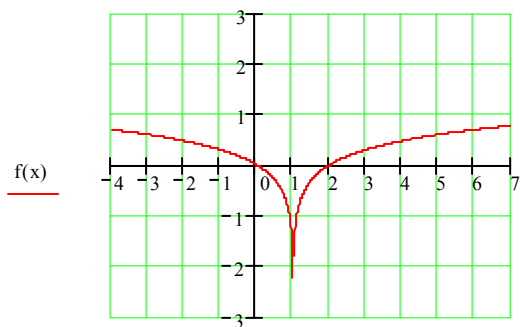
3.a)



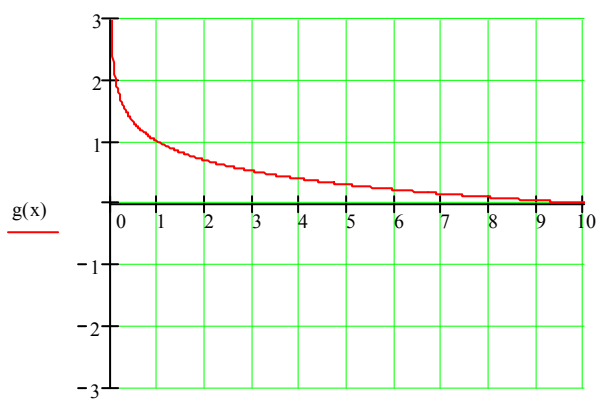
3.b)



4.a)



4.b)

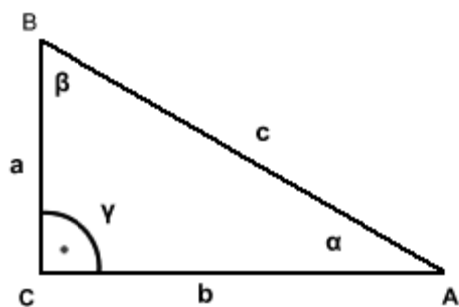


## Goniometrické funkce 1

### Goniometrické funkce ostrého úhlu

#### Definice:

- 
- **Sinus**  $\alpha$  je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu  $\alpha$  a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.
  - **Kosinus** je poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu  $\alpha$  a délky přepony.
  - **Tangens** je poměr délek odvěsny protilehlé k úhlu  $\alpha$  a odvěsny přilehlé.
  - **Kotangens** je poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu  $\alpha$  a odvěsny protilehlé.
- 



## Orientovaný úhel a jeho velikost

### Definice:

Uspořádaná dvojice polopřímek  $VA, VB$  se společným počátkem  $V$  se nazývá **orientovaný úhel**  $\widehat{AVB}$ .

Tento úhel se zapisuje  $\widehat{AVB}$ .

Polopřímka  $VA$  se nazývá **počáteční rameno**, polopřímka  $VB$  **koncové rameno** orientovaného úhlu  $\widehat{AVB}$ , bod  $V$  **vrchol** orientovaného úhlu  $\widehat{AVB}$ .

Kladný smysl otáčení- proti směru hodinových ručiček

Záporný směr otáčení- po směru hodinových ručiček

### Definice:

Velikost toho z úhlů  $\alpha, \beta$ , který opiše polopřímka při otočení z počátečního ramene  $VA$  do koncového ramene  $VB$  v kladném smyslu, se nazývá **základní velikost orientovaného úhlu**  $\widehat{AVB}$ .

### Definice:

**Velikostí** orientovaného úhlu  $\widehat{AVB}$ , jehož základní velikost v obloukové míře je  $\alpha$ , se nazývá každé číslo  $\alpha + k \cdot 2\pi$ , kde  $k$  je libovolné celé číslo.

### Věta:

Je-li  $\varphi$  jedna z velikostí orientovaného úhlu  $\widehat{AVB}$ , pak množina všech čísel, která lze psát ve tvaru  $\varphi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , je rovna množině všech velikostí úhlu  $\widehat{AVB}$ .

Je-li v rovině dána polopřímka  $VA$  a je-li dáno libovolné reálné číslo  $x$ , pak v této rovině existuje právě jeden orientovaný úhel  $\widehat{AVB}$ , jehož jedna velikost v obloukové míře je  $x$ .

Jednotková kružnice je kružnice se středem  $S$  a poloměrem  $r = 1$ . Délka této kružnice je  $2\pi$ .

Ke středovému úhlu  $360^\circ$  tedy přísluší délka oblouku  $2\pi$ .

### Stupňová míra

- a) Velikost úhlu zapisujeme ve stupních - jeden stupeň,
- b) Menší jednotky minuta; 1 vteřina,
- c) ;

### Oblouková míra

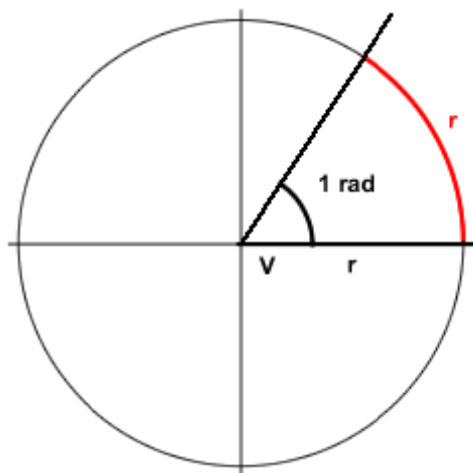
- a) Velikost úhlu zapisujeme v radiánech,
- b) Jednotka rad- jeden radián,

### Definice:

**Radián** je středový úhel, který přísluší na jednotkové kružnici oblouku o délce 1.

Z přímé úměrnosti: — —.

---



## Goniometrické funkce 1

### Varianta A

**Příklad:** V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  je délka odvěsny  $a = 7\text{cm}$ ,  $\cot \beta = \frac{5}{4}$ . Vypočítejte délky zbývajících stran tohoto trojúhelníku.

Řešení:

Odvěsna  $a = 7\text{cm}$

$$\cot \beta = \frac{5}{4}$$

V trojúhelníku  $ABC$

$c$ ... přepona;  $b$ ... odvěsna.

$$\cot \beta = \frac{a}{b}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{b}; \frac{5}{4}b = 7$$

$$5b = 28$$

$$b = \frac{28}{5} = 5,6\text{cm}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{7^2 + 5,6^2} \doteq 8,96\text{cm}$$

V daném trojúhelníku je odvěsna  $b = 5,6\text{cm}$  a přepona  $c \doteq 8,96\text{cm}$ .

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  je délka přepony  $c = 10\text{cm}$ ,  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ . Vypočítejte délky stran  $AC, BC$ .

2) Určete délky všech stran a velikosti ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  s přeponou  $AB$ :

c)  $a = 24\text{cm}, c = 30\text{cm}$

d)  $a = 10\text{dm}, b = 40\text{dm}$

3) Je dána kružnice o poloměru  $10\text{cm}$  a její tětiva, která má délku  $12\text{cm}$ . Vypočítejte velikost středového úhlu, která přísluší této tětivě.

4) Nakládací rampa o délce  $12$  metrů je na jednom konci o tři metry výše než na druhém konci. Jak velký úhel svírá rampa s vodorovnou rovinou?

1.)  $|BC| = 6\text{cm}, |AC| = 8\text{cm}$

2) a)  $b = 18\text{cm}, \alpha \doteq 53^\circ 10', \beta \doteq 36^\circ 50'$ ; b)  $c = 41,2\text{dm}$ ,

$\alpha \doteq 14^\circ, \beta \doteq 76^\circ$

3.)  $73^\circ 40'$

4.)  $14^\circ 30'$

## 2. Goniometrické funkce 1

### Varianta B

#### Příklad:

- a) Převod radiánů na stupně:  $\alpha = \frac{3\pi}{10} \text{ rad}$  převed'te na stupně.  
 b) Převod stupňů na radiány:  $\alpha = 120^\circ$  převed'te na radiány.

#### Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 \text{ rad} &\dots \frac{180^\circ}{\pi} \\ \frac{3\pi}{10} \text{ rad} &\dots x^\circ \end{aligned}$$

Z přímé úměrnosti  $x = \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{180}{\pi} = 3 \cdot 18 = 54^\circ$ .  $\frac{3\pi}{10} \text{ rad} = 54^\circ$ .

Obecně  $x \text{ rad} = \frac{x \cdot 180^\circ}{\pi}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{180^\circ}{\pi} &\dots 1 \text{ rad} \\ 120^\circ &\dots x \text{ rad} \end{aligned}$$

Z přímé úměrnosti  $x = \frac{120^\circ}{\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{12}{18} \pi = \frac{2}{3} \pi \text{ rad}$ .

Obecně  $\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ} \text{ rad}$ .

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$

#### Příklad:

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Velikosti úhlů dané ve stupňové míře vyjádřete v míře obloukové:

a)  $130^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 330^\circ$

b)  $12^\circ 30', 36^\circ, 145^\circ, 317^\circ$

2) Velikosti úhlů dané v míře obloukové vyjádřete v míře stupňové:

a)  $\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{12}{5}\pi, \frac{14}{9}\pi, \frac{7}{10}\pi, \frac{1}{15}\pi$

3) Velikosti úhlů dané ve stupňové míře vyjádřete v míře obloukové:

a)  $4^\circ, 5^\circ, 9^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 18^\circ, 40^\circ$

b)  $45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 360^\circ$

4) Velikosti úhlů dané v obloukové míře vyjádřete v míře stupňové:

a)  $\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{5}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{180}\pi, \frac{1}{90}\pi, \frac{1}{12}\pi$

b)  $\frac{7}{6}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{12}{15}\pi, \frac{32}{12}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{230}{180}\pi$

1a.)  $\frac{13}{18}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi$

b.)  $\frac{5}{72}\pi, 0, 2\pi, \frac{29}{36}\pi, 1, 76\pi$

2a.)  $240^\circ, 144^\circ, 432^\circ, 315^\circ, 126^\circ, 12^\circ$

3.) a)  $\frac{1}{45}\pi, \frac{1}{36}\pi, \frac{1}{20}\pi, \frac{1}{18}\pi, \frac{1}{12}\pi, \frac{1}{10}\pi, \frac{2}{9}\pi,$

b)  $\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi$

4.) a)  $180^\circ, 60^\circ, 36^\circ, 30^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 15^\circ,$

b)  $210^\circ, 108^\circ, 144^\circ, 195^\circ, 270^\circ, 23^\circ$

## Goniometrické funkce 1

### Varianta C

**Příklad:** Jedna z velikostí orientovaného úhlu je a)  $\frac{17}{3}\pi$ ; b)  $-1826^\circ$ . Určete jeho základní velikost.

Řešení:

a) Určíme takové celé číslo  $k$ , pro něž platí  $\frac{17}{3}\pi = \alpha + 2k\pi$ ,

kde  $\alpha \in (0, 2\pi)$ :  $\frac{17}{3}\pi = 4\pi + \frac{5}{3}\pi$ .

Základní velikost daného orientovaného úhlu je  $\frac{5}{3}\pi$ .

b) Jako v a) zjistíme, že  $-1826^\circ = 334^\circ - 6 \cdot 360^\circ$ .

Základní velikost orientovaného úhlu je  $334^\circ$ .

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Na ciferníku hodin se středem  $S$  označte body dané čísly 2, 10, 7, 4 postupně písmeny A, B, C, D. Určete ve stupňové i obloukové míře základní velikosti orientovaných úhlů  $\widehat{ASC}$ ,  $\widehat{BSD}$ ,  $\widehat{ASD}$ ,  $\widehat{BSC}$ ,  $\widehat{ASB}$ ,  $\widehat{BSA}$ ,  $\widehat{DSC}$ ,  $\widehat{DSB}$ .

2) Určete základní velikost orientovaného úhlu, jehož jedna velikost je

- |                 |                 |                      |
|-----------------|-----------------|----------------------|
| a) $1800^\circ$ | b) $-333^\circ$ | c) $-1567^\circ$     |
| d) $387^\circ$  | e) $-284^\circ$ | f) $-1083^\circ 25'$ |

3) Základní velikost orientovaného úhlu  $\widehat{DVE}$  je  $\frac{1}{3}\pi$ . Zjistěte, která z následujících čísel jsou velikostmi tohoto orientovaného úhlu:

$$\frac{4}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{13}{3}\pi, -\frac{5}{3}\pi, -\frac{10}{3}\pi, \frac{61}{3}\pi, -\frac{61}{3}\pi$$

4) Základní velikost orientovaného úhlu  $\widehat{AVB}$  je  $\frac{1}{4}\pi$ . Vypište všechny jeho velikosti z intervalu  $\langle -4\pi, 6\pi \rangle$ .

1.)  $\frac{7}{6}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \pi$

2.) a)  $0^\circ$ , b)  $27^\circ$ , c)  $233^\circ$ , d)  $27^\circ$ , e)  $76^\circ$ , f)  $356^\circ 35'$

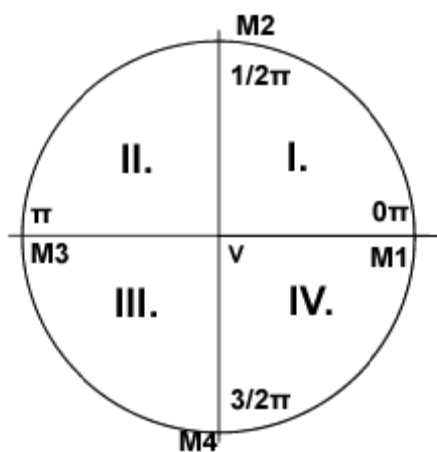
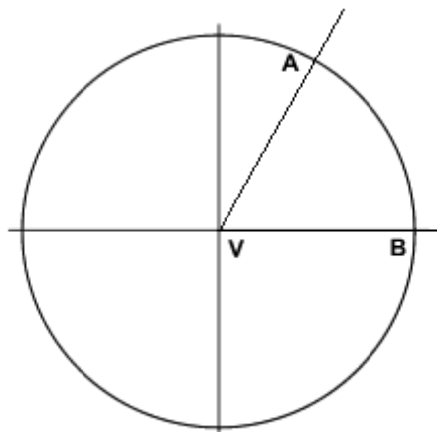
3.)  $\frac{7}{3}\pi, \frac{13}{3}\pi, -\frac{5}{3}\pi, \frac{61}{3}\pi$

4.)  $-\frac{15}{4}\pi, -\frac{7}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi$

## Goniometrické funkce 2

### Funkce sinus a kosinus

Jednotková kružnice je kružnice s poloměrem 1 j. ( )



V... počátek souřadnicového systému;

Orientovaný úhel

... počáteční rameno

... koncové rameno

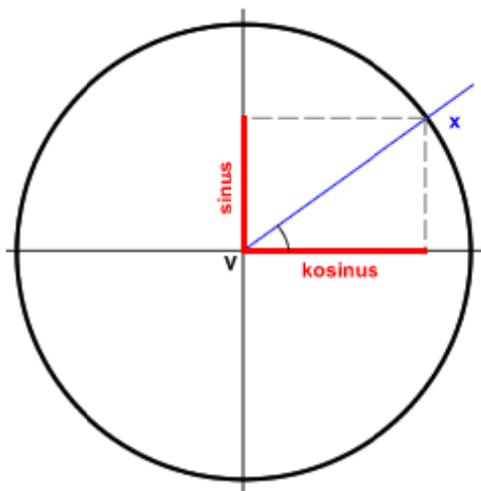
Souřadnice bodu :

... bod, v němž koncové rameno orientovaného úhlu protíná jednotkovou kružnici.

Definice:

Funkcí **sinus** se nazývá funkce na množině , kterou je každému přiřazeno číslo .

Funkcí **kosinus** se nazývá funkce na množině , kterou je každému přiřazeno číslo .



;

... základní velikost orientovaného úhlu

1,2,3,4... kvadranty souřadnicového systému

**Věta:**

Pro každé  $k \in \mathbf{Z}$  a pro každé  $x \in \mathbf{R}$

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x.$$

Z obrázku jednotkové kružnice je vidět, že hodnoty funkce sinus jsou kladné v prvním a druhém kvadrantu a záporné ve třetím a čtvrtém kvadrantu. Hodnoty funkce kosinus jsou kladné v prvním a čtvrtém kvadrantu a záporné ve druhém a třetím kvadrantu.

Funkce sinus a kosinus jsou **periodické**

Z jednotkové kružnice můžeme také usoudit, že funkce  $y = \sin x$  je lichá a funkce  $y = \cos x$  je sudá.

**Věta:**

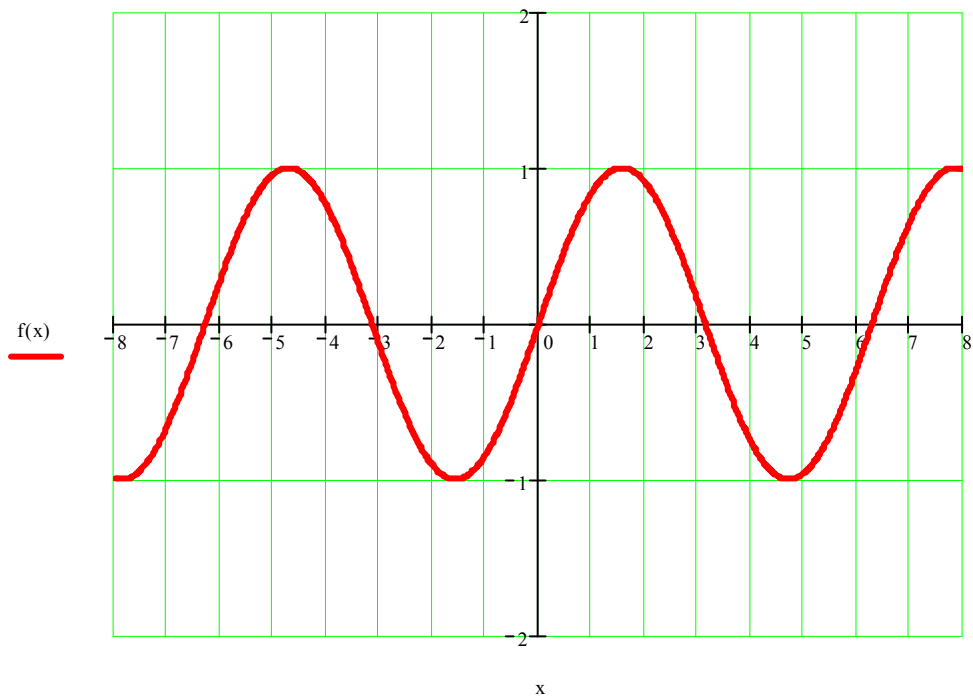
Pro každé  $x \in \mathbf{R}$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

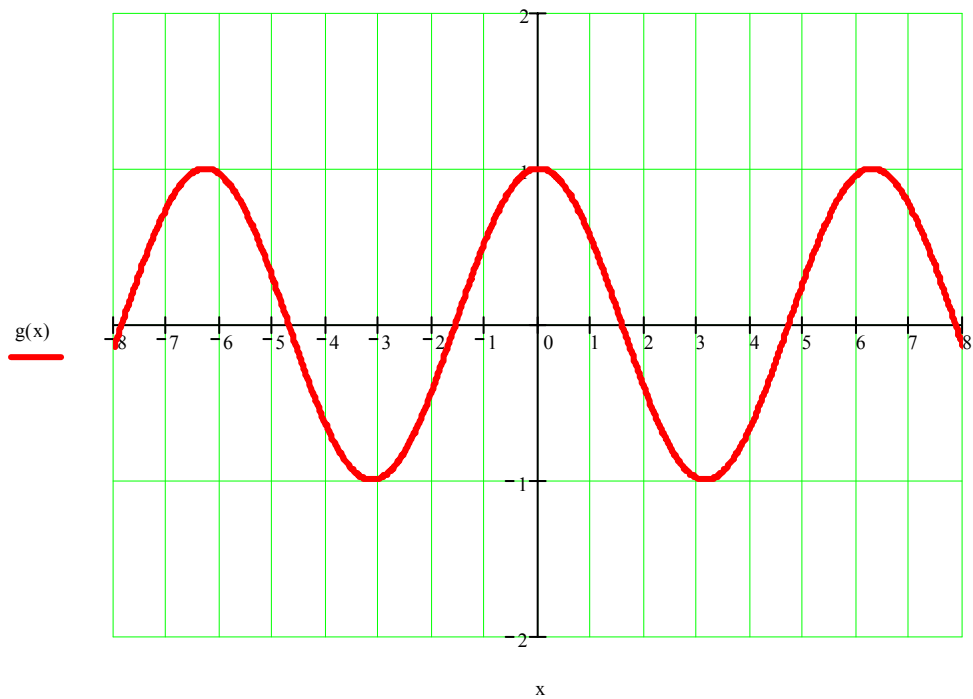
$$\cos(-x) = \cos x$$

**Grafy funkcí sinus a kosinus**

$$f: y = \sin x, \quad [-2\pi \doteq -6,28]$$



$$g: y = \cos x,$$



Z obrázků je vidět, že  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Graf funkce sinus se nazývá sinusoida, graf funkce kosinus se nazývá kosinusoida.

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Definiční obor	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Obor hodnot	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -1, 1 \rangle$
Rostoucí	V každém intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$	V každém intervalu $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$
Klesající	V každém intervalu $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$	V každém intervalu $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$
Parita	lichá	Sudá
Omezenost	Shora i zdola omezená	Shora i zdola omezená
Maximum	V každém $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	V každém $x = 2k\pi$
Minimum	V každém $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$	V každém $x = \pi + 2k\pi$
Periodicita	Periodická, perioda $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$	Periodická, perioda $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Hodnoty funkcí sinus a kosinus

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0

Při sestrování grafů funkcí sinus a kosinus je upravujeme vždy na tvar:

$$y = a \sin[b(x + c)] + d$$

$a$ ... amplituda

$b$ ... perioda

$c$ ... posun po ose  $x$

$d$ ... posun po ose  $y$

## Goniometrické funkce 2

### Varianta A

**Příklad:** Vypočtěte:

- a)  $\sin \frac{7}{3}\pi$
- b)  $\cos \frac{13}{4}\pi$
- c)  $\sin 390^\circ$
- d)  $\cos 270^\circ$

**Řešení:**

- a)  $\sin \frac{7}{3}\pi = -\sin \frac{1}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- b)  $\cos \frac{13}{4}\pi = \cos \left(2\pi + \frac{5}{4}\pi\right) = \cos \frac{5}{4}\pi = -\cos \frac{1}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c)  $\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
- d)  $\cos 270^\circ = -1$  (viz jednotková kružnice)

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Vypočítejte

$$\sin 3\pi, \sin(-7\pi), \cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{35}{6}\pi\right), \cos\left(\frac{39}{18}\pi\right)$$

2) Vypočítejte

$$\cos(-720^\circ), \cos 1290^\circ, \sin(-1845^\circ), \sin 585^\circ, \cos 585^\circ$$

3) Vypočítejte:

a)  $3 \cdot \cos \frac{1}{4}\pi - 3 \cdot \sin \frac{1}{4}\pi + 2 \cdot \cos \frac{1}{3}\pi - \sin \frac{1}{6}\pi$

b)  $2 \cdot \cos \frac{1}{2}\pi - 5 \cdot \sin \pi + 6 \cdot \cos \pi$

c)  $-3 \cdot \sin 0^\circ + 7 \cdot \cos 0^\circ - 6 \cdot \sin 270^\circ$

4) Dokažte, že platí:

a)  $\sin 20^\circ = \sin 740^\circ$

b)  $\cos 54^\circ = \cos(-1026^\circ)$

1.)  $0; 0; \frac{1}{2}\sqrt{2}; -0,5; \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2.)  $1; -\frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

3.) a) 0,5, b) -6, c) 13

## Goniometrické funkce 2

### Varianta B

**Příklad:** Zakreslete graf funkce  $f: y = \frac{3}{2} \sin(2x + \pi) - 1$

Řešení:

Předpis funkce upravíme-  $f: y = \frac{3}{2} \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right] - 1$

Postupně sestrojíme grafy funkcí:

$$f_0: y = \sin x$$

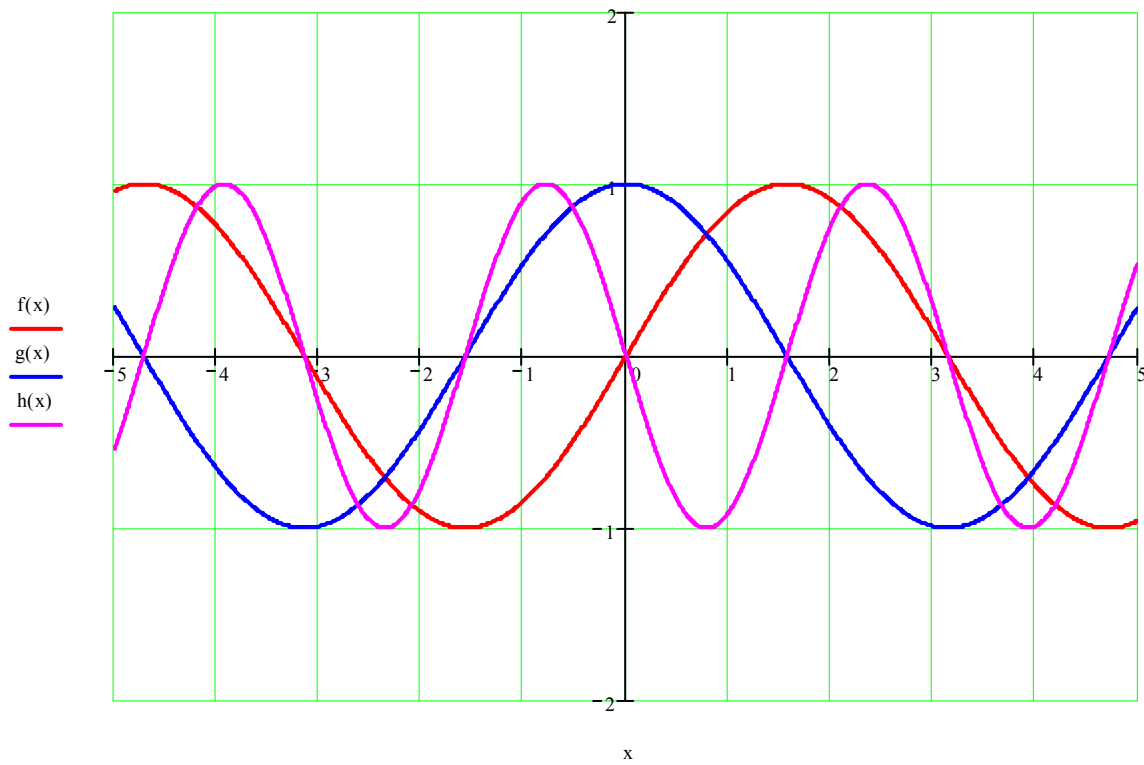
$$f_1: y = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f_2: y = \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$f_3: y = \frac{3}{2} \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

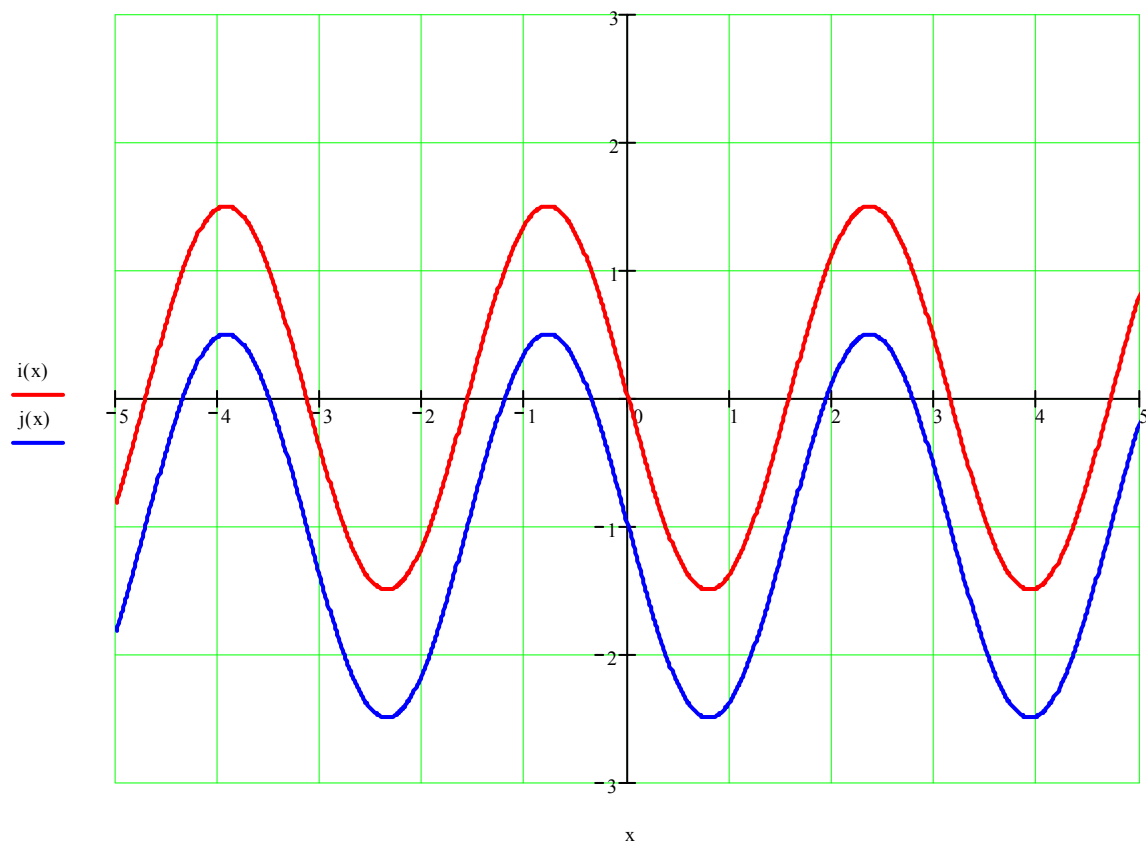
$$f_4: y = \frac{3}{2} \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right] - 1$$

$$f(x) = \sin x; \quad g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad h(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$



$$i(x) = \frac{3}{2} \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right];$$

$$j(x) = \frac{3}{2} \sin \left[ 2 \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right] - 1$$



**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b)  $y = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

d)  $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a)  $y = \sin 0,5x$

b)  $y = \cos 2x$

Jaké jsou nejmenší periody těchto funkcí?

3) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a)  $y = \sin x - 2$

b)  $y = \sin(x - 2)$

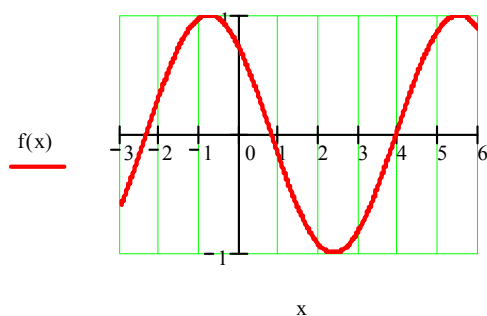
Zapište jejich obory hodnot.

4) Načrtněte postupně grafy funkcí:

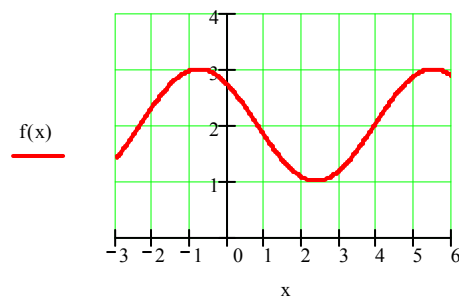
$$y = \sin x, y = 0,5 \cdot \sin x, y = 0,5 \cdot \sin 2x, y = 0,5 \cdot \sin(2x + \pi),$$

$$y = 0,5 \cdot \sin(2x + \pi) - 1$$

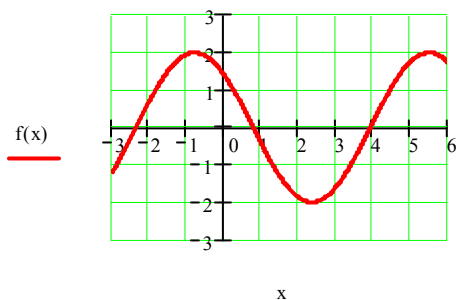
1.) a)



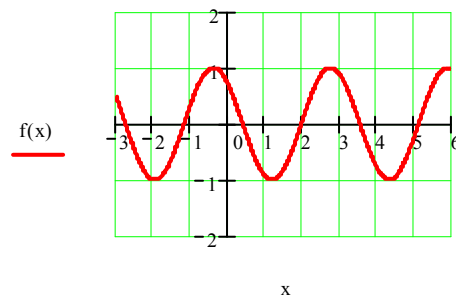
c)

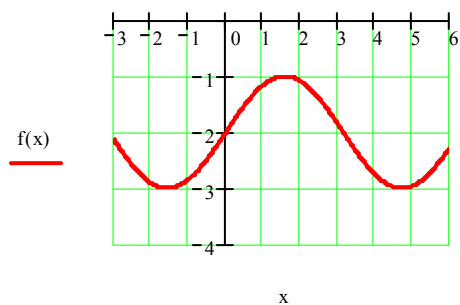
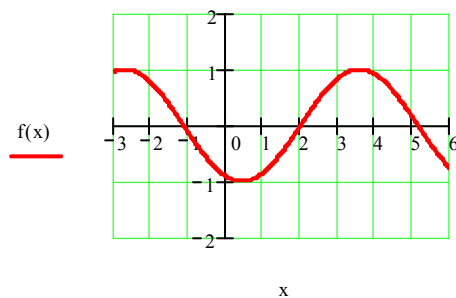
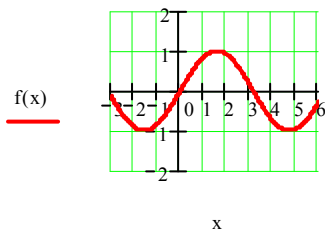
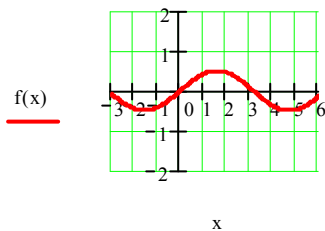
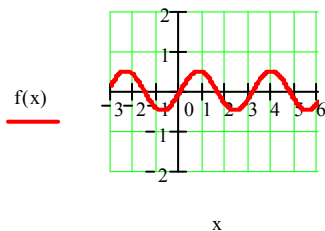
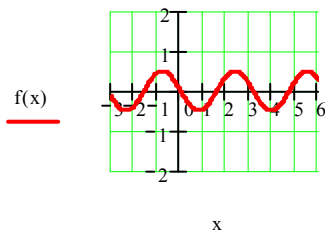
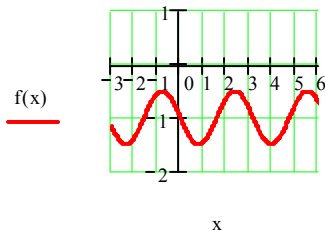


b)



d)



3.) a)  $\langle -3, -1 \rangle$ b)  $\langle -1, 1 \rangle$ 4.)  $\sin x$  $0,5 \cdot \sin x$  $0,5 \cdot \sin 2x$  $0,5 \cdot \sin(2x + \pi)$  $0,5 \cdot \sin(2x + \pi) - 1$ 

## Goniometrické funkce 2

### Varianta C

**Příklad:** Zakreslete grafy těchto funkcí:

a)  $y = |\sin x|$

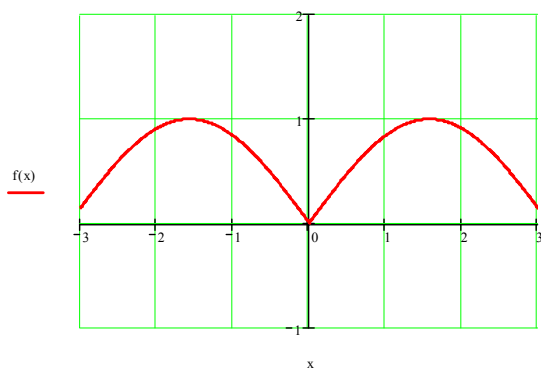
b)  $y = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right|$

c)  $y = \left| \sin x \right| - \frac{1}{2}$

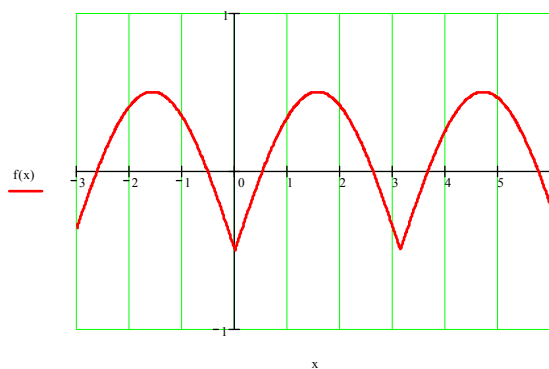
d)  $y = \left| \left| \sin x \right| - \frac{1}{2} \right|$

Řešení:

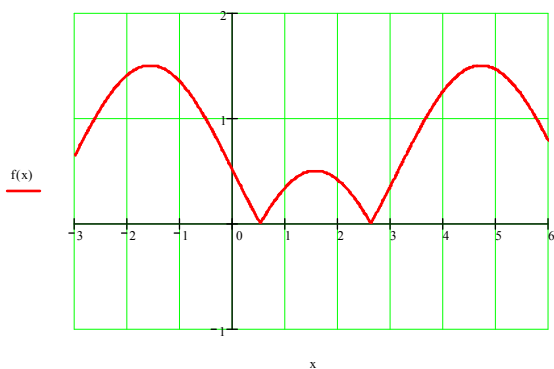
a)



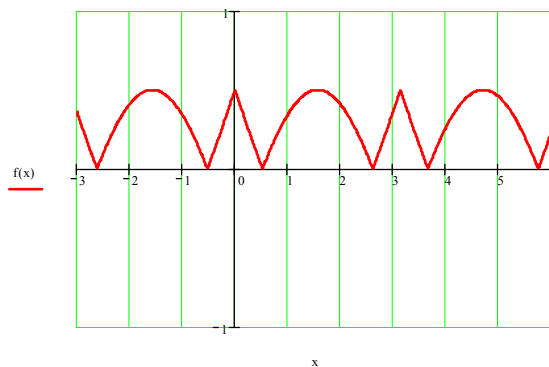
c)



b)



d)



**Příklad:**[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)**Příklady k procvičení:**

1) Načrtněte grafy funkcí:

a)  $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$

b)  $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$

2) Načrtněte graf funkce  $y = \frac{2 \cdot (\cos x)^2}{\cos x - |\cos x|}$ 

3) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a)  $y = \sin|x|$

b)  $y = |\sin|x||$

4) Načrtněte grafy těchto funkcí:

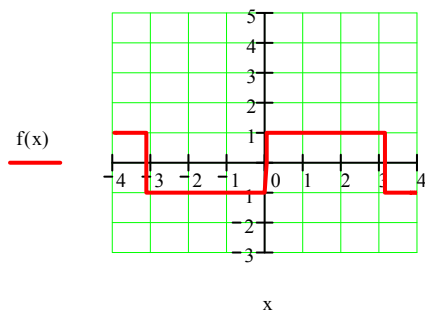
a)  $y = |\cos x|$

b)  $y = \left| \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$

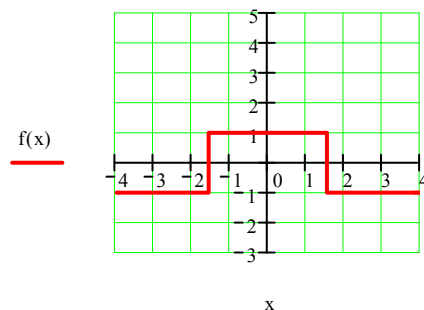
c)  $y = \left| \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - 1 \right|$

d)  $y = \left| \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right| - 1$

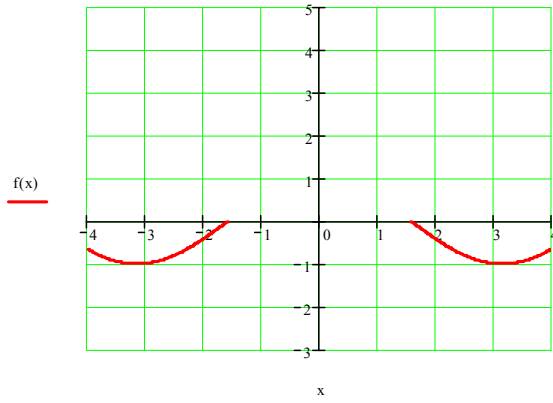
1.) a)



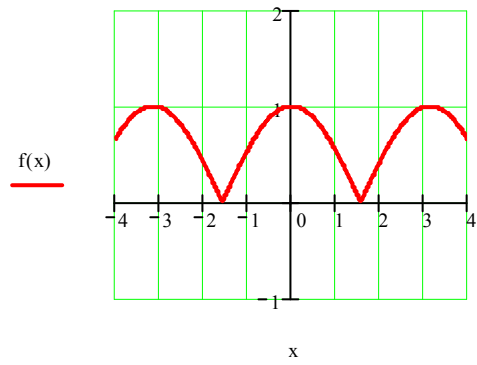
b)



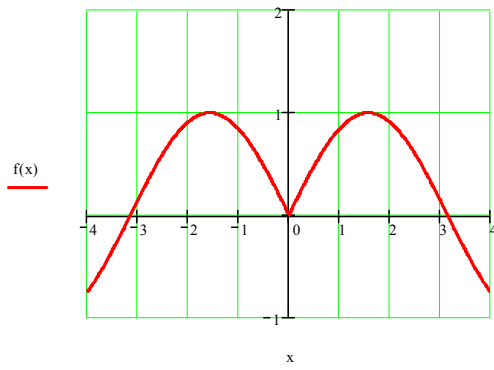
2.)



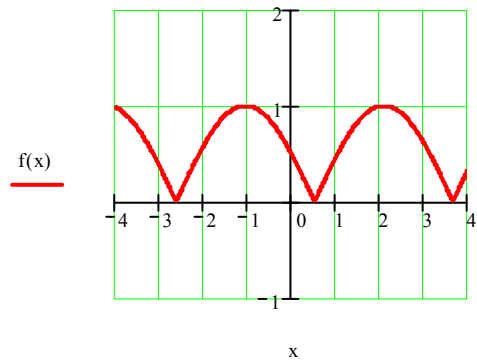
4.) a)



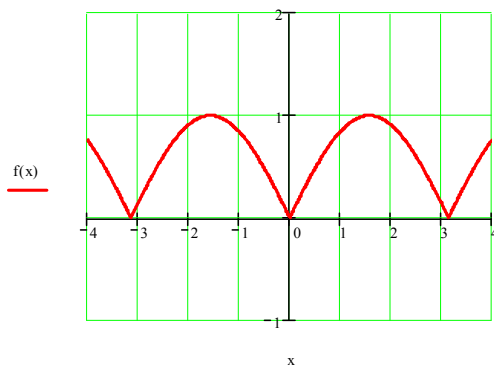
3.) a)



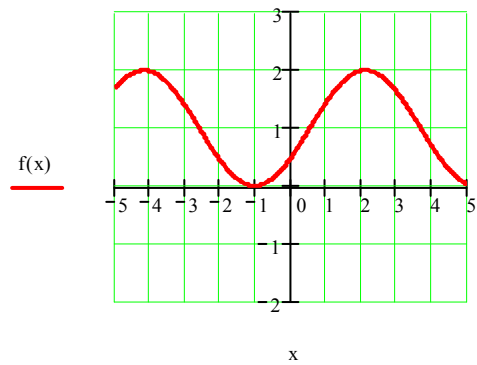
b)



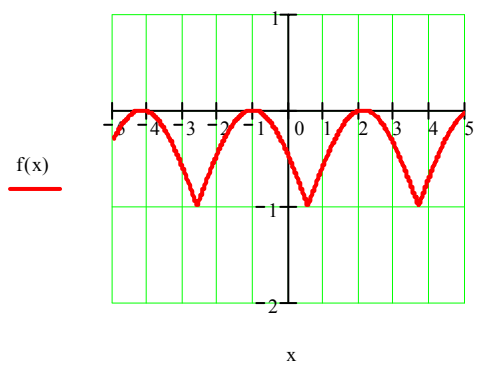
3.) b)



4.) c)



4d)



## Goniometrické funkce 3

### Funkce tangens a kotangens

Definice:

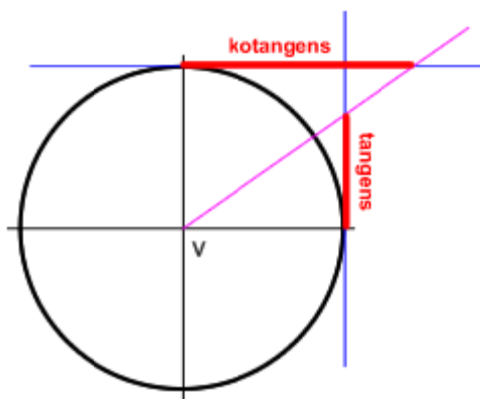
Funkcí **tangens** se nazývá funkce daná vztahem

\_\_\_\_\_.

Funkcí **kotangens** se nazývá funkce daná vztahem

\_\_\_\_\_.

Tyto funkce zapisujeme



Definičním oborem funkce  $y = \operatorname{tg} x$  je množina všech reálných čísel různých od  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  a  $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ , kde  $k$  je libovolné celé číslo. Jinak řečeno, **definičním oborem funkce  $y = \operatorname{tg} x$  je množina všech  $x \in \mathbf{R}$ , pro něž  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$ .**

Definičním oborem funkce  $y = \tan x$  je tedy množina, která je sjednocením nekonečně mnoha otevřených intervalů tvaru  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ; přitom  $k$  je libovolné celé číslo. Tuto množinu zapisujeme takto:

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Symbol  $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}}(\dots)$  označuje sjednocení příslušných intervalů.

Definičním oborem funkce kotangens je množina všech těch  $x \in \mathbf{R}$ , pro která má smysl výraz  $\frac{\cos x}{\sin x}$  čili pro něž je  $\sin x \neq 0$ . V intervalu  $(0, 2\pi)$  je  $\sin x = 0$  pouze pro čísla 0 a  $\pi$ ; dále víme, že funkce  $y = \sin x$  je periodická s nejmenší periodou  $2\pi$ . Odtud plyne, že **definičním oborem funkce  $y = \operatorname{cotg} x$  je množina všech těch  $x \in \mathbf{R}$ , pro něž  $x \neq k\pi$** ; přitom  $k$  je libovolné celé číslo. Definiční obor funkce kotangens lze tedy zapsat v tomto tvaru:

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k\pi, (k + 1)\pi)$$

**Věta:**


---

 a) Pro každé reálné číslo  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$ ,

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

 b) Pro každé reálné číslo  $x \neq k\pi$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$ ,

$$\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$$


---

**Věta:**

Funkce tangens a kotangens jsou liché funkce.

**Věta:**


---

 a) Pro každé  $x$  z definičního oboru funkce  $y = \operatorname{tg} x$  a pro každé  $m \in \mathbf{Z}$ 

$$\operatorname{tg}(x + m\pi) = \operatorname{tg} x$$

 b) Pro každé  $x$  z definičního oboru funkce  $y = \operatorname{cotg} x$  a pro každé  $m \in \mathbf{Z}$ 

$$\operatorname{cotg}(x + m\pi) = \operatorname{cotg} x$$

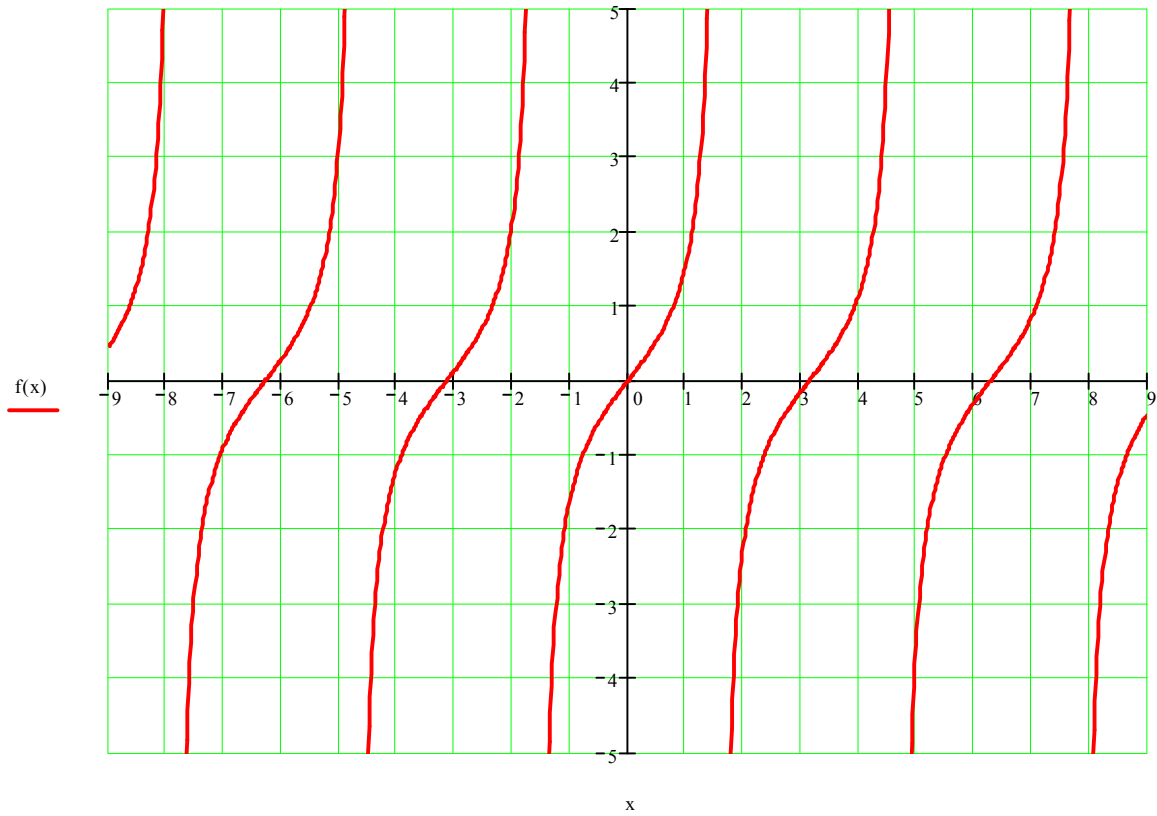

---

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
$\cot x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0

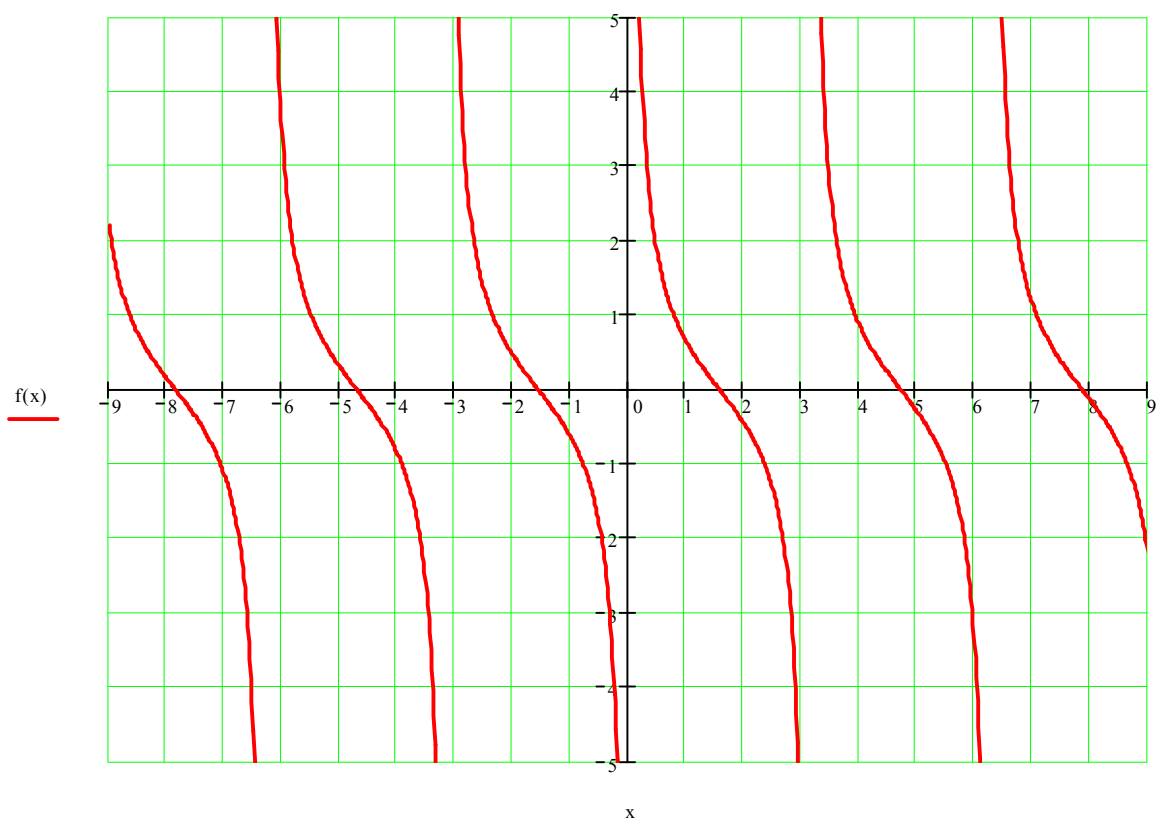
	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{cotg} x$
Definiční obor	Množina všech $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$	Množina všech $x \neq k\pi$
Obor hodnot	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Rostoucí	V každém intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	-
Klesající	-	V každém intervalu $(k\pi, \pi + k\pi)$
Parita	Lichá	Lichá
Omezenost	Není omezená ani shora, ani zdola	Není omezená ani shora, ani zdola
Maximum	Neexistuje	Neexistuje
Minimum	Neexistuje	Neexistuje
Periodicita	Periodická s periodou $k\pi, k \in \mathbf{Z}$	Periodická s periodou $k\pi, k \in \mathbf{Z}$

**Grafy funkcí tangens a kotangens**

$$f: y = \operatorname{tg} x, \quad [-2\pi \doteq -6,28]$$



$$g: y = \cotg x$$



### Goniometrické funkce 3

#### Varianta A

**Příklad:** Vypočtete:

a)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$

b)  $\operatorname{cotg}\left(\frac{14}{3}\pi\right)$

Řešení:

a)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{19}{6}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-3\pi - \frac{1}{6}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b)  $\operatorname{cotg}\left(\frac{14}{3}\pi\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Určete hodnoty:

a)  $\operatorname{tg} \frac{7}{6} \pi, \operatorname{cotg} \frac{7}{6} \pi$

b)  $\operatorname{tg} \left( -\frac{21}{4} \pi \right), \operatorname{cotg} \left( -\frac{21}{4} \pi \right)$

2) Určete hodnoty

a)  $\operatorname{tg} 300^\circ, \operatorname{cotg} 300^\circ$

b)  $\operatorname{tg}(-945^\circ), \operatorname{cotg}(-945^\circ)$

3) Vypočítejte:

a)  $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{cotg} 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

b)  $\operatorname{cotg} \frac{12}{8} \pi \cdot \operatorname{tg} 11\pi \cdot \operatorname{cotg} \frac{19}{3} \pi \cdot \operatorname{tg}(-7\pi)$

4) Vypočítejte:

a)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{2}{3} \pi - \operatorname{cotg} \left( -\frac{2}{3} \pi \right)}{\operatorname{tg} \frac{2}{3} \pi + \operatorname{cotg} \left( -\frac{2}{3} \pi \right)}$

b)  $\frac{\operatorname{cotg} \left( -\frac{2}{3} \pi \right) + \operatorname{tg} \left( -\frac{1}{4} \pi \right)}{\operatorname{tg}(-\pi) + \operatorname{cotg} \left( -\frac{1}{4} \pi \right)}$

1.) a)  $\frac{1}{3} \sqrt{3}, \sqrt{3}$ , b)  $-\sqrt{3}, -\frac{1}{3} \sqrt{3}$

2.) a)  $-\sqrt{3}, -\frac{1}{3} \sqrt{3}$ , b) -1, -1

3.) a)  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ , b) 0

4.) a) 2, b)  $\frac{1}{3} (3 - \sqrt{3})$

## 2. Goniometrické funkce 3

### Varianta B

**Příklad:** Určete definiční obory funkcí:

a)  $f = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

b)  $g = \sqrt{\operatorname{cotg} x}$

Řešení:

a)

$$\operatorname{tg} x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi$$
$$D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \right)$$

b)

$$\operatorname{cotg} x \geq 0$$
$$D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Zapište definiční obory funkcí:

a)  $y = \frac{1}{\cotg x}$

b)  $y = \frac{1}{\sqrt{\cotg x}}$

2) Vypočítejte:

a)  $2 \cdot \operatorname{tg} 0 + \sin \pi - \cos \frac{3}{2}\pi - \cotg \frac{1}{2}\pi$

b)  $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cotg 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

3) Vypočítejte:

a)  $6 \cdot \cotg \frac{3}{2}\pi - 5 \cdot \sin 2\pi + 2 \cdot \cos \pi$

b)  $3 \cdot \cos \frac{1}{2}\pi - 4 \cdot \sin \frac{3}{2}\pi + 8 \cdot \operatorname{tg} \pi$

4) Uspořádejte podle velikosti tato čísla:

a)  $\sin 30^\circ, \cos 30^\circ, \operatorname{tg} 30^\circ, \cotg 30^\circ$

b)  $\cos 4\pi, \sin(-5\pi), \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right), \cotg \frac{13}{3}\pi$

1.) a)  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k \cdot \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi\right)$ , b)  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi\right)$

2.) a) 0, b)  $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})$

3.) a) -2, b) 4

4.) a)  $\sin 30^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ < \cos 30^\circ < \cotg 30^\circ$

b)  $\sin(-5\pi) < \cotg \frac{13}{3}\pi < \cos 4\pi < \operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

### Goniometrické funkce 3

#### Varianta C

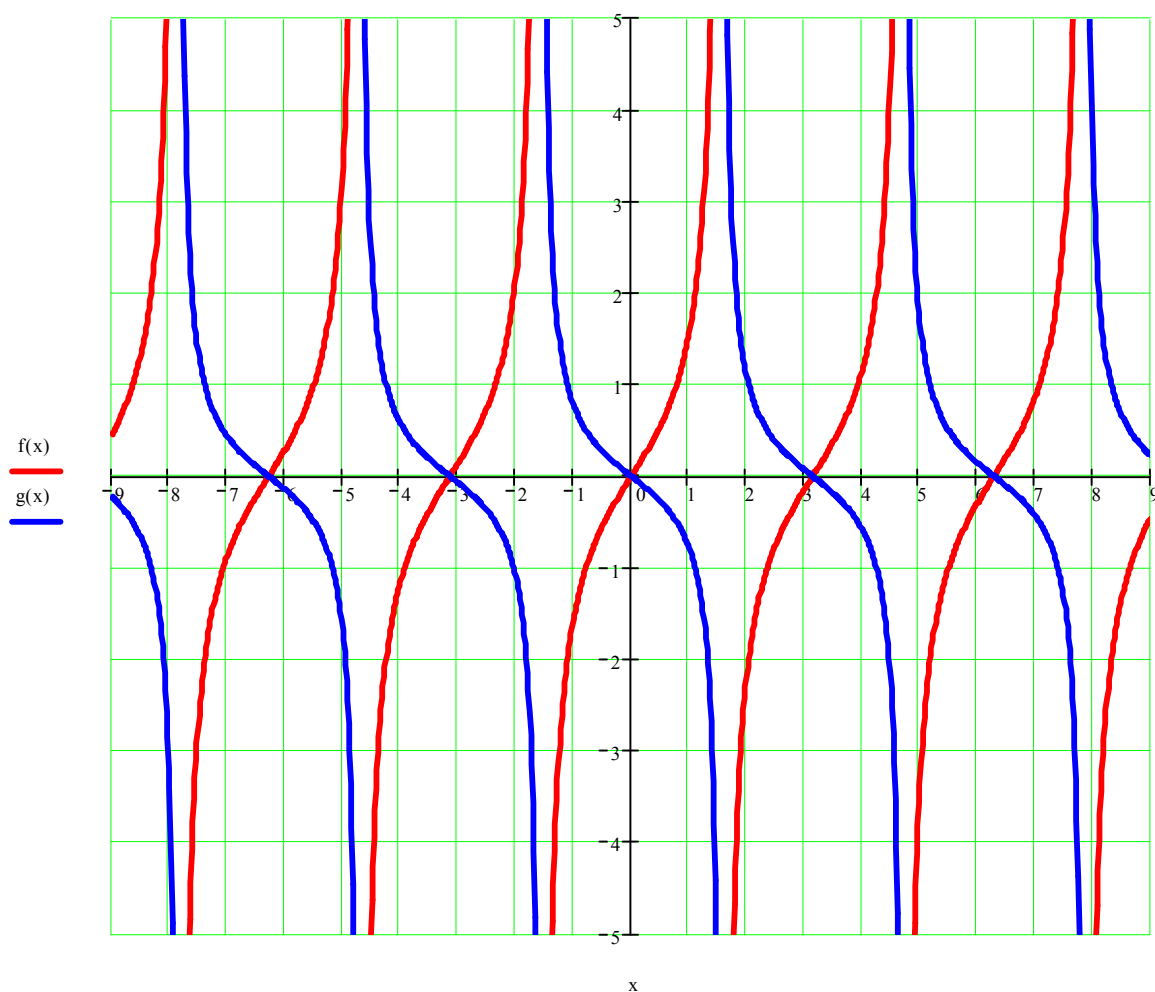
**Příklad:** Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí:

a)  $f: y = \operatorname{tg} x$ ,  $g: y = -0,5 \cdot \operatorname{tg} x$

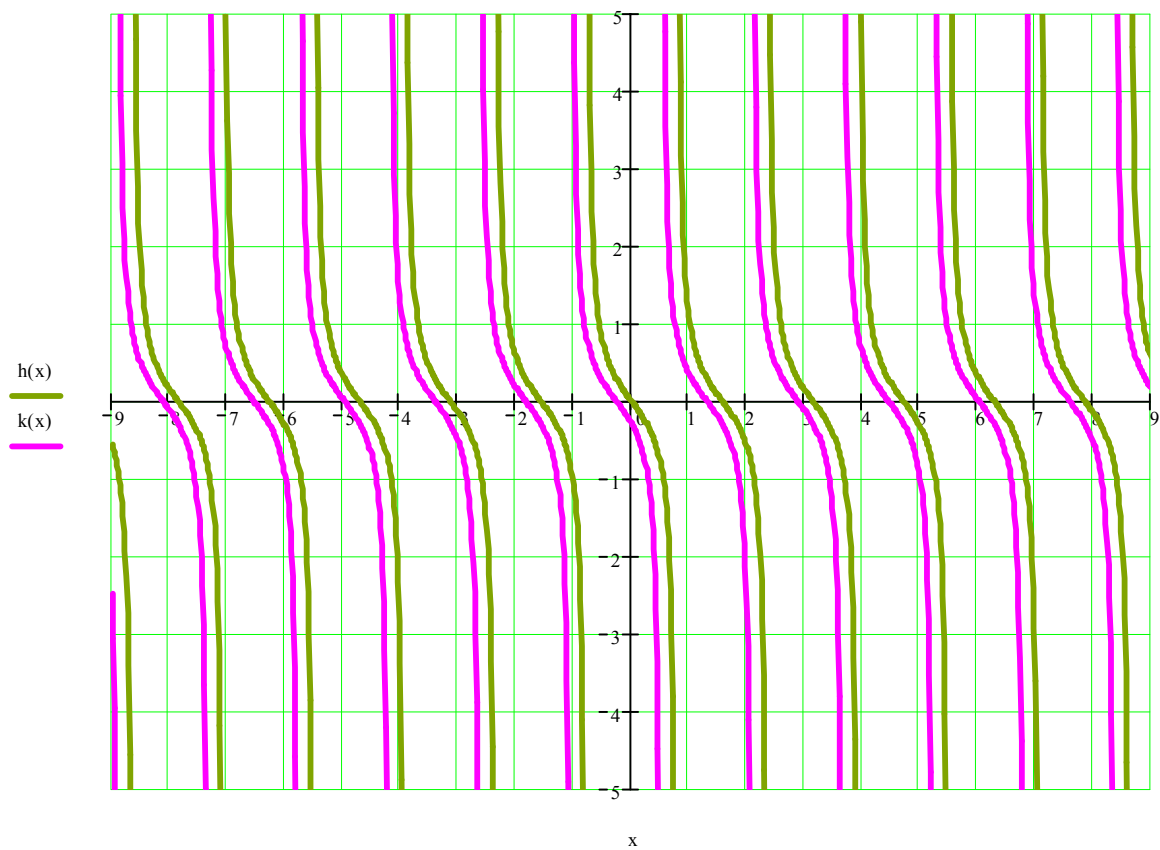
b)  $h: y = -0,5 \cdot \operatorname{tg} 2x$ ,  $k: y = -0,5 \cdot \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

Řešení:

a)



b)

**Příklad:**[Varianta A](#)[Varianta B](#)[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a)  $y = |\cotg x|$

b)  $y = |\cotg 0,5x|$

2) Načrtněte graf těchto funkcí:

a)  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

b)  $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

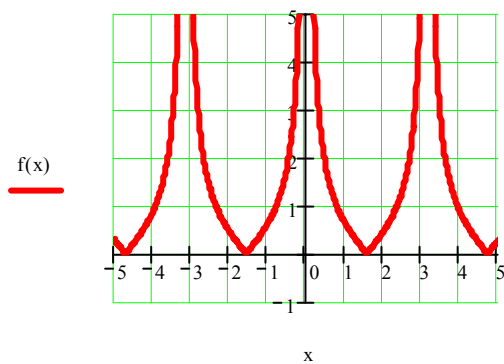
3) Načrtněte grafy funkcí:

a)  $y = \operatorname{cotg}\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)$

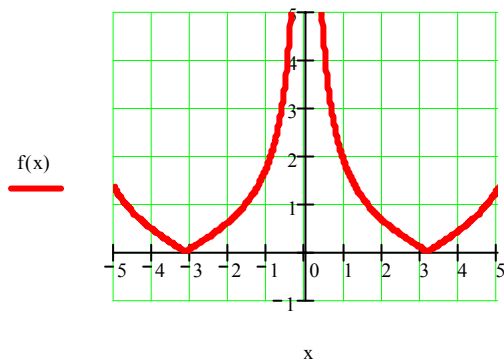
b)  $y = -\operatorname{tg} x$

4) Načrtněte graf následující funkce a poté z grafu určete její vlastnosti:  $y = \left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right|$

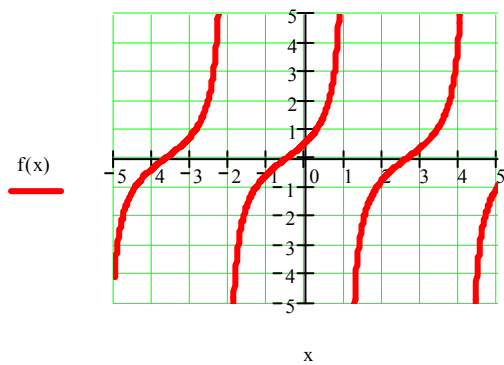
1.) a)



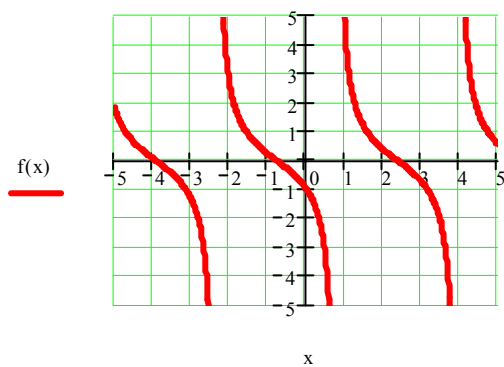
b)



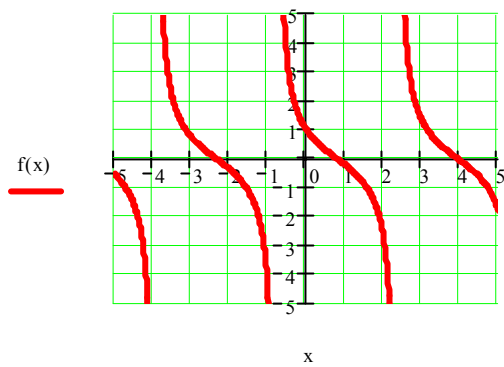
2.) a)



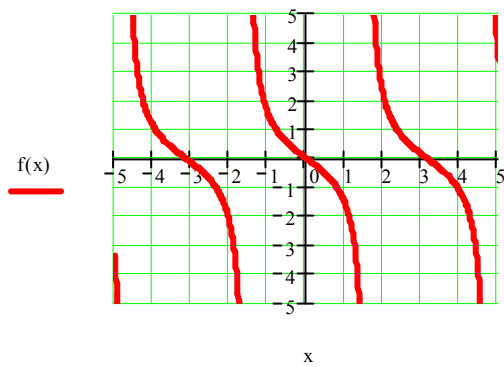
b)



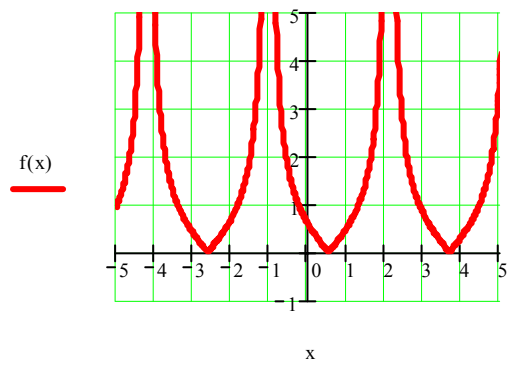
3.) a)



b)



4.)



## Goniometrické rovnice

### Definice:

Goniometrickou rovnicí nazýváme každou rovnici, v níž se vyskytují goniometrické výrazy s neznámou  $x$ , kde  $x \in \mathbf{R}$ .

Dva základní typy goniometrických rovnic:

$$1.) \sin x = a, \quad \cos x = a$$

Je-li:

- a)  $a = 0$  nebo  $a = \pm 1$ , užijeme pro řešení graf nebo jednotkovou kružnici
- b)  $a \neq 0$  a zároveň  $a \neq \pm 1$ , pak zjistíme kořeny  $x_1, x_2 \in \langle 0, 2\pi \rangle$  pomocí jednotkové kružnice popřípadě grafu, známé tabulkové hodnoty nebo kalkulátoru

Množina řešení  $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi\}$ .

**Pozn.:** Je-li  $|a| > 1$ , pak rovnice nemá řešení.

$$2.) \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{cotg} x = a$$

Pro všechna  $a \in \mathbf{R}$  má rovnice nekonečně mnoho řešení, která určíme:

- a) Pro  $a = 0$ , užijeme grafu nebo vlastností

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$$

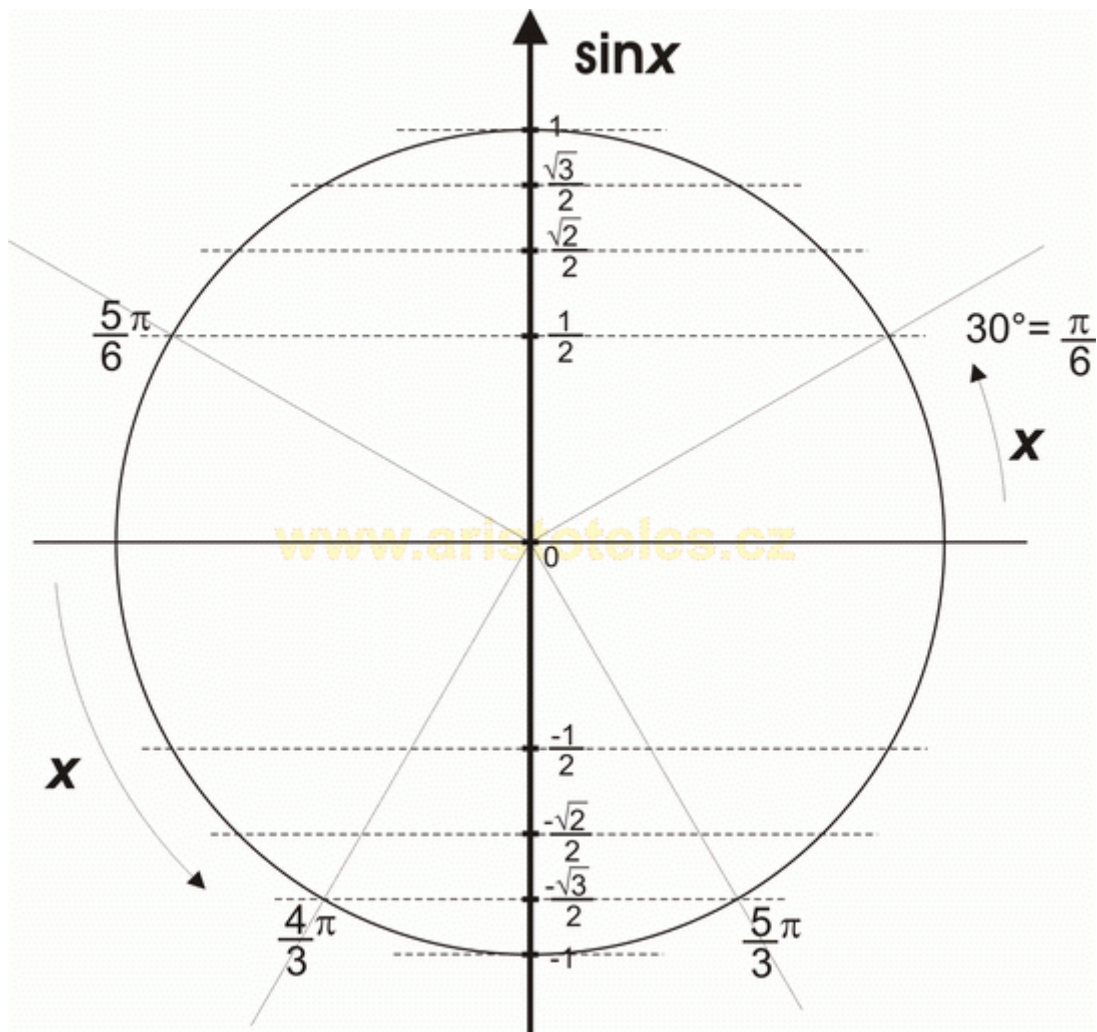
$$\operatorname{cotg} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

- b) Pro  $a \neq 0$ , zjistíme právě jeden kořen  $x_1 \in \langle 0, \pi \rangle$ , přičemž postupujeme jako v případě 1.).

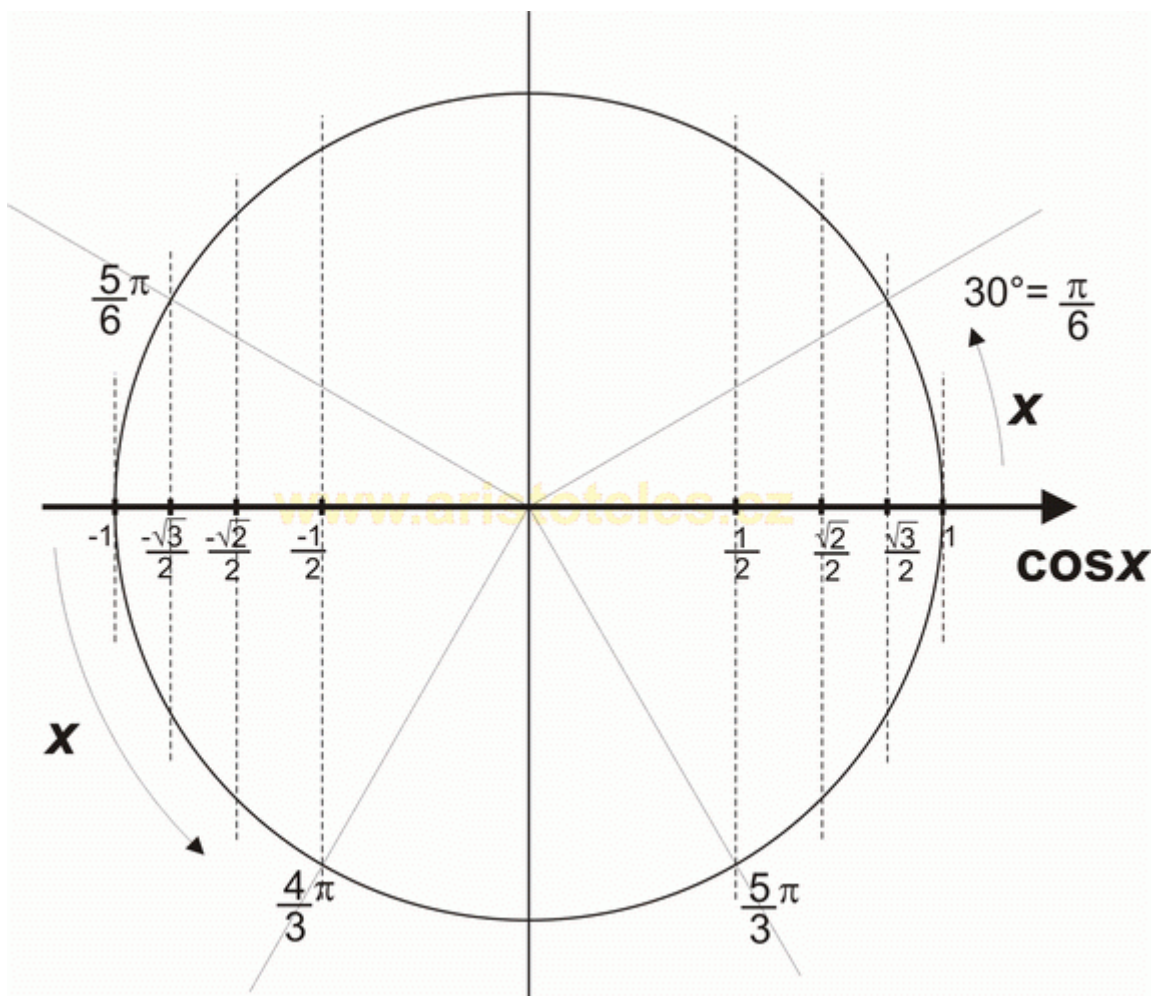
Množina řešení  $K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \{x_1 + k\pi\}$ .

Složitější goniometrické rovnice řešíme převedením na základní tvar. A to substitucí nebo užitím vzorců pro goniometrické funkce.

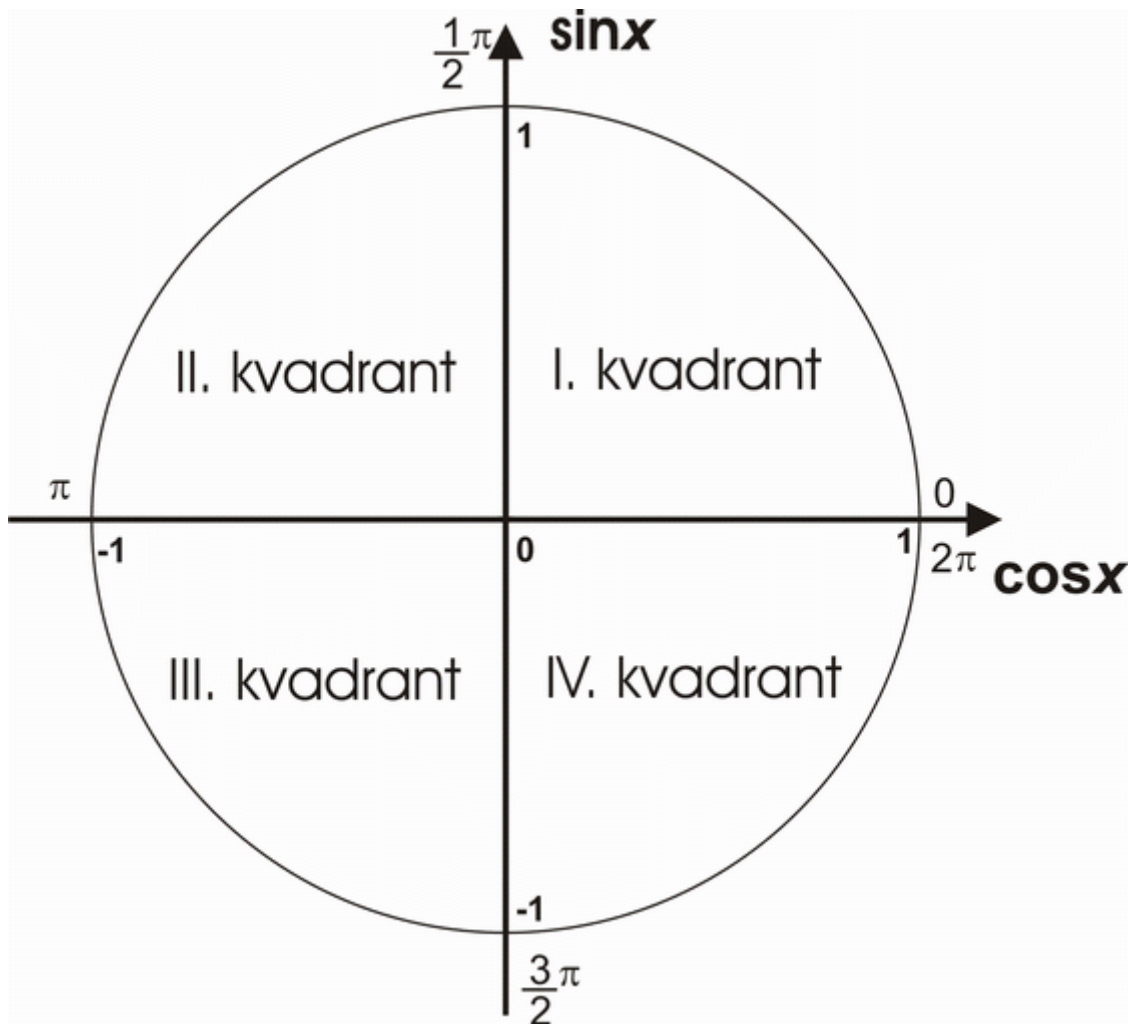
Jednotková kružnice funkce sinus



Jednotková kružnice funkce kosinus



Osy  $\cos(x)$  a  $\sin(x)$  můžeme zakreslit do jedné kružnice. V obrázku jsou navíc vyznačeny kvadranty.



## Goniometrické rovnice

### Varianta A

**Příklad:** Řešte základní goniometrické rovnice:

a)  $\sin x = 1$

b)  $\cos x = -1$

c)  $\sin x = -\frac{1}{2}$

Řešení:

a)  $x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

b)  $x_1 = \pi, \quad K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ \pi + 2k\pi \}$

c) Určíme základní úhel  $x_0$ , pro něž je  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

$$x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$\sin x$  je záporný ve třetím a čtvrtém kvadrantu, tedy

$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right\}$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Řešte goniometrické rovnice s neznámou  $x \in R$ :

a)  $\sin x = -1$

b)  $\operatorname{tg} x = 1$

c)  $\cos x = 0$

d)  $\operatorname{cotg} x = 0$

2) Řešte goniometrické rovnice s neznámou  $z \in \langle 0, 4\pi \rangle$ :

a)  $\operatorname{cotg} z = 1$

b)  $\operatorname{tg} z = -1$

c)  $\cos z = 0,5$

d)  $\sin z = 1$

3) Řešte goniometrické rovnice s neznámou  $x \in R$ :

a)  $\sin x = 0,5$

b)  $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

Řešte goniometrické rovnice s neznámou  $z \in \langle 0, 4\pi \rangle$ :

c)  $\sin z = -0,5$

d)  $\operatorname{cotg} z = \sqrt{3}$

4) Řešte v  $R$  rovnice:

a)  $\cos x = 0,35$

b)  $\sin x = -0,86$

c)  $\operatorname{cotg} x = -1,2$

1.) a)  $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\}$ , b)  $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi \right\}$ ,

c)  $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi \right\}$ , d)  $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi \right\}$

2.) a)  $z \in \left\{ \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi \right\}$ , b)  $z \in \left\{ \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \frac{15}{4}\pi \right\}$

c)  $z \in \left\{ \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi \right\}$ , d)  $z \in \left\{ \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \right\}$

3.) a)  $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$ , b)  $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$ ,

c)  $z \in \left\{ \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi \right\}$ , d)  $z \in \left\{ \frac{1}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi \right\}$

4.) a)  $x \in \{69^\circ 30' + k \cdot 360^\circ, 290^\circ 30' + k \cdot 360^\circ\}$ ,

b)  $x \in \{239^\circ 19' + k \cdot 360^\circ, 300^\circ 41' + k \cdot 360^\circ\}$

c)  $x \in \{140^\circ 10' + k \cdot 180^\circ\}$

## Goniometrické rovnice

### Varianta B

**Příklad:** Řešte v  $\mathbf{R}$ :

a)  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

b)  $2 \sin(3x + \pi) = -1$

Řešení:

a)

Substituce  $y = 2x \rightarrow \sin y = -\frac{1}{2}$

$$y_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{7}{12}\pi + k\pi$$

$$y_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{11}{12}\pi + k\pi$$

$$P = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{7}{12}\pi + k\pi, \frac{11}{12}\pi + k\pi \right\}$$

b)

Rovnici budeme řešit substitucí  $y = 3x + \pi$ , tj. přejdeme k řešení rovnice

$$2 \sin y = -1$$

čili k rovnici

$$\sin y = -0,5$$

s neznámou  $y \in \mathbf{R}$ .

Množinu všech jejích kořenů tvoří čísla tvaru

$$y_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$y_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

kde  $k \in \mathbf{Z}$ .

Množina všech kořenů původní rovnice se tedy skládá ze všech čísel  $x_1, x_2$ , pro která platí právě jeden ze vztahů

$$3x_1 + \pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

$$3x_2 + \pi = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

Odtud dostaneme

$$x_1 = \frac{7}{18}\pi + \frac{1}{3}(2k - 1)\pi$$

$$x_2 = \frac{11}{18}\pi + \frac{1}{3}(2k - 1)\pi$$

Neboli

$$x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$x_2 = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$$

Množinu  $K$  všech kořenů původní rovnice lze tedy zapsat ve tvaru

$$K = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi \right\}$$

Provedením zkoušky dosazením se přesvědčíme, že jsme se v průběhu řešení nedopustili numerické chyby.

1.)

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right) &= 2 \cdot \sin\left(3\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right) + \pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi + \pi\right) = \\ &= 2 \cdot \sin\frac{7}{6}\pi = -2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -1 \end{aligned}$$

$$P\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right) = -1$$

$$L\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right) = P\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right)$$

2.)

$$\begin{aligned}L\left(\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) &= 2 \cdot \sin\left(3\left(\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) + \pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi + \pi\right) = \\ &= 2 \cdot \sin\frac{11}{6}\pi = -2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -1\end{aligned}$$

$$P\left(\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) = -1$$

$$L\left(\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right) = P\left(\frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi\right)$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**1) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $\operatorname{tg} 3x = 0$

b)  $\sin 2x = 0$

c)  $\operatorname{cotg} 4x = 1$

2) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $\sin\left(x + \frac{1}{6}\pi\right) = 1$

b)  $\cos(x + 45^\circ) = 1$

c)  $\operatorname{tg}(x - 30^\circ) = -1$

3) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

b)  $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

4) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $\cos 3x = 0,5$

b)  $\operatorname{cotg} \pi x = 0$

1.) a)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k \cdot \frac{1}{3}\pi \right\}$ , b)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k \cdot \frac{1}{2}\pi \right\}$ ,

c)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi \right\}$

2.) a)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ , b)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ -45^\circ + k \cdot 360^\circ \right\}$

c)  $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ -15^\circ + k \cdot 180^\circ \right\}$

3.) a)  $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + k\pi \right\}$ , b)  $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \right\}$

4.) a)  $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{9}\pi + 2k \cdot \frac{\pi}{3}, \frac{5}{9}\pi + 2k \cdot \frac{\pi}{3} \right\}$ ,

b)  $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{2k+1}{2} \right\}$

## Goniometrické rovnice

### Varianta C

**Příklad:** Řešte rovnici s neznámou  $x \in \mathbf{R}$

$$\sin 2x = \cos 3x \cdot \sin 2x$$

Řešení:

Rovnici upravíme takto:

$$\sin 2x \cdot (1 - \cos 3x) = 0$$

Číslo  $x$  je kořenem této rovnice, právě když platí

$$\sin 2x = 0$$

nebo

$$1 - \cos 3x = 0$$

Zavedeme substituce:

$$2x = u$$

$$3x = v$$

Odtud dostaneme dále:

$$\sin u = 0$$

$$\cos v = 1$$

$$u = k\pi, \text{ kde } k \in \mathbf{Z}$$

$$v = 2m\pi, \text{ kde } m \in \mathbf{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{2}$$

$$x = \frac{2m\pi}{3}$$

Množinu všech řešení zadané rovnice tvoří všechna  $x \in \mathbf{R}$ , která lze psát v některém z tvarů

$\frac{k\pi}{2}, \frac{2m\pi}{3}$ ; přitom  $k, m$  jsou libovolná celá čísla.

Tuto množinu lze zapsat ve tvaru

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \cup \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{2}{3} \cdot m\pi \right\}$$

Nebo také

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3} \cdot k\pi \right\}$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $\cos x = \sin 2x \cdot \cos x$

b)  $\cotg 2x = \tg 3x \cdot \cotg 2x$

2) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $2(\cos x)^2 - 7 \cos x + 3 = 0$

b)  $(\tg x)^2 + 2 \tgn x - 3 = 0$

[a) užití substituce  $\cos x = v$ ]

3) Řešte rovnice s neznámou  $v \in \mathbf{R}$ :

a)  $(\cotg v)^2 + \cotg v = 0$

b)  $2(\sin v)^2 + \sin v - 3 = 0$

4) Řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbf{R}$ :

a)  $\sin x \cdot \cos x = 0$

b)  $\tg x \cdot \cotg x = 0$

1.) a)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{1}{4}\pi + k\pi \right\}$ , b)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}, (4k+1) \cdot \frac{\pi}{12} \right\}$

2.) a)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$ , b)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k\pi, x_1 + k\pi \right\}$ ,

$x_1 \doteq -1,249$ .

3.) a)  $v \in \cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$ ,

b)  $v \in \cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \right\}$

4.) a)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$ , b) prázdná množina

## Goniometrické vzorce

### Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pro všechna } x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{pro všechna } x \neq k\pi$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{pro všechna } x \neq k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

### Součtové vzorce a vzorce pro součet a rozdíl

Pro goniometrické funkce sinus a kosinus platí tyto věty:

Pro všech na reálná čísla  $x, y$  platí

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

**Vzorce pro poloviční a dvojnásobný úhel**

Pro každé reálné číslo  $x$  platí:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

## Trigonometrie

### Sinová věta:

Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikosti  $\alpha, \beta, \gamma$   
a strany délky  $a, b, c$ , platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \quad , \text{kde } r \text{ je poloměr kružnice trojúhelníku opsané}$$

Sinovou větu používáme, jsou-li v trojúhelníku dány:

- a) délka jedné strany a velikosti dvou úhlů
- b) délky dvou stran a velikost úhlu proti jedné z nich.

**Kosinová věta:**

Pro každý trojúhelník  $ABC$ , jehož vnitřní úhly mají velikosti  $\alpha, \beta, \gamma$   
a strany délky  $a, b, c$ , platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Kosinovou větu používáme, jsou-li v trojúhelníku dány:

- a) délky všech tří stran
- b) délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného.

**Další trigonometrické věty**

Pro obsah  $S$  každého pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$ , jehož vnitřní úhly mají velikost  $\alpha, \beta, \gamma$  a strany délky  $a, b, c$  platí:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

Další vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku (Heronův vzorec):

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$S = \rho s$$

$$S = \frac{abc}{4r}, \quad \text{kde } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

$\rho$  je poloměr kružnice vepsané

$r$  je poloměr kružnice opsané

## Goniometrické vzorce a trigonometrie

### Varianta A

**Příklad 1:** a) Určete zbývající hodnoty goniometrických funkcí, jestliže

$$\sin x = 0,6 \quad \text{a zároveň } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

b) Určete zbývající hodnoty goniometrických funkcí, jestliže

$$\cot g = -\frac{1}{3} \quad \text{a zároveň } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Řešení:

$$\text{a) } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \wedge \quad \cos x < 0$$

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -\sqrt{0,64} = -0,8$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cot} g x = -\frac{4}{3}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} x = -3$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(1 + \operatorname{cot} g^2 x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cot} g^2 x}$$

$$\sin x = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{cot} g^2 x}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{9}}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

**Příklad 2:** Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, je-li dáno :

a)  $c = 20\text{cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 105^\circ$

b)  $a = 51,32\text{mm}$ ,  $b = 34,76\text{mm}$ ,  $\beta = 126^\circ 12'$

Řešení: a)  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow a = \frac{c}{\sin\gamma} \sin\alpha = \frac{20}{\sin 30^\circ} \sin 45^\circ = \frac{20}{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$b = \frac{c}{\sin\gamma} \sin\beta = \frac{20}{\sin 30^\circ} \sin 105^\circ \cong 38,6\text{cm}$$

b)  $b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$

$$b^2 = 51,32^2 + 34,76^2 - 2 \cdot 51,32 \cdot 34,76 \cdot \cos 126^\circ 12' \cong 5\,949,14$$

$$b = 77,13\text{mm}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \rightarrow \sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b} = \frac{51,32 \sin 126^\circ 12'}{77,13} \cong 0,54$$

$$\alpha_1 = 32^\circ 28'$$

$$\alpha_2 = 147^\circ 32' \text{ nevyhovuje - tupý úhel je } \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 126^\circ 12' - 32^\circ 28' = 21^\circ 20'$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Určete zbývající hodnoty goniometrických funkcí, jestliže:

e)  $\cos x = -0,6$  a zároveň  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

f)  $\operatorname{tg} x = -2,4$  a zároveň  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

2) Dokažte, že pro všechna  $x$ , pro která jsou dané výrazy definovány, platí

$$\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \cot^2 x$$

$$\frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x} = -\sin 2x$$

3) Určete délky všech stran a úhlů v trojúhelníku ABC, je-li dáno:

c)  $a = 188,4 \text{ cm}$ ,  $\beta = 56^\circ 18'$ ,  $\gamma = 95^\circ 36'$

d)  $b = 25 \text{ cm}$ ,  $c = 25\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$

4) Tři kružnice s poloměry  $r_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 4 \text{ cm}$ ,  $r_3 = 6 \text{ cm}$  se dotýkají vně. Vypočítejte velikosti úhlů, které svírají středné.

Výsledky:

1a.)  $\sin x = -0,8$ ;  $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ ;  $\cot x = \frac{3}{4}$

1b.)  $\sin x = \frac{12}{13}$ ;  $\cos x = -\frac{5}{13}$ ;  $\cot x = -\frac{5}{12}$

3a.)  $b = 332,8 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 28^\circ 6'$ ,  $c = 398,1 \text{ cm}$

3b.)  $a = 48,3 \text{ cm}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 105^\circ$

4.)  $\alpha = 50^\circ 28'$   $\beta = 59^\circ$ ,  $\gamma = 70^\circ 32'$

## Goniometrické vzorce a trigonometrie

### Varianta B

**Příklad:** Upravte:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$\frac{1}{1 - \sin x} - \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} - \frac{1}{1 + \sin x}$$

Řešení: a)

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos 0 - \cos x}{\cos 0 + \cos x} = \frac{-2 \sin \frac{0+x}{2} \sin \frac{0-x}{2}}{2 \cos \frac{0+x}{2} \cos \frac{0-x}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{-x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{-x}{2}} =$$

$$\frac{-2 \sin \frac{x}{2} (-\sin \frac{x}{2})}{2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \mathbf{tg^2 \frac{x}{2}}$$

b)

$$\frac{\sin u + \sin v}{\cos u + \cos v} = \frac{2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}}{2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}} = \mathbf{tg \frac{u+v}{2}}$$

c)

$$\frac{1}{1 - \sin x} - \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} - \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - \sin x - 1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \mathbf{\frac{tg x}{\cos x}}$$

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Vyjádřete jako součin:

a)  $\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{18} =$

b)  $\sin \left( \frac{\pi}{6} - z \right) + \sin \left( \frac{\pi}{6} + z \right) =$

2) Řešte v  $\mathbf{R}$  rovnice:

a)  $\sin 2x = \operatorname{tg} x$

b)  $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$

3) Zjistěte pro která  $x \in \mathbf{R}$  mají výrazy smysl a pak je zjednodušte:

a)  $\frac{\sin 2x}{\cos^2 x} =$

b)  $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} =$

c)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x} =$

d)  $\cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x =$

4) Řešte v  $\mathbf{R}$  rovnice:

a)  $\cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos \left( x + \frac{\pi}{12} \right) - \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$

Výsledky:

1.) a)  $-2 \sin \frac{5\pi}{72} \sin \frac{\pi}{72}$     b)  $\cos z$

2.) a)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$     b)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$

3.) a)  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, 2\operatorname{tg} x$     b)  $x \neq k\pi, \operatorname{cot} g x$

c)  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos^2 x}$

d)  $x \in \mathbf{R} - \cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}, 1$

4.) a)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}$     b)  $\cup_{k \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{19}{12}\pi + 2k\pi \right\}$

## Goniometrické vzorce a trigonometrie

### Varianta C

**Příklad:** Jsou dány funkce  $f: y = \frac{1}{x}$ ,  $g: y = 3x - 2$ . Zapište funkci složenou z funkcí  $f, g$  (v tomto pořadí) pomocí předpisu  $y = (g \circ f)(x)$ .

Řešení:

Nebudeme provádět záměnu označení proměnných ve vyjádření funkcí  $f$  a  $g$ .

1)  $D_f = R \setminus \{0\}$ ,  $D_g = R$ ; do  $D_{g \circ f}$  patří všechna  $x \in D_f$ , pro která je  $f(x) \in D_g$ , čili  $f(x) \in R$ .

Tuto podmínku splňuje každé  $x \in D_f$ , proto  $D_{g \circ f} = R \setminus \{0\}$ .

2) Pro každé  $x \in D_{g \circ f}$  je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) - 2 = 3 \cdot \frac{1}{x} - 2 = \frac{3}{x} - 2.$$

Je tedy  $g \circ f: y = \frac{3}{x} - 2$ .

**Příklad:**

[Varianta A](#)

[Varianta B](#)

[Varianta C](#)

**Příklady k procvičení:**

1) Letadlo letí ve výšce 2 500 m k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět pod výškovým úhlem  $28^\circ$ , při druhém měření pod výškovým úhlem  $50^\circ$ . Určete vzdálenost, kterou proletělo mezi oběma měřeními.

2) Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu  $\alpha = 39^\circ 25'$ . Přejdeme-li k jeho patě o 50 m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu  $\beta = 58^\circ 42'$ . Jak vysoká je věž?

3) Dvě přímé cesty se křížují v úhlu  $\alpha = 53^\circ 30'$ . Na jedné z nich stojí dva sloupy, jeden na křižovatce, druhý ve vzdálenosti 500 m od ní. Jak daleko je třeba jít od křižovatky po druhé cestě, aby byly vidět oba sloupy v zorném úhlu  $\beta = \alpha$ .

4) Na vrcholu hory stojí věž hradu vysoká  $v = 30$  m. Křižovatku silnic v údolí vidíme z vrcholu věže a od její paty v hloubkových úhlech  $\alpha = 32^\circ 52'$ ,  $\beta = 30^\circ 10'$ . Jak vysoko je vrchol hory nad křižovatkou.

Výsledky:

1.)	2 600 m
2.)	82,1 m
3.)	595 m
4.)	272 m