FUNKCE

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově

Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia

Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Funkce a jejich vlastnosti

Pojem funkce, graf

Definice:

Funkce na množině $\boldsymbol{A} \subset \mathbf{R}$ je předpis (přiřazení), který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo. Množina $\boldsymbol{A}$ se nazývá **definiční obor** funkce.

Již z dřívějška znáte pojem zobrazení: Zobrazení množiny $\boldsymbol{A}$ do množiny $\boldsymbol{B}$ je předpis, který každému prvku $a \in \boldsymbol{A}$ jednoznačně přiřadí nějaký prvek $b \in \boldsymbol{B}$.

Označení funkcí- f, g, h ...

Zápis- $f: y = f(x)$

Např.: $f: y = 2x$ nebo $f(x) = 2x$

$f(x)$… funkční hodnota funkce v čísle $\underline{x}$ nebo hodnota funkce v čísle $\underline{x}$

x… nezávislá proměnná

y… závislá proměnná

Definiční obor funkce je množina všech hodnot $\underline{x}$ ozn. $D(f)$ nebo D_f.

Obor hodnot funkce f je množina všech $y \in \boldsymbol{R}$, ke kterým existuje aspoň jedno $\underline{x}$ z definičního oboru funkce f tak, že $y = f(x)$. Obor hodnot značíme $H(f)$ nebo H_f.

Graf funkce:

Graf funkce f ve zvolené soustavě souřadnic Oxy v rovině je množina všech bodů $X[x, f(x)]$, kde x patří do definičního oboru funkce f.

Způsoby zadání funkce:

K zadání funkce je třeba stanovit (zvolit):

1.) Definiční obor funkce $D(f)$
2.) Funkční předpis, tj. pravidlo (formulované slovně nebo častěji pomocí matematických symbolů), podle kterého je ke každému číslu $x \in D(f)$ přiřazena jednoznačně funkční hodnota $y = f(x)$.

Podle formy funkčního předpisu rozlišujeme tyto **základní způsoby zadání funkce f**:

a) Analytické zadání- funkční předpis je dán vzorcem, tj. rovnicí tvaru $y = f(x)$, kde $f(x)$ je výraz s proměnnou x, např. $f(x) = x - 2, f(x) = \sqrt{(1 - x^2)}$ apod., anebo několika takovými rovnicemi platnými pro různé části definičního oboru funkce. Tento způsob zadání bývá nejčastější.

b) Grafické zadání- funkční předpis je dán grafem funkce.

c) Zadání výčtem (tabelární zadání)- funkční předpis je určen výčtem (zpravidla tabulkou) všech uspořádaných dvojic $[x, y = f(x)]$ hodnot argumentu x a příslušných funkčních hodnot $f(x)$. Takový způsob zadání funkce lze ovšem použít jen pro funkce, jejichž definičním oborem je konečná množina. Výčtem funkčních hodnot lze zadat funkci, jejímž oborem funkčních hodnot je konečná množina.

Maximální definiční obor funkce:

Je-li funkce dána rovnicí $y = f(x)$, pak maximálním definičním oborem se rozumí množina takových všech reálných čísel $\underline{x}$, pro něž má výraz $f(x)$ smysl.

Např. $f(x) = \frac{1}{x-1}, D(f) = R\setminus\{1\}$

Rovnost funkcí:

O dvou funkcích f, g říkáme, že jsou si rovny (píšeme $f = g$), právě když mají týž definiční obor $D(f) = D(g)$ a v každém bodě x tohoto definičního oboru je $f(x) = g(x)$.

Složená funkce:

Protože funkce jsou zobrazení, můžeme je skládat. Pro dvojici skládaných funkcí g, f musí být ovšem splněny tyto předpoklady:

Nechť funkce $g: u = g(x)$ má definiční obor $D(g)$, jemuž přísluší obor funkčních hodnot $H(g) \neq \emptyset$, a nechť funkce $f: y = f(u)$ má definiční obor $D(f)$ takový, že platí

$H(g) \subset D(g)$. Z této podmínky plyne, že pro každé $x \in D(g)$ je $u = g(x) \in D(f)$. Pak lze vytvořit funkci $h: y = h(x)$ s definičním oborem $D(h) = D(g)$, jejíž funkční předpis je

$$h(x) = f(g(x)) \text{ pro každé } x \in D(h);$$

tuto funkci h nazýváme funkcí složenou z funkcí g, f(v uvedeném pořadí) a značíme ji $h = f \circ g$. Funkci f se říká vnější složka (funkce) a funkci g vnitřní složka (funkce) složené funkce h.

Příklad složené funkce:

Funkci $h: y = \sqrt{1-x}$ s definičním oborem $D(h) = (-\infty; 1\rangle$ lze pokládat za funkci složenou z vnitřní funkce $g: u = 1 - x$ s definičním oborem $D(g) = D(h) = (-\infty; 1\rangle$, jemuž přísluší obor funkčních hodnot $H(g) = \langle 0, +\infty)$, a z vnější funkce $f: y = \sqrt{u}$ s definičním oborem $D(f) = H(g) = \langle 0; +\infty)$.

Vlastnosti funkcí

a)

Definice:

Funkce f se nazývá **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Je dána funkce f, J je interval (může být omezený či neomezený, uzavřený, polozavřený či otevřený), který je částí jejího definičního oboru($J \subset D_f$).

Funkce f se nazývá **rostoucí v intervalu J**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in J$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **klesající v intervalu J**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in J$ platí: Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D_f$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Je-li funkce rostoucí, pak je prostá.

Je-li funkce klesající, pak je prostá.

b)

Funkce f se nazývá sudá, právě když zároveň platí:

1.) Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$
2.) Pro každé $x \in D_f$ je také $f(-x) = f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.

Funkce f se nazývá lichá, právě když zároveň platí:

1.) Pro každé $x \in D_f$ je také $-x \in D_f$
2.) Pro každé $x \in D_f$ je také $f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic Oxy.

c)

Funkce f se nazývá **zdola omezená**, právě když existuje číslo d takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq d$.

Funkce f se nazývá **shora omezená**, právě když existuje číslo h takové, že pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq h$.

Funkce f se nazývá **omezená**, právě když je zdola omezená a zároveň shora omezená.

d)

Říkáme, že **funkce f má v bodě a maximum**, právě když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \leq f(a)$.

Říkáme, že **funkce f má v bodě b minimum**, právě když pro všechna $x \in D_f$ je $f(x) \geq f(b)$.

e)

Inverzní funkce k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

1.) $D_{f^{-1}} = H_f$
2.) Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.

Grafy funkcí f a f^{-1} sestrojené v téže soustavě souřadnic Oxy se stejnou délkovou jednotkou na obou osách jsou souměrně sdruženy podle přímky $y = x$.

f)

Funkce f se nazývá **periodická funkce**, právě když existuje takové číslo $p > 0$, že pro každé $k \in Z$ platí následující podmínky:

a) Je-li $x \in D_f$, pak $x + kp \in D_f$
b) $f(x + kp) = f(x)$.

Číslo p se nazývá **perioda funkce** f.

Pokud v množině čísel, která jsou periodami funkce f, existuje nejmenší kladné číslo, nazýváme ho nejmenší perioda funkce f.

Funkce a jejich vlastnosti

Varianta A

Příklad: Zapište funkce na množině R, které každému $x \in R$ přiřazují

a) jeho trojnásobek,
b) jeho absolutní hodnotu zmenšenou o dvě,
c) součet dvojnásobku jeho třetí mocniny a poloviny jeho druhé mocniny.

Řešení:

a) $y = 3x$
b) $y = |x| - 2$
c) $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$

Příklad:

Varianta A
Varianta B
Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Zapište funkce, které vyjadřují závislost

a) obvodu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce jeho odvěsny,

b) obsahu rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku na délce jeho přepony.

2) Zapište funkce, které vyjadřují závislost:

a) obvodu kruhu na jeho poloměru,

b) obsahu kruhu na jeho poloměru.

3) Je dán kvádr se čtvercovou podstavou; délka jeho podstavné hrany je b, délka jeho boční hrany je $0{,}5b$. Zapište funkce udávající závislost

a) součtu délek všech hran kvádru na b,

b) délky tělesové úhlopříčky na b.

4) Je dán kvádr se čtvercovou podstavou; délka jeho podstavné hrany je b, délka jeho boční hrany je $0{,}5b$. Zapište funkce udávající závislost

a) povrchu kvádru na b,

b) objemu kvádru na b.

1.) a) $o = \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot a, a > 0$, b) $S = \frac{1}{4}c^2, c > 0$

2) a) $o = 2\pi r;\ r \in (0, +\infty)$, b) $S = \pi r^2;\ r \in (0, +\infty)$

3.) a) $d = 10b;\ b \in (0, +\infty)$, b) $u = 1{,}5b;\ b \in (0, +\infty)$,

4.) a) $S = 4b^2;\ b \in (0, +\infty)$, b) $V = 0{,}5b^3;\ b \in (0, +\infty)$

Funkce a jejich vlastnosti

Varianta B

Příklad: Je dána funkce $m: y = \frac{x-2}{x-3}$.

a) Zapište její definiční obor pomocí sjednocení intervalů.

b) Vypočítejte $m(5), m(11)$.

c) Zjistěte, zda $3{,}5 \in H_m; 1 \in H_m$.

Řešení:

a) $D_m = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) $m(5) = \frac{5-2}{5-3} = \frac{3}{2}, m(11) = \frac{11-2}{11-3} = \frac{9}{8}$

c) $3{,}5 = \frac{x-2}{x-3}$

$3{,}5x - 10{,}5 = x - 2$

$2{,}5x = 8{,}5$

$x = \frac{8{,}5}{2{,}5} = \frac{17}{5} = 3{,}4$

$3{,}5 \in H_m$

$1 = \frac{x-2}{x-3}$

$x - 3 = x - 2$

$0 \neq 1$

$1 \notin H_m$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Je dána funkce $p: y = \frac{2}{x^2+1}$.

a) zapište definiční obor funkce p b) zjistěte, zda $1 \in H_p$; $4 \in H_p$

2) Je dána funkce $g: y = x - x^3$.

a) zapište její definiční obor b) zjistěte, zda $0 \in H_g$

3) Zapište definiční obory těchto funkcí pomocí intervalů a jejich sjednocení:

a) $r_1: y = \frac{1}{x}$ b) $r_2: y = \frac{6x}{(2x-3)(x-5)}$

4) Zapište definiční obory těchto funkcí pomocí intervalů a jejich sjednocení:

a) $r_1: y = \sqrt{x}$ b) $r_2: y = \frac{5-x}{2-3x}$

1.) a) $D_p = R$, b) $1 \in H_p$; [Řešíme rovnici $1 = \frac{2}{x^2+1}$.] $4 \notin H_p$.

[Řešíme rovnici $4 = \frac{2}{x^2+1}$.]

2.) a) $D_g = R$, b) $0 \in H_g$

3.) a) $D_{r_1} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

b) $D_{r_2} = (-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; 5) \cup (5, +\infty)$

4.) a)$D_{r_1} = \langle 0, +\infty)$,

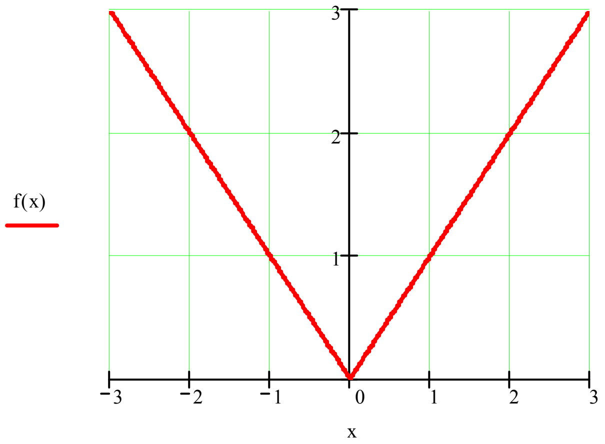
b) $D_{r_2} = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Funkce a jejich vlastnosti

Varianta C

Příklad: Sestrojte graf funkce $f: y = |x|$ a určete její vlastnosti.

Řešení:



$$D(f) = R$$

$$H(f) = \langle 0, +\infty)$$

$$f(-x) = f(x)$$

Graf funkce je souměrný dle osy y.

Funkce je sudá.

V intervalu $(-\infty, 0)$ je klesající.

V intervalu $(0, +\infty)$ je rostoucí.

Je omezená zdola, $d = 0$.

Minimum je v bodě 0, jeho hodnota je 0.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

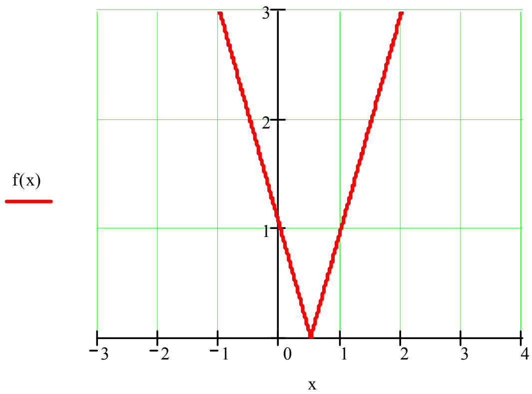
1) Sestrojte graf funkce $f: y = |2x - 1|$ a určete její vlastnosti.

2) Sestrojte graf funkce $f: y = -4|x|$ a určete její vlastnosti.

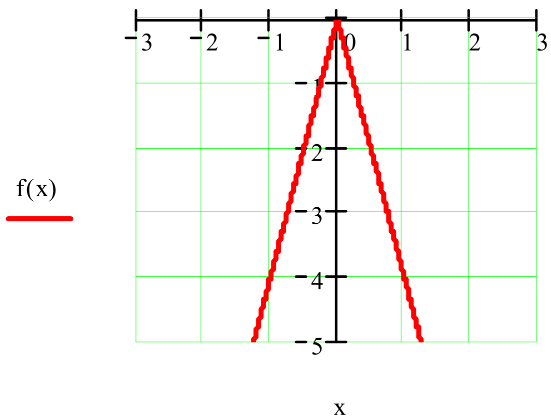
3) Sestrojte graf funkce $f: y = -x^2 + 3$ a určete její vlastnosti.

4) Sestrojte graf funkce $f: y = 3 \cdot |x - 2|$ a určete její vlastnosti.

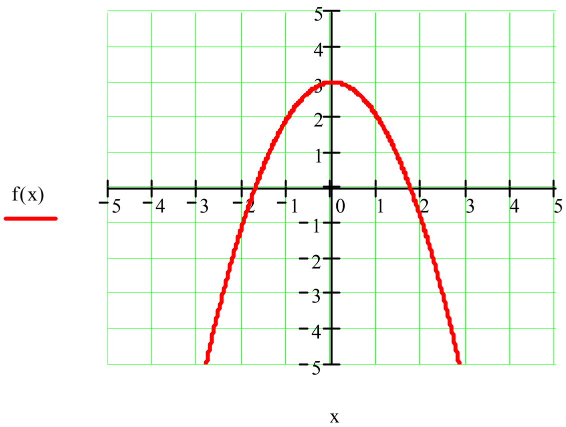
1.) $f(x) = |2x - 1|$



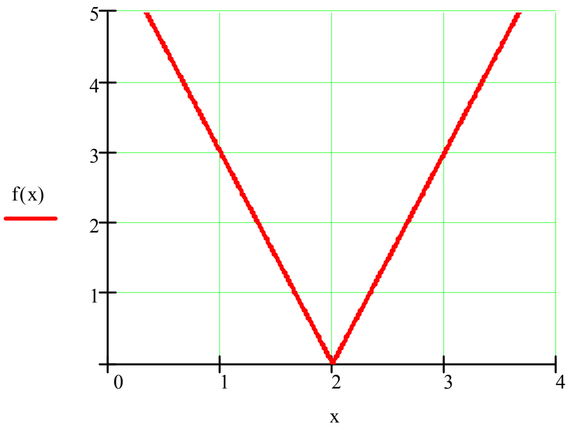
2.) $f(x) = -4|x|$



3.) $f(x) = -x^2 + 3$



4.) $f(x) = 3 \cdot |x - 2|$



Vlastnosti funkcí:

Př. 1)

$D(f) = R, H(f) = \langle 0, +\infty)$, není sudá, není lichá,.v intervalu $(-\infty, 0)$ je klesající, v intervalu $(0, +\infty)$ je rostoucí, je omezená zdola($d = 0$), minimum je v bodě 0, jeho hodnota je 0.

Př. 2)

$D(f) = R, H(f) = (-\infty, 0\rangle$, je sudá,.v intervalu $(-\infty, 0)$ je rostoucí, v intervalu $(0, +\infty)$ je klesající, je omezená shora($h = 0$), maximum je v bodě 0, jeho hodnota je 0.

Př. 3)

$D(f) = R, H(f) = (-\infty, 3\rangle$, je sudá,.v intervalu $(-\infty, 0)$ je rostoucí, v intervalu $(0, +\infty)$ je klesající, je omezená shora($h = 3$), maximum je v bodě 0, jeho hodnota je 3.

Př. 4)

$D(f) = R, H(f) = \langle 0, +\infty)$, není sudá, není lichá,.v intervalu $(-\infty, 2)$ je klesající, v intervalu $(2, +\infty)$ je rostoucí, je omezená zdola($d = 0$), minimum je v bodě 2, jeho hodnota je 0.

Lineární funkce

Definice, graf, vlastnosti

Lineární funkce je každá funkce na množině **R** (tj. funkce o definičním oboru R), která je dána ve tvaru $\boldsymbol{y = ax + b}$ (1), kde *a, b* jsou reálná čísla. Speciálním případem lineárních funkcí jsou funkce, pro něž je *a=0*, tj. funkce $\boldsymbol{y = b}$, které nazýváme **konstantní funkce**. Pro lineární funkce dané vzorcem (1), v němž je $b = 0$, užíváme také název **přímá úměrnost**.

Grafem každé lineární funkce v soustavě souřadnic Oxy je přímka různoběžná s osou y. Jde-li speciálně o konstantní funkci, je jejím grafem přímka rovnoběžná s osou x; graf funkce přímá úměrnost prochází počátkem soustavy souřadnic.

Platí také obráceně: Každá přímka různoběžná s osou y je grafem některé lineární funkce. K sestrojení grafu lineární funkce stačí tedy znát dva jeho různé body; k sestrojení grafu konstantní funkce dokonce pouze bod jediný.

Věta: Každá lineární funkce $\boldsymbol{y = ax + b}$ je

a) je rostoucí pro $a > 0$

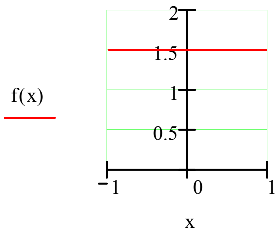
b) je klesající pro $a < 0$

c) není prostá, je-li $a = 0$.

Vlastnosti funkce $y = ax + b$

$a = 0$

$f(x) := 1.5$



Oborem hodnot je {b}.

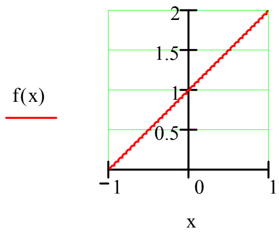
Není prostá, a tedy není ani rostoucí, ani klesající.

Je omezená.

V každém x∈R má maximum a minimum.

$a > 0$

$f(x) := x + 1$



Oborem hodnot je **R**.

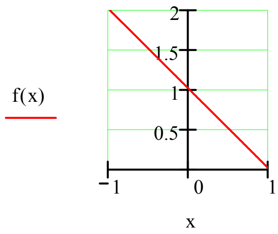
Je rostoucí.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Nemá v žádném bodě ani maximum,ani minimum.

$a < 0$

$f(x) := -x + 1$



Oborem hodnot je **R**.

Je klesající.

Není ani shora, ani zdola omezená.

Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.

Definice, graf, vlastnosti

Varianta A

Příklad: Vypočítejte hodnoty funkce $\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{y = -2x + 3}$ v bodech $0, 3, -5, 18$.

Řešení: $h(0) = -2 * 0 + 3 = 3$

$h(3) = -2 * 3 + 3 = -3$

$h(-5) = -2 * (-5) + 3 = 13$

$h(18) = -2 * 18 + 3 = -33$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady:

1) Je dáno $A[1{,}0]$, $B[0, -1]$. Napište rovnici funkce f, aby body A, B náležely grafu funkce f.

2) Uveďte tři body, které patří do grafu funkce:

a) $y = -1{,}5$ b) $y = 3x + 2{,}1$

3) Je dána funkce k: $y = 3x - 1$, x∈ $\langle -3{,}3 \rangle$. Které z bodů $[0, -1]$, $[2{,}5]$, $[5{,}14]$, $[-6{,}8]$, patří do grafu této funkce?

4) Pro lineární funci g platí: $g(1) = 1$, $g(3{,}5) = -7$. Vyjádřete ji předpisem $y = ax + b$.

Výsledek řešení:

1) $f: y = x - 1$
2) a) $[0; -1{,}5]$ $[-1; -1{,}5]$ $[1; -1{,}5]$ b) $[0; 2{,}1]$ $[1; 5{,}1]$ $[-2; -3{,}9]$
3) $[0; -1]$ $[2; 5]$
4) $g: y = -3{,}2x + 4{,}2$

Definice, graf, vlastnosti

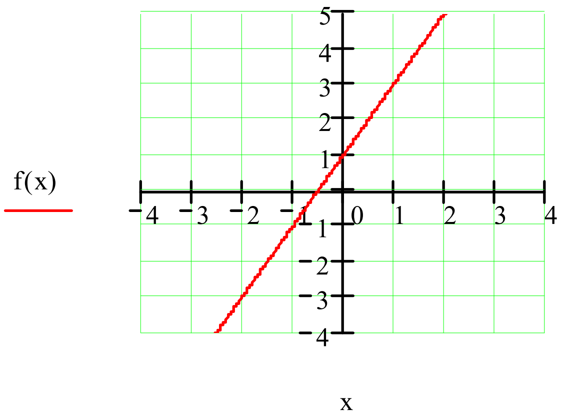
Varianta B

Příklad: Zakreslete graf funkce $f: y = 2x + 1$.Určete její obor hodnot, je-li D(f)= (-2,6)

Řešení: a)Určíme dva libovolné body grafu *A, B*

b)Určíme obor hodnot: pro $x = -2$ je $y = 2.(-2) + 1 = -3$, pro $x = 6$ je $y = 2.6 + 1 = 13$ H(f)= (-3,13)

A[0,1], *B*[2,5]



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady:

1) Načrtněte grafy funkcí a pak zapište jejich obory hodnot:

a) $y = -3x + 4, x \in \langle -4,10 \rangle$ b) $y = 7x + 1, x \in (0,6)$

c) $y = 2x - 2, x \in (-4, 2\rangle$

2) Načrtněte v téže soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $y = 0{,}7x + b$, pro $b = 0; -3; -1{,}5; 1{,}5; 2.$

3) Načrtněte v téže soustavě souřadnic Oxy grafy funkcí $y = ax + 3$, pro $a = 0; -2; -4; 1{,}4; 3.$

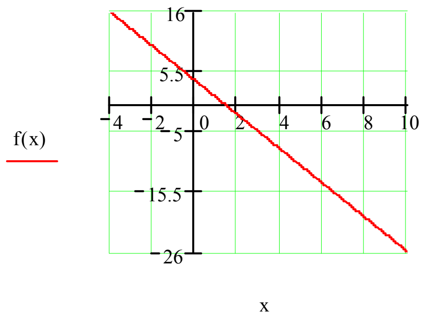
4) Načrtněte grafy funkcí a pak zapište jejich obory hodnot

a) $y = -0{,}5x + 4,\ x \in \langle -4,2 \rangle$ b) $y = 2x + 1,\ x \in (-5,4)$

Výsledek řešení:

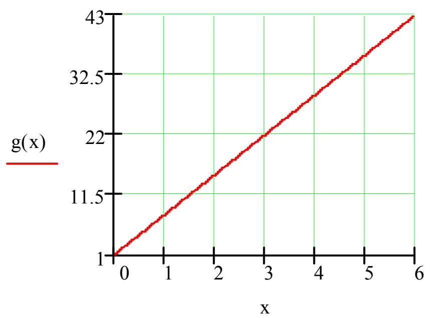
1a.) $y \in \langle -26; 16 \rangle$

$f(x) := -3x + 4$

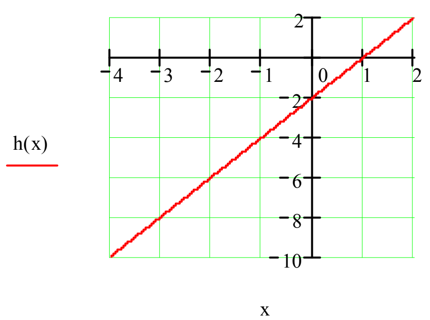


1b.) $y \in \ (1; 43)$ 5c) $y \in \ (-10, 2\rangle$

$g(x) := 7x + 1$



$h(x) := 2x - 2$



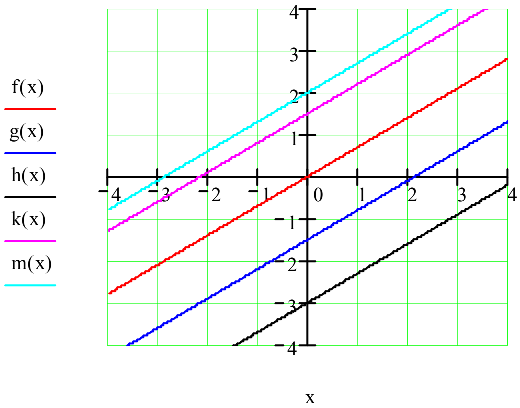
2.)

$$g(x) := 0.7x - 1.5$$

$$h(x) := 0.7x - 3$$

$$k(x) := 0.7x + 1.5$$

$$m(x) := 0.7x + 2$$



3.)

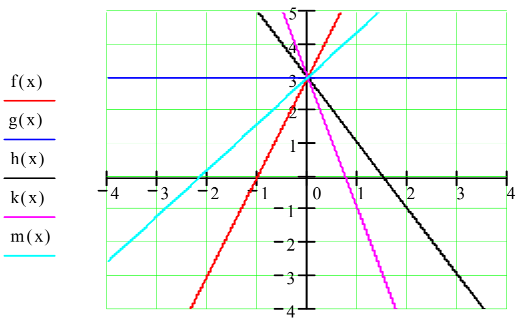
$$f(x) := 3x + 3$$

$$g(x) := 3$$

$$h(x) := -2x + 3$$

$$k(x) := -4x + 3$$

$$m(x) := 1.4x + 3$$



4.) a) klesající, H(f)= $\langle 3, 6 \rangle$ b) rostoucí, H(f)= $(-9,9)$

Definice, graf, vlastnosti

Varianta C

Příklad: Sestrojte graf lineární funkce $y = -2x + 4$ a zjistěte pak z něho, pro která $x \in R$ platí:

a) $-2x + 4 = 0$, b) $-2x + 4 \geq 0$, c) $-2x + 4 < 0$,

d) $-2x + 4 \leq 5$, e) $-2x + 4 > 6$, f) $-4 \leq -2x + 4 < 6$

Řešení: Sestrojíme graf lineární funkce $f\colon y = -2x + 4$

Z grafu je vidět, že

a) funkční hodnota 0 nastává pro $x = 2$

b) nerovnost splňuje část grafu nad osou x, tedy $x \in (-\infty, 2\rangle$

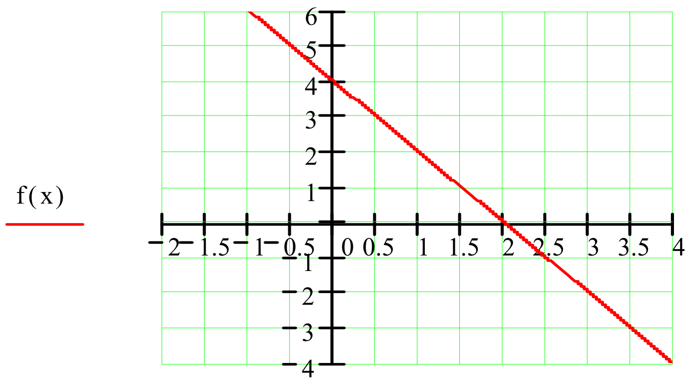
c) nerovnost splňuje část grafu pod osou x, tedy $x \in (2, +\infty)$

d) funkční hodnota $f(x) = 5$ pro $x = 0{,}5$, řešením nerovnice je tedy interval $\langle 0{,}5; +\infty)$

e) funkční hodnota $f(x) = 6$ pro $x = -1$, řešením nerovnice je tedy interval $(-\infty, -1)$

f) funkční hodnota $f(x) = 6$ pro $x = -1 \wedge f(x) = -4$ pro $x = 4 \Rightarrow x \in \langle -1; 4\rangle$

viz graf



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady:

1) Řešte graficky i početně.tyto soustavy rovnic s neznámými x,y∈**R**:

a) $y = 3x - 2$
   $y = -x + 1$

b) $3x - 2y = 4$
   $x + 3y = 5$

c) $x + y = 1$
   $-3x = 15 + 3y$

d) $3x + y = 9$
   $6x + 2y = 18$

2) Sestrojte graf funkce m: $y = -x + 2{,}5$. Z grafu pak určete všechna $x \in R$, pro která platí:

a) $m(x) = 0$ b) $m(x) \leq 0$ c) $m(x) > 3$

3) Sestrojte graf funkce t: $y = \ x - 1{,}5$. Z grafu pak určete všechna x∈R, pro která platí:

a) $t(x) = 0$ b) $t(x) \geq 0$ c) $t(x) < 0$

d) $t(x) \leq -2$ e) $t(x) > 3$ f) $-1 \leq t(x) \leq 1$

4) Řešte graficky i početně soustavy rovnic s neznámými x,y∈R:

a) $x + y = 1$
   $x + 2y = 2$

b) $x + y = 1$
   $2x + y = 2$

c) $x + y = 1$
   $2x + 2y = 2$

d) $x + y = 1$
   $2x + 2y = 4$

Výsledek řešení:

1.) $\left[\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right]$; $[2; 1]$; $\emptyset$; $[x, 9 - 3x]$ 2.) $x = 2{,}5$; $x \geq 2{,}5$; $x < 0{,}5$

3.) $a)x = 1{,}5\ \ b)x \geq 1{,}5\ \ c)x < 1{,}5\ \ d)x \leq -0{,}5\ \ e)x > 4{,}5\ \ f)x \in \langle 0{,}5; 4{,}5\rangle$

4.) $a)[0; 1]\ \ b)[1; 0]\ \ c)[x; 1 - x]\ \ d)\emptyset$

Absolutní hodnota. Lineární funkce s absolutní hodnotou.

Absolutní hodnota reálného čísla a je číslo |a|, pro které platí:

je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$

je-li $a < 0$, je $|a| = -a$

Každému reálnému číslu je podle definice přiřazena jednoznačně jeho absolutní hodnota. Získáváme tak funkci na množině **R** danou předpisem $y = |x|$, hovoříme o **funkci absolutní hodnota**.

Věta: Pro každá dvě reálná čísla a, b platí: $|a - b| = |b - a|$

Geometrický význam absolutní hodnoty reálného

Absolutní hodnota libovolného reálného čísla udává vzdálenost obrazu tohoto reálného čísla na číselné ose od jejího počátku.

Poznámka: Při řešení jednoduchých rovnic s absolutní hodnotou ve tvaru $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| = \boldsymbol{b}$ si stačí uvědomit, že hledáme reálná čísla, jejichž vzdálenost od čísla a je rovna číslu b.

Absolutní hodnota. Lineární funkce s absolutní hodnotou.

Varianta A

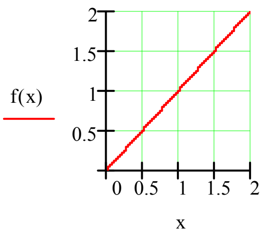
Příklad: Sestrojte graf funkce $y = |x|$

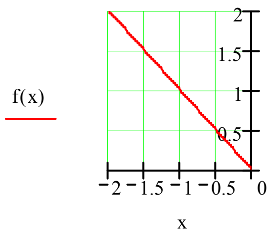
Řešení: Pro každé $x \geq 0$ je $|x| = x$, pro každé $x < 0$ je $|x| = -x$. K sestrojení grafu funkce $y = |x|$ můžeme tedy využít grafy funkcí $y = x$ a $y = -x$.
Graf funkce y=|x| se skládá z grafů těchto dvou funkcí:

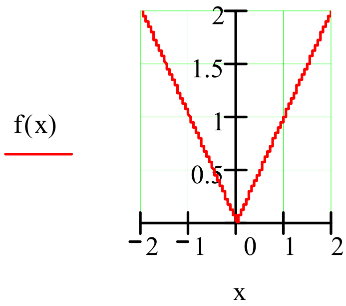
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}, pro\ x \in \langle 0, +\infty)$

$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}, pro\ x \in (-\infty, 0)$

$y = x$ $\quad\quad$ $y = -x$ $\quad\quad$ $y = |x|$







Oborem hodnot funkce $y = |x|$ je interval uzavřený ⟨ 0,+∞). Je klesající v intervalu (-∞,0⟩, je rostoucí v intervalu ⟨0,+∞). Je zdola omezená, není shora omezená. V bodě 0 má minimum, nemá v žádném bodě maximum.

Poznámka: Úlohu je možné řešit také pomocí tzv. nulového bodu. Ten získáme tak, že výraz v absolutní hodnotě položíme roven nule, v našem příkladě je nulovým bodem 0. Pak rozdělíme definiční obor na disjunktní intervaly (-∞,0), ⟨0,+∞) , odstraníme absolutní hodnotu v jednotlivých intervalech a postupujeme stejně jako je uvedeno v předcházejícím..

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady:

1) Vypočítejte:

a) $|-15| + ||2| - |5||$ b) $|6-9| - |9-6|$ $c)$ $|(-5)*(-3)| - |-5|*|-3|$

d) $|7-11| + |-11| + |7|$

2) S využitím grafu funkce $y = |x|$ řešte v R tyto rovnice a nerovnice:

a) $|x| = 2$ b) $|x| \geq 2$ c) $|x| < 2$

3) Řešte graficky rovnice s absolutní hodnotou:

a) $|x-1| = 2$ b) $|3-x| = 1$

4) Řešte nerovnice s absolutní hodnotou:

a) $|x-1| > 2$ b) $|x-1| < 2$ c) $|x+1| > 2$ d) $|x+1| < 2$

(návod: výraz $|x+1|$ upravte na $|x-(-1)|$)

Výsledek řešení:

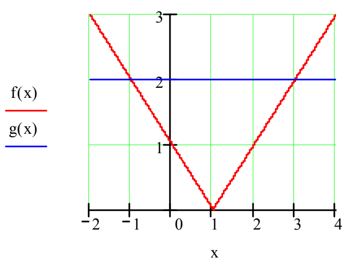
1) a) 18, b) 0, c) 0 d) 22

2) a) $\{-2{,}2\}$ b)$(-\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty)$ c)$(-2{,}2)$

3)

$f(x) := |x-1|$

$g(x) := 2$

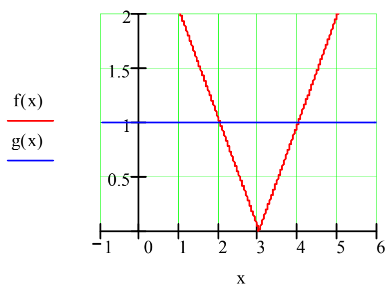


x= -1,

x= 3

$f(x) := |3-x|$

$g(x) := 1$



x= 2,

x= 4

4) a)$(-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ b) $(-1{,}3)$ c) $(-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$ d) $(-3{,}1)$

Absolutní hodnota. Lineární funkce s absolutní hodnotou.

Varianta B

Příklad: Sestrojte graf funkce:

f: $y = |x-1|$, **g**: $y = |x+1|$, **h**: $y = |x-1| + 2$

Řešení: Nulové body jednotlivých funkcí jsou: 1, -1, 1

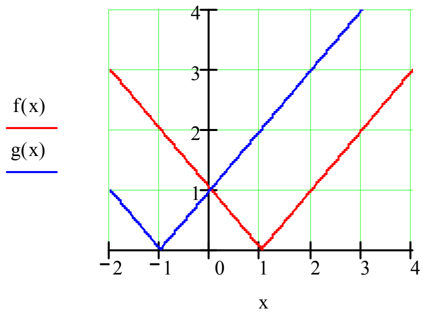
Tyto body rovněž určují posun grafu funkce $y = |x|$ po ose x. Číslo 2.v předpisu funkce **h** určuje posun grafu téhož grafu po ose y.

H(f)= $\langle$ 0; +∞)

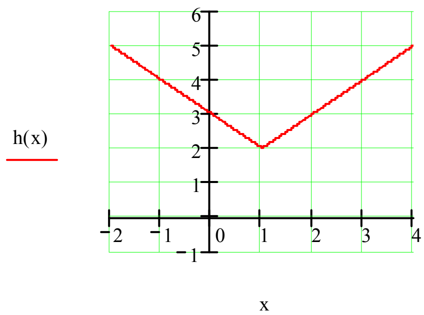
H(g)= $\langle$ 0; +∞)

$f(x) := |x-1|$

$g(x) := |x+1|$



$h(x) := |x-1| + 2$



H(h)= $\langle$ 2,+∞)

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady:

1) Vyjádřete pomocí intervalů definiční obory těchto funkcí:

a) y=$\sqrt{(|x| - x)}$ c) y=$\sqrt{(|x| + x)}$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$

2) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $f: y = |x - 2|$ b) $g: y = |x - 2| - 3$

3) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $f: y = |x| + x$ b) $g: y = x - |x|$ c)h: $y = \dfrac{x}{|x|}$

4) Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = 2|x|$ b) $y = -2|x|$ c) $y = -0{,}5|x|$

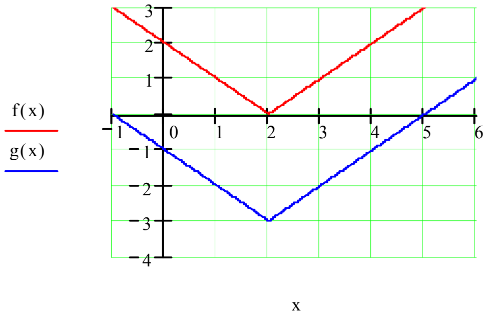
Výsledek řešení:

1.) a) **R** c) **R** b) $(0, +\infty)$

2.)

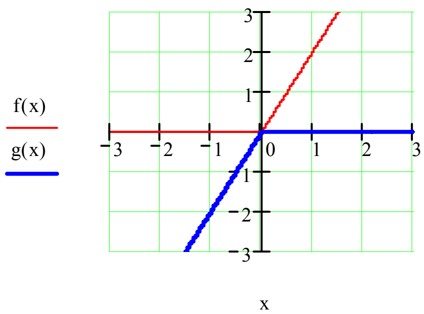
$f(x) := |x - 2|$

$g(x) := |x - 2| - 3$

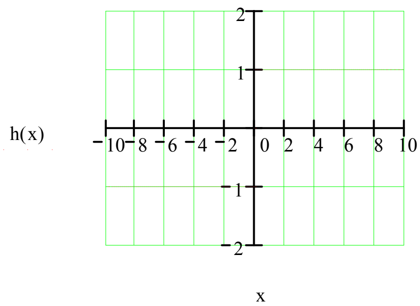


3.)

$f(x) := x + |x|$ $g(x) := x - |x|$



$h(x) := \frac{x}{|x|}$



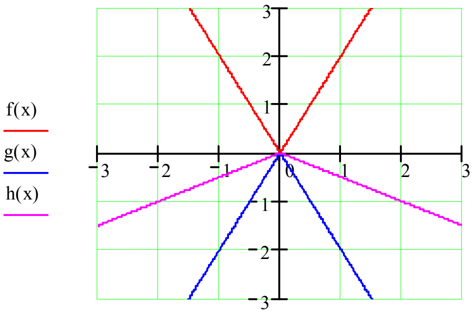
D(f)=R-{0}

4.)

$f(x) := 2\,|x|$

$g(x) := -2\,|x|$

$h(x) := -0.5\,|x|$



Absolutní hodnota. Lineární funkce s absolutní hodnotou.

Varianta C

Příklad: Sestrojte graf funkce $f\colon y = |x-2| + |x+1|$

Řešení: Budeme se snažit (stejně jako při sestrojování grafu funkce z předchozího příkladu) vyjádřit funkci ***f*** pomocí funkcí, v nichž se nevyskytují absolutní hodnoty:

a) je-li $x-2 \geq 0$, tj. $x \geq 2$, pak $|x-2| = x-2$
b) je-li $x-2 < 0$, tj. $x < 2$, pak $|x-2| = -(x-2)$
c) je-li $x+1 \geq 0$, tj. $x \geq -1$, pak $|x+1| = x+1$
d) je-li $x+1 < 0$, tj. $x < -1$, pak $|x+1| = -(x+1)$

Nerovnosti z předchozích čtyř řádků nám umožňují rozložit množinu R na tři navzájem disjunktní intervaly: (-∞,-1), ⟨−1,2) , ⟨2,+∞)

(Všimněte si, že pro čísla -1,2 nabývá vždy jeden z výrazů $|x-2|$, $|x+1|$ nulové hodnoty.)
Nyní vyjádříme v každém z uvedených intervalů výraz $|x-2| + |x+1|$ tak, aby se v něm nevyskytovaly absolutní hodnoty:

1. Pro $x \in (-\infty,-1)\ je\ |x-2| = -(x-2), |x+1| = -(x+1)\ a\ tedy\ |x-2| + |x+1| = -(x-2)-(x+1) = -2x+1.$
2. Pro $x \in \langle -1,2)\ je\ |x-2| = -(x-2), |x+1| = x+1, a\ tedy\ |x-2| + |x+1| = -(x-2)+(x+1) = 3$
3. Pro $x \in \langle 2,+\infty)\ je\ |x-2| = x-2, |x+1| = x+1, a\ tedy\ |x-2| + |x+1| = (x-2)+(x+1) = 2x-1.$

Řešení lze zapsat přehledněji do tabulky:

x	(-∞,-1)	⟨−1,2)	⟨2,+∞)
|x-2|	-(x-2)	-(x-2)	x-2
|x+1|	-(x+1)	x+1	x+1
|x-2|+|x+1|	-2x+1	3	2x-1

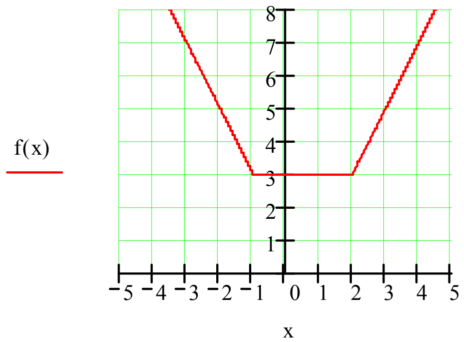
Získané výsledky nám umožňují vyslovit následující závěr. Graf funkce ***f*** se skládá z grafů funkcí f, g, h, jež lze vyjádřit takto:

$k: y = -2x + 1, x \in (-\infty, -1)$

$g: y = 3, x \in \langle -1, 2\ )$

$h: y = 2x - 1, x \in \langle 2, +\infty)$

Graf funkce ***f*** je na obrázku:



H(f)= $\langle 3, +\infty)$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady:

1) Načrtněte graf funkce $y = \ x + |2 - 3x|$

2) Načrtněte graf funkce $y = \ |x - 1| - |x + 1|$

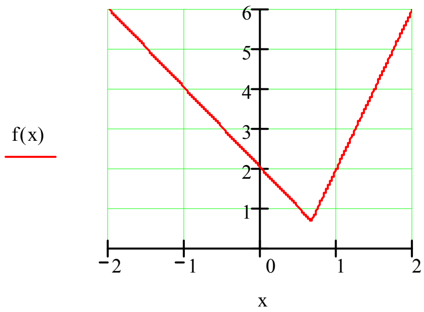
3) Načrtněte graf funkce $y = \ |x - 2| - 2.|x - 5| + 1$

4) Načrtněte graf následující funkce; z grafu pak popište, ve kterých intervalech je funkce rostoucí, resp. klesající: $y = \ |x - 3| - |5 - 2x| + 3.|1 - x|$

Výsledek řešení:

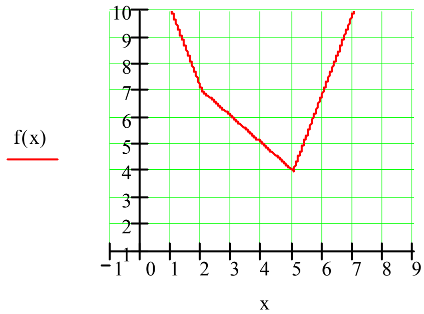
1.)

$f(x) := x + |2 - 3x|$



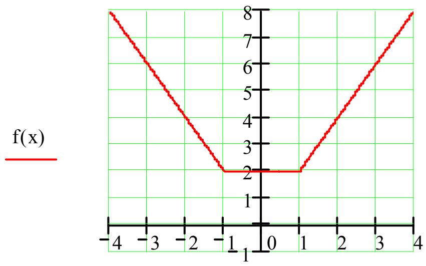
3.)

$f(x) := |x - 2| + 2|x - 5| + 1$



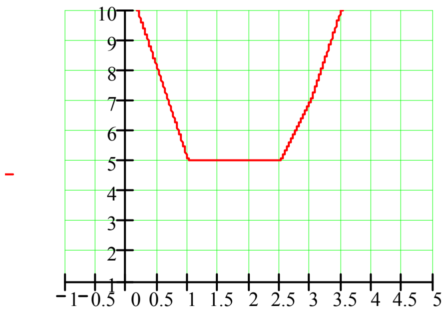
2.)

$f(x) := |x - 1| + |x + 1|$



4.)

$f(x) := |x - 3| + |5 - 2x| + 3|1 - x|$



Klesající: $(-\infty; 1)$

Rostoucí: $(2{,}5; +\infty)$

Konstantní: $(1; 2{,}5)$

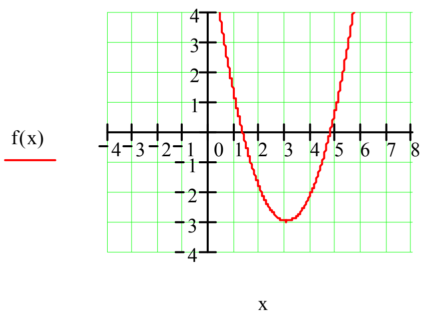
Kvadratická funkce

Definice, graf, vlastnosti

Kvadratická funkce je každá funkce na množině $\boldsymbol{R}$ (tj. o definičním oboru R) daná ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, b, c \in \boldsymbol{R}$.

Funkce $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$a > 0$



Oborem hodnot je $\langle c - \frac{b^2}{4a}, +\infty)$.

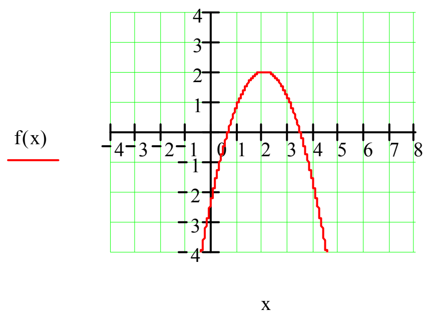
Je rostoucí v $\langle -\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Je klesající v $(-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$.

Je zdola omezená, není shora omezená.

V bodě $x = -\frac{b}{2a}$ má minimum.

$a < 0$



Oborem hodnot je $(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\rangle$.

Je rostoucí v $(-\infty, -\frac{b}{2a}\rangle$.

Je klesající v $\langle -\frac{b}{2a}, +\infty)$.

Je shora omezená, není zdola omezená.

V bodě $x = -\frac{b}{2a}$ má maximum.

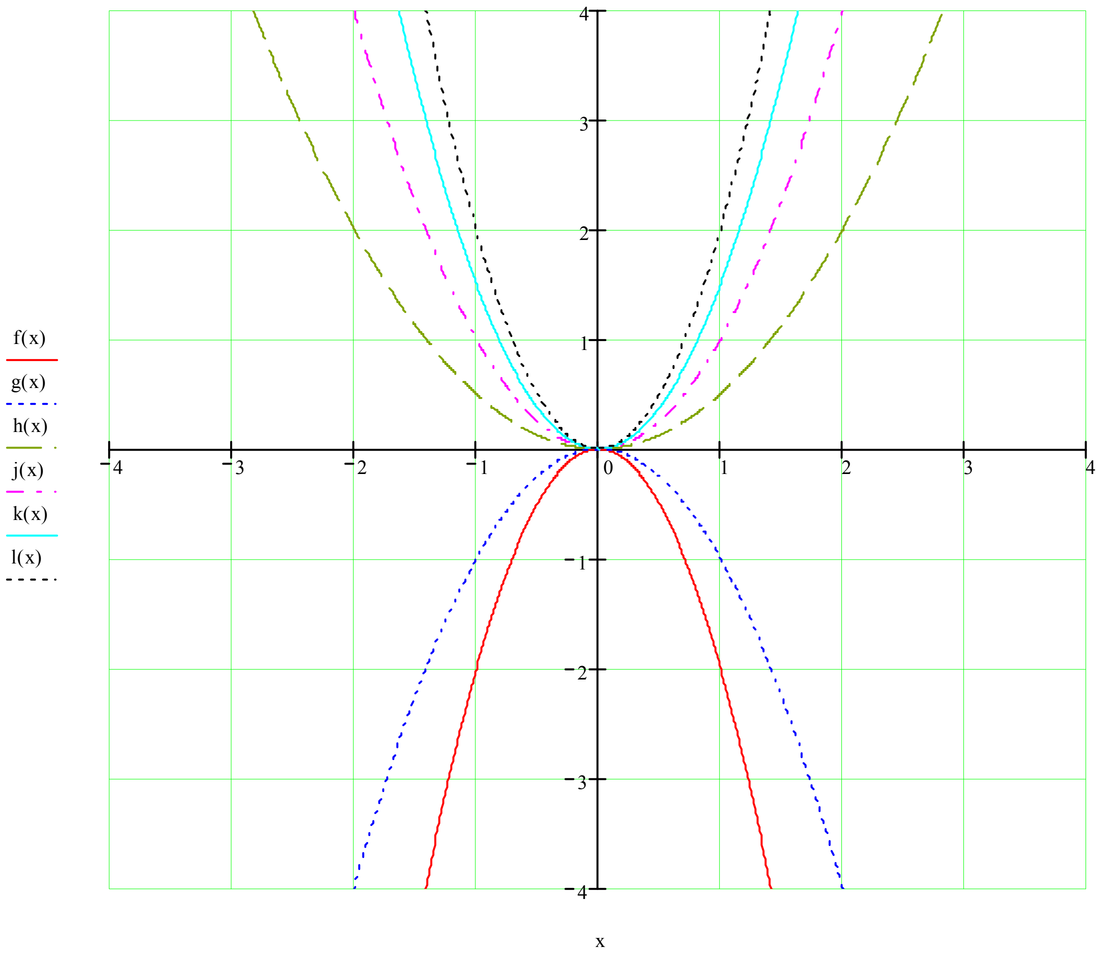
Definice, graf, vlastnosti

Varianta A

Do jednoho obrázku zakreslete grafy funkcí $f: y = ax^2$ pro a$\in \{-2, -1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$.

Řešení:

$$f(x) = -2x^2, g(x) = -x^2, h(x) = \frac{1}{2}x^2, j(x) = x^2, k(x) = \frac{3}{2}x^2, l(x) = 2x^2$$



Závěr: $a > 0$ => funkce má minimum $a < 0$ => funkce má maximum

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklad:

1) Zapište funkci, která vyjadřuje závislost obsahu kruhu na jeho poloměru.

2) Určete předpisem $y = ax^2 + bx + c$ kvadratickou funkci f, pro kterou platí:

$f(0) = 0, f(-2) = 4, f(3) = 6.$

3) Je dána kvadratická funkce $f: y = x^2 - 6x + 11$. Zjistěte, zda existuje aspoň jedno $x \in D_f$, pro které platí:

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = 5$

4) Které z bodů $[0,4], [-1,10], [3,25]$ patří do grafu kvadratické funkce

$y = 3x^2 - 2x + 5$?

1.) $y = \pi r^2, r \in (0, +\infty)$; 2.) $f: y = \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{5}x$, řešíme soustavu rovnic $0=a.0^2+b.0+c$, $4=a.(-2)^2+b.(-2)+c$, $6=a.3^2+b.3+c$;

3.) a) NE, b) ANO- řešíme kvadratické rovnice

$x^2 - 6x + 11 = 1, x^2 - 6x + 11 = 5.$

4) $[-1, 10]$

Definice, graf, vlastnosti

Varianta B

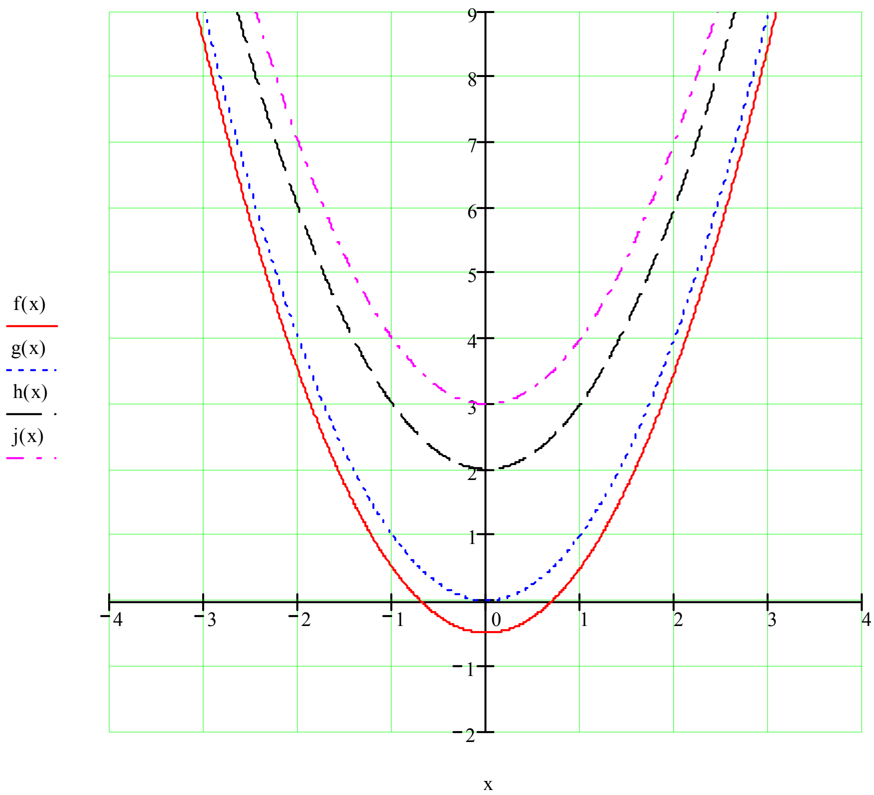
Sestrojte do jednoho obrázku grafy funkcí:

a) $f\colon y = x^2 + c;\ c \in \{-0{,}5;\ 0;\ 2;\ 3\}$ b) $f\colon y = (x - k)2;\ k \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$

Řešení:

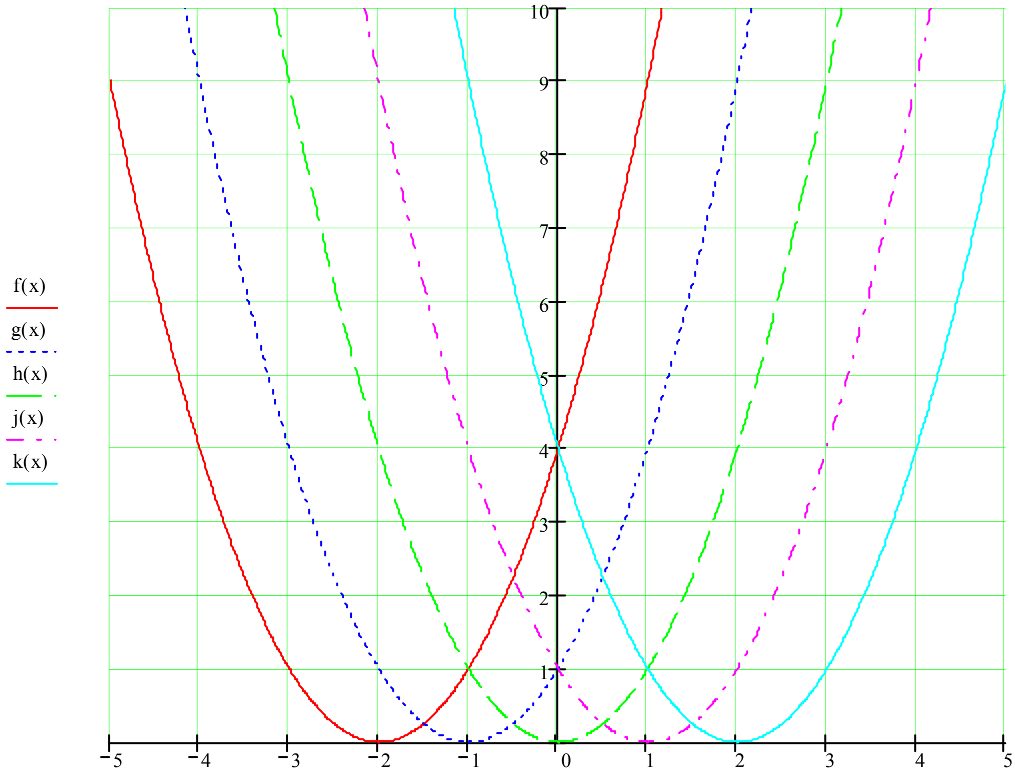
ad a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x): y=(x+2)^2	8,5	3,5	0,5	-0,5	0,5	3,5	8,5
g(x): y= (x+1)^2	9	4	1	0	1	4	9
h(x): y= x^2	11	6	3	2	3	6	11
j(x): y= (x-1)^2	12	7	4	3	4	7	12



ad b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x): $y=(x+2)^2$	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**
g(x): $y=(x+1)^2$	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**
h(x): $y=x^2$	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**	**9**
j(x): $y=(x-1)^2$	**16**	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**	**4**
k(x): $y=(x-2)^2$	**25**	**16**	**9**	**4**	**1**	**0**	**1**



Závěr:

a) graf funkce $f: y = x^2 + c$ získáme tak, že graf funkce $f_0: y = x^2$ posuneme o c jednotek ve směru osy y

b) graf funkce $f: y = (x - k)^2$ získáme tak, že graf funkce $f_0: y = x^2$ posuneme o k jednotek ve směru osy x.

***Příklad*:**

Varianta A

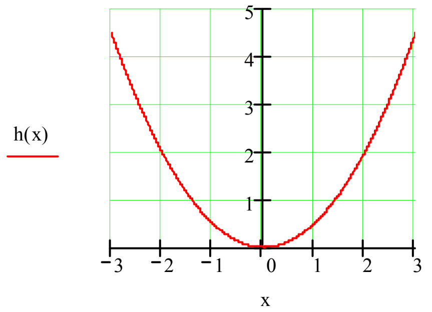
Varianta B

Varianta C

Příklad:

1) Na obrázku je graf funkce h: $y = \frac{1}{2}x^2$. Sestrojte pomocí něho graf funkce

h_2: $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$.



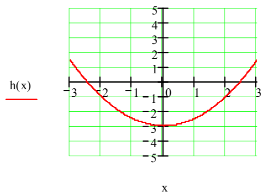
2) Sestrojte graf funkce h_3: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$, a to opět využitím grafu funkce h: $y = \frac{1}{2}x^2$.

3) Sestrojte graf funkce h_4: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ pomocí grafu funkce h: $y = \frac{1}{2}x^2$.

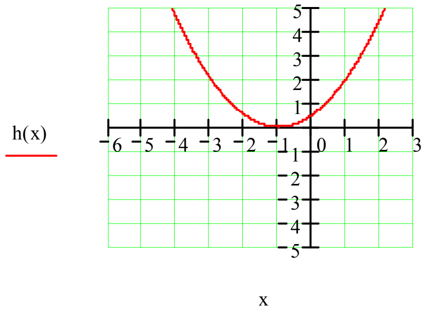
4) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$y = -2x^2$, $y = -2(x+3)^2$, $y = -2(x-3)^2$, $y = 2(x-3)^2$

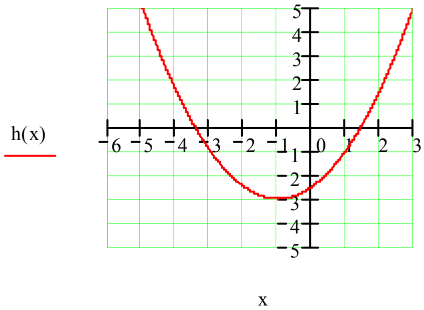
1.)



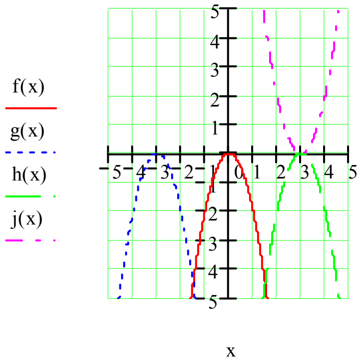
2.)



3.)



4.)



Definice, graf, vlastnosti

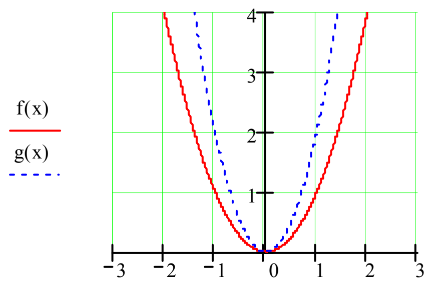
Varianta C

Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí:

a) $f: y = 2x^2$ b) $y = 2x^2 - 8x + 5$

ad a)

$f(x) := x^2$ $g(x) := 2x^2$

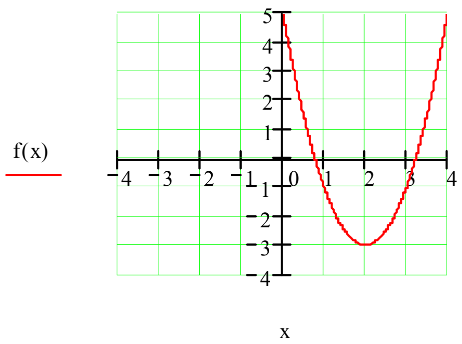


ad b) Určíme vrchol (vytkneme 2 a doplníme na čtverec)

$$2x^2 - 8x + 5 = 2\left[x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right] = 2\left[(x-2)^2 - 4 + \frac{5}{2}\right] = 2\left[(x-2)^2 - \frac{3}{2}\right]$$
$$= 2(x-2)^2 - 3$$

Vrchol je v bodě V[2,-3].

Průsečíky s osou x jsou body $[\frac{4-\sqrt{6}}{2}; 0]$, $[\frac{4+\sqrt{6}}{2}; 0]$; s osou y bod [0,5].



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

1) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = x^2 - 2x + 5$ b) $y = -x^2 - 6x - 8$

2) Načrtněte graf funkce $y = 2x^2 + 5x - 1$

3) Načrtněte grafy funkcí:

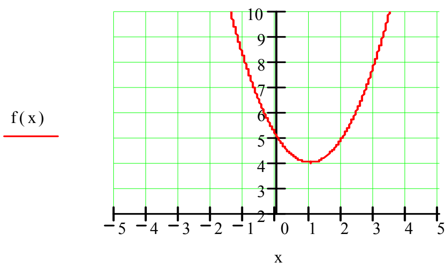
a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^2 - 2x - 2$

c) $y = x^2 + 4x + 1$ d) $y = x^2 + 2x + 2$

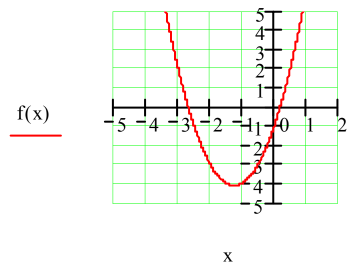
4) Načrtněte grafy funkcí:

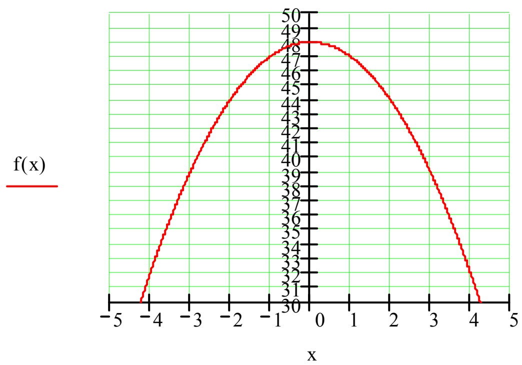
a) $y = 2x^2 - 8x + 9$ b) $y = -x^2 - 2x - 2$

1.)

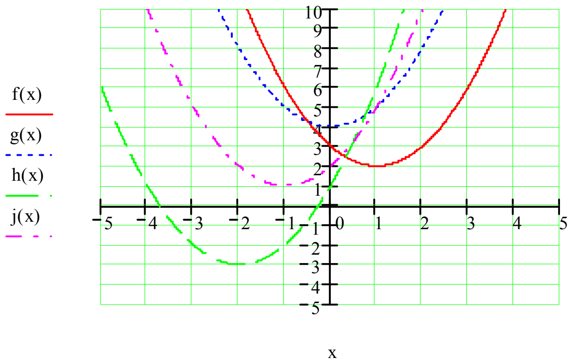


2.)

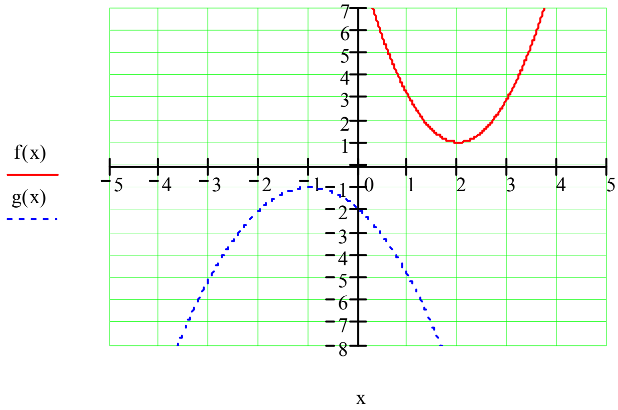




3.)



4.)



Užití grafů kvadratických funkcí při řešení rovnic a nerovnic. Grafy kvadratických funkcí s absolutní hodnotou.

Při řešení kvadratických rovnic a nerovnic využíváme často graf kvadratické funkce. Stačí najít průsečíky grafu s osou x (rozkladem, doplněním na čtverec nebo užitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice) a na základě zadání rozhodnout o řešení viz řešený příklad varianty A.

Grafy kvadratických funkcí s absolutní hodnotou sestrojujeme obdobně jako grafy lineárních funkcí s absolutní hodnotou. Tzn. pomocí nulových bodů nebo užitím definice absolutní hodnoty.

Graf funkce $f: y = |g(x)|$ získáme tak, že sestrojíme graf funkce $g(x)$ a všechny jeho části, které leží pod osou x(jsou záporné), zobrazíme v osové souměrnosti podle osy x.

Užití grafů kvadratických funkcí při řešení rovnic a nerovnic. Grafy kvadratických funkcí s absolutní hodnotou.

Varianta A

Užitím grafu funkce $f: y = -x^2 - x + 6$ řešte

a) $-x^2 - x + 6 = 0$ b) $-x^2 - x + 6 > 0$ c) $-x^2 - x + 6 < 0$

d) $-x^2 - x + 6 \geq 0$ e) $-x^2 - x + 6 \leq 0$

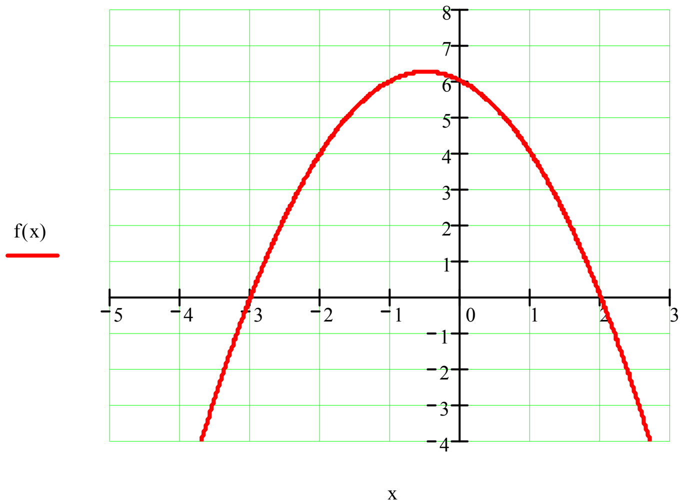
Řešení:

$$f: y = -[x^2 + x + 6] = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{24}{4}\right] = -\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$$

$$= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

$V\left[-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right]$, $x = 0 \Rightarrow y = 6$

$$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \Rightarrow x_1 = -3, \qquad x_2 = 2$$



a) $x \in \{-3,2\}$

b) $x \in (-3,2)$

c) $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

d) $x \in \langle -3,2 \rangle$

e) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklad:

1) Z grafu funkce $y = x^2 - 9$ zjistěte všechna $x \in R$, pro která platí:¨

$a)\ x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 - 9 \geq 0$ c) $x^2 - 9 < 0$ d) $x^2 - 9 \leq 0$

2) S využitím grafů kvadratických funkcí řešte tyto kvadratické nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ b) $x^2 - 2x + 3 < 0$

3) S využitím grafů kvadratických funkcí řešte tyto kvadratické nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $2x^2 - 5x + 2 < 0$ b) $-2x^2 + 6x - 9 \leq 0$

4) Řešte tyto kvadratické nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $2x^2 + 7x - 15 \geq 0, 2x^2 + 7x - 15 < 0$

b) $-x^2 - 3x + 10 \leq 0, -x^2 - 3x + 10 > 0$

1.) a) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ b) $x \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ c) $x \in (-3,3)$ d) $x \in \langle -3,3 \rangle$.

2.) a) $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 3, +\infty)$ b) žádné řešení.

3.) a) $x \in (0{,}5; 2)$ b) $x \in R$.

4.) a) $x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 1{,}5; +\infty)$,

Užití grafů kvadratických funkcí při řešení rovnic a nerovnic. Grafy kvadratických funkcí s absolutní hodnotou.

Varianta B

Sestrojte grafy funkcí:

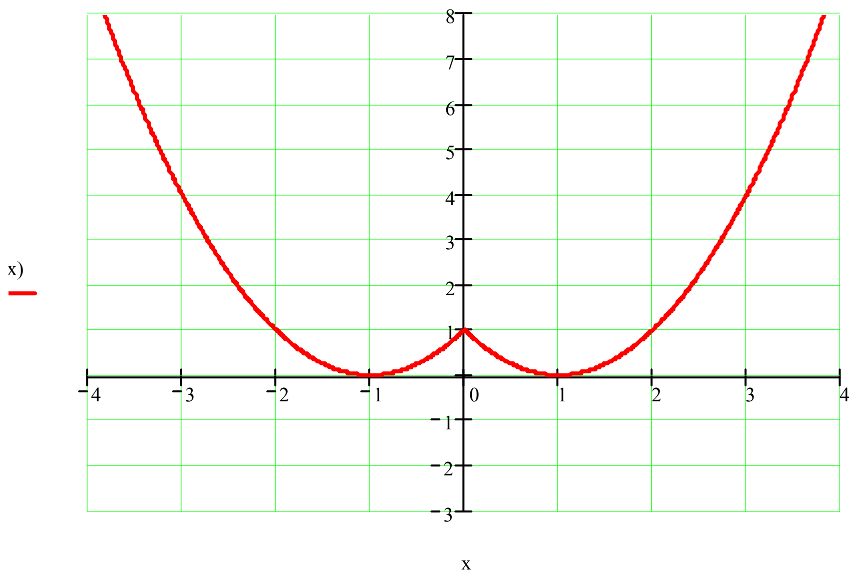
a) $f_1: y = x^2 - |2x| + 1$

b) $f_2: y = x^2 - |2x - 1|$

Řešení:

ad a)

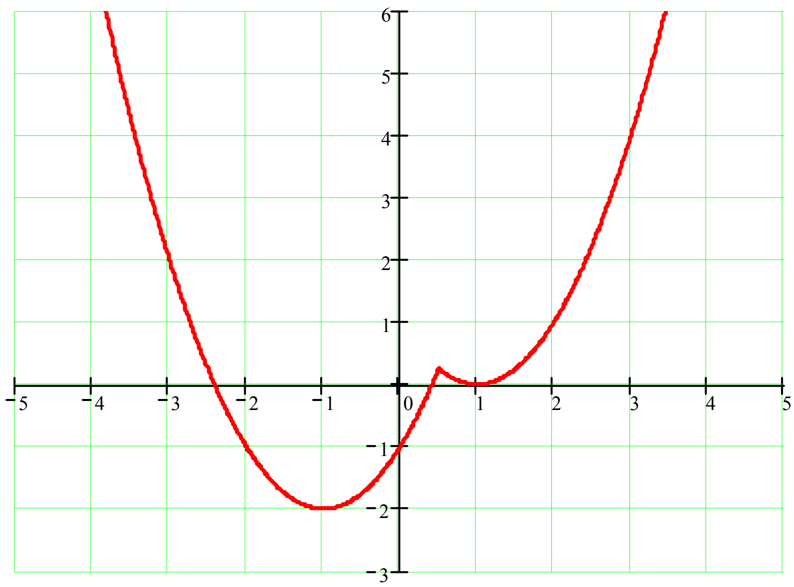
$(-\infty,0\rangle$	$(0,+\infty)$
$y = x^2 + 2x + 1$	$y = x^2 - 2x + 1$
$y = (x+1)^2$	$y = (x-1)^2$
$V[-1.0]$	$V[1.0]$
$x_1 = -1$	$x_1 = 1$
$y = 1$	$y = 1$



ad b)

$(-\infty, \frac{1}{2}\rangle$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$-2x+1$	$2x-1$
$y = x^2 + 2x - 1$	$y = x^2 - 2x + 1$
$y = (x+1)^2 - 2$	$y = (x-1)^2$
$V[-1.-2]$	$V[1.0]$
$x_1 = 0{,}4, x_2 = 2{,}4$	$x = 1$
$y = -1$	$y = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklad:

1) Sestrojte graf funkce $f: y = x \cdot |x|$

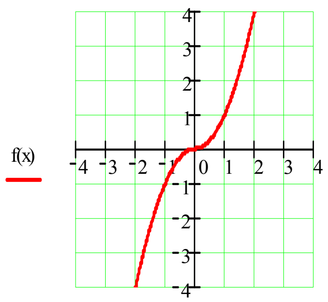
2) Sestrojte garf funkce $f: y = -2x \cdot |x-1|$

3) Načrtněte do téže soustavy souřadnic Oxy graf funkce

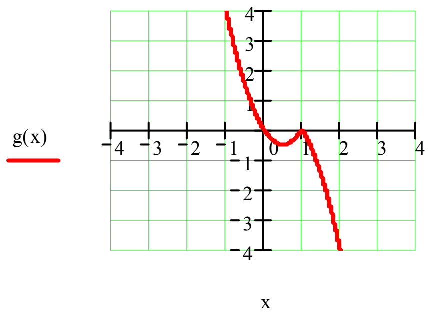
$$y = -(3-x)^2, y = |-(3-x)^2|$$

4) Načrtněte graf funkce $f: y = 2x + |1 - x^2|$

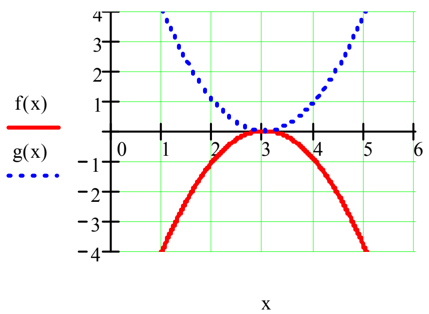
1.)



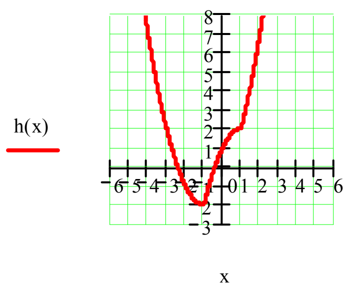
2.)



3.)



4.)



Užití grafů kvadratických funkcí při řešení rovnic a nerovnic. Grafy kvadratických funkcí s absolutní hodnotou.

Varianta C

Sestrojte graf funkcí:

a) $y = |-x^2 + 4x + 1|$

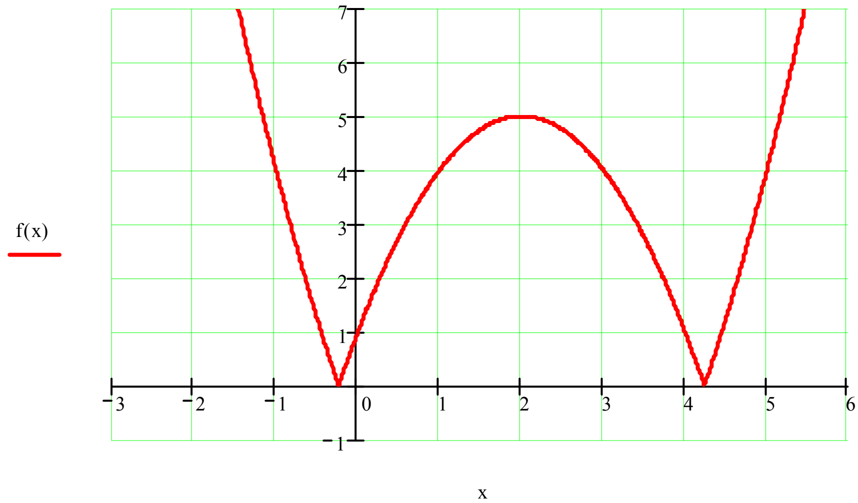
b) $y = ||x^2 - 2x| - 4|$

Řešení:

ad a) $y = -x^2 + 4x + 1 = -(x^2 - 4x - 1) = -[(x-2)^2 - 5] = -(x-2)^2 + 5$

V[2.5], x=0 => y=1

y=0 => $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} = 2 \pm \sqrt{5}$; $x_1 \cong 4{,}2$; $x_2 \cong -0{,}2$



ad b) $y = |x^2 - 2x| - 4;$ $x(x-2)$, nulové body 0,2

$(-\infty,0\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$(2,+\infty)$
$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$
$y = x^2 - 2x - 4$	$y = -x^2 + 2x - 4$	$y = x^2 - 2x - 4$

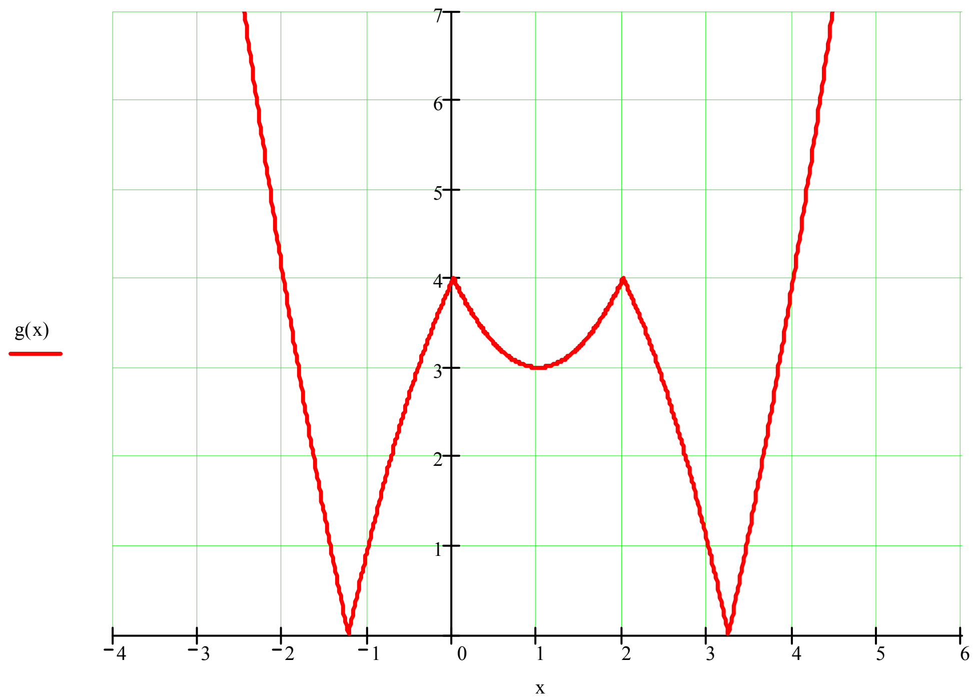
$y = (x-1)^2 - 5, \quad V[1,-5], \quad x = 0, \quad y = -4$

$$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}, \qquad x_1 \cong 3{,}2\,; \; x_2 \cong -1{,}2$$

$y = -(x^2 - 2x + 4) = -[(x-1)^2 + 3] = -(x-1)^2 - 3, \qquad V[1,-3]$

$x = 0 \Rightarrow y = -4$

$$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{-2} \qquad \textit{nemá řešení.}$$



***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklad:

1) Do jednoho obrázku sestrojte grafy funkcí:

a) $f: y = x^2 - 5|x| + 6$ b) $g: y = |x^2 - 5|x| + 6|$

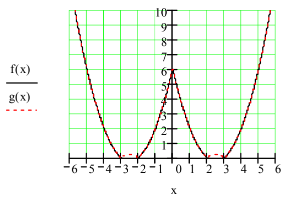
2) Načrtněte graf funkce $y = |1 - x^2| + x$.

3) Načrtněte graf funkce $y = |1 - x^2| + |x^2 - 4|$.

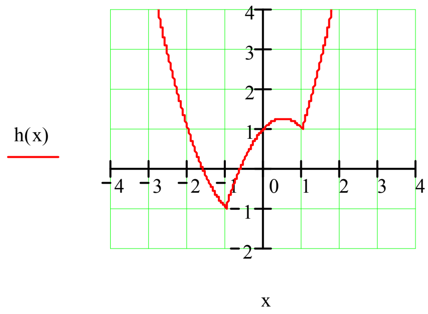
4) Načrtněte v soustavě souřadnic Oxy graf funkce

$$y = -x^2 + 2x + 2, y = -x^2 + 2|x| + 2, y = |-x^2 + 2|x| + 2|.$$

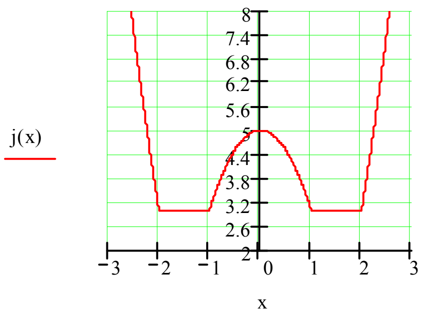
1.)



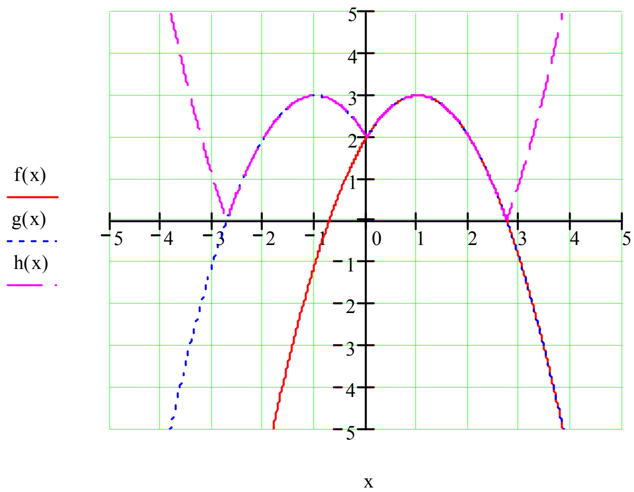
2.)



3.)



4.)



Lineární lomené funkce

Nepřímá úměrnost je každá funkce na množině $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ daná ve tvaru $y = \frac{k}{x}$, kde k je reálné číslo různé od nuly.

Kolikrát se zvětší velikost jedné strany parcely s danou výměrou, ***tolikrát se zmenší*** velikost strany s ní sousední. Říkáme, že velikost jedné strany parcely je ***nepřímo úměrná*** velikosti strany s ní sousední.

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $\mathbf{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$, vyjádřená ve tvaru $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla, $c \neq 0$ a $ad - bc \neq 0$.

Pro $x = -\frac{d}{c}$ je $cx + d = 0$ a výraz $\frac{ax+b}{cx+d}$ nemá význam.

Speciálním případem lineární lomené funkce($a = d = 0$) je funkce $y = \frac{b}{cx} = \frac{\frac{b}{c}}{x}$, což je nepřímá úměrnost.

Při sestrojování grafu lineární lomené funkce převedeme rovnici $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ na rovnici $y = \frac{k}{x-a'} + b'$ tím způsobem, že čitatele dané rovnice vydělíme jmenovatelem.

Lineární lomené funkce

Varianta A

Příklad: Do jednoho obrázku zakreslete grafy funkcí:

a) $f: y = \frac{1}{x}$

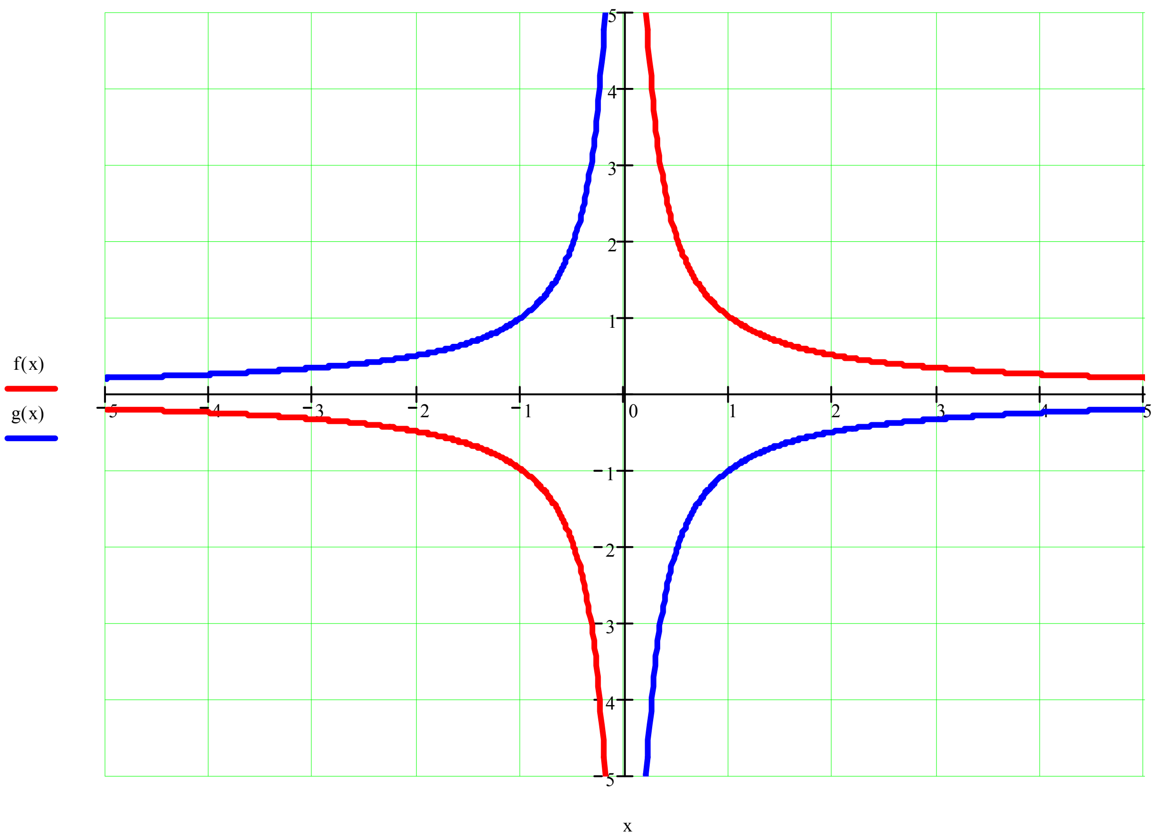
$g: y = -\frac{1}{x}$

b) $f: y = \frac{2}{x}$

$g: y = \frac{2}{x+1}$

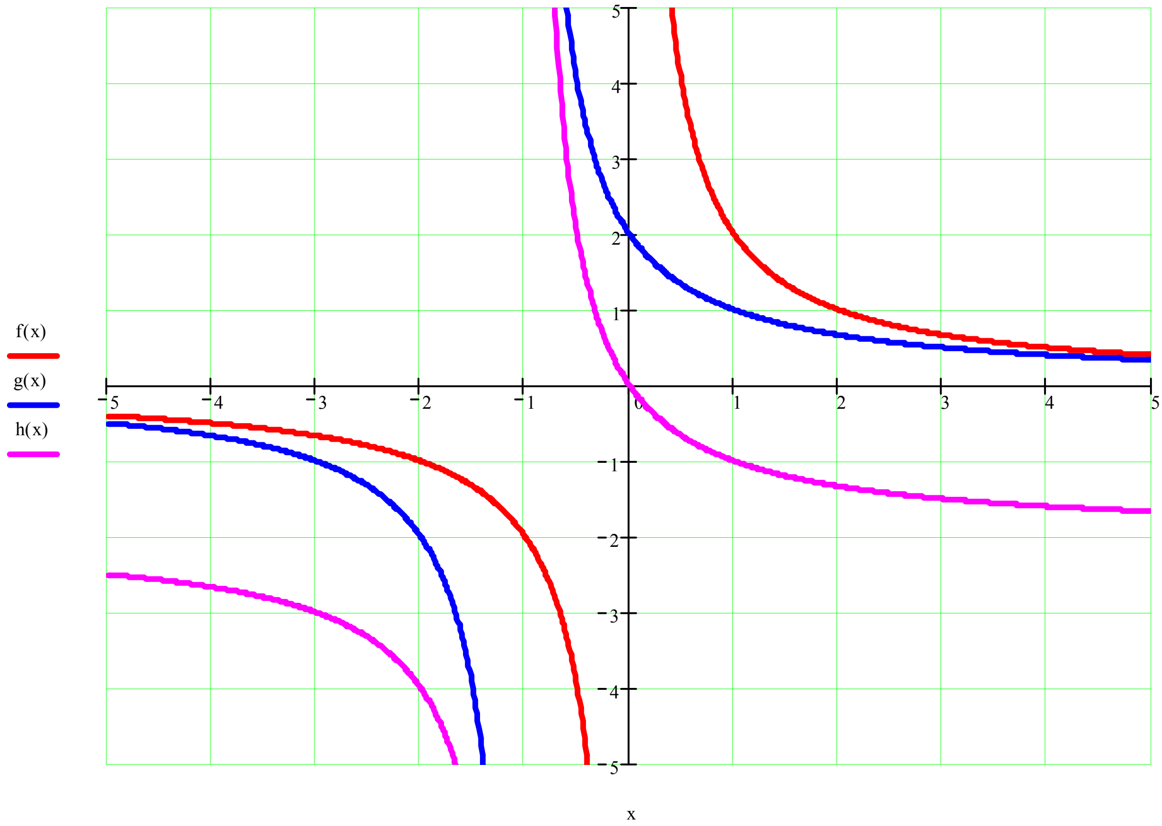
$h: y = \frac{2}{x+1} - 2$

Řešení: a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$



$D(f) = R\backslash\{0\}$, $H(f) = R\backslash\{0\}$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$ $\quad g(x) = \frac{2}{x+1}$ $\quad h(x) = \frac{2}{x+1} - 2$



$D(f) = \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$, $\quad H(f) = \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$

Průsečíky s osami: funkce $g(x)$ protíná osu y v bodě [0,2], funkce $h(x)$ protíná osy v bodě [0,0].

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte graf funkce $y = \frac{3{,}4}{x}$ a popište vlastnosti této funkce.

2) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = \frac{1{,}2}{x}$ $\quad$ b) $y = -\frac{1{,}2}{x}$

3) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = \frac{0,7}{x}$ b) $y = -\frac{0,7}{x}$

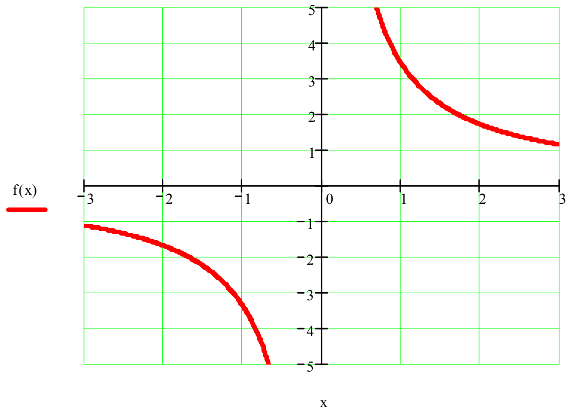
4) Je dána funkce $m: y = -\frac{2}{x}, x \in \langle 0,5; 4\rangle$. Rozhodněte, zda existuje $x \in D_m$, pro které platí:

a) $m(x) = 0$ b) $m(x) \geq 0$ c) $m(x) = -7$

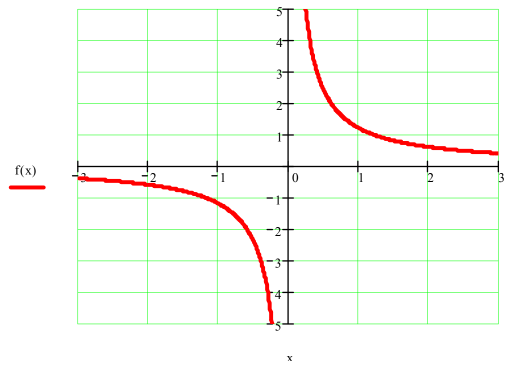
d) $m(x) = -0,6$

Výsledek řešení:

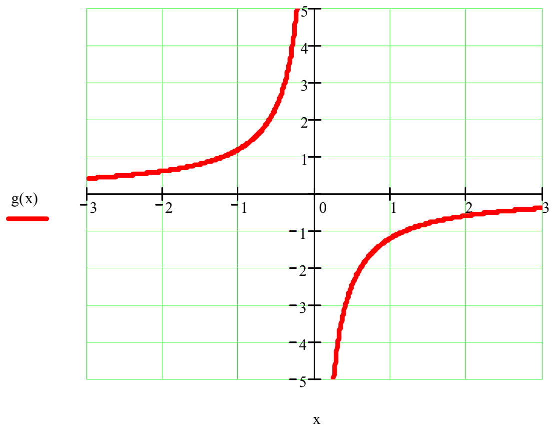
1.) Je klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$; je lichá ; není shora omezená ani zdola omezená; nemá maximum ani minimum v žádném bodě.



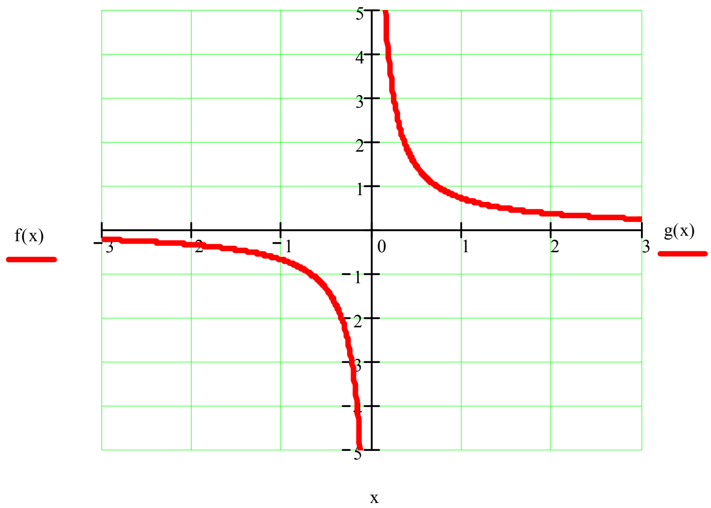
2.) a)

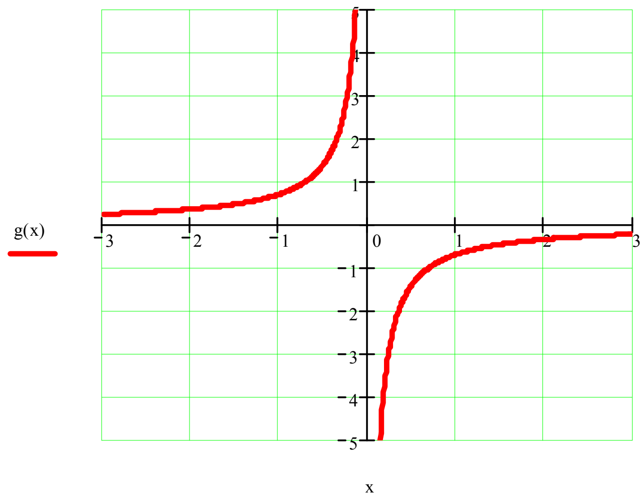


b)



3.) a) b)





4.) a) NE; pro žádné $x \in \langle 0{,}5; 4\rangle$ není $-\frac{2}{x} = 0$ b) ne c) ne, řešíme rovnici $-7 = -\frac{2}{x}$ s neznámou $x \in \langle 0{,}5; 4\rangle$ d) ano, $x = \frac{10}{3}$

Lineární lomené funkce

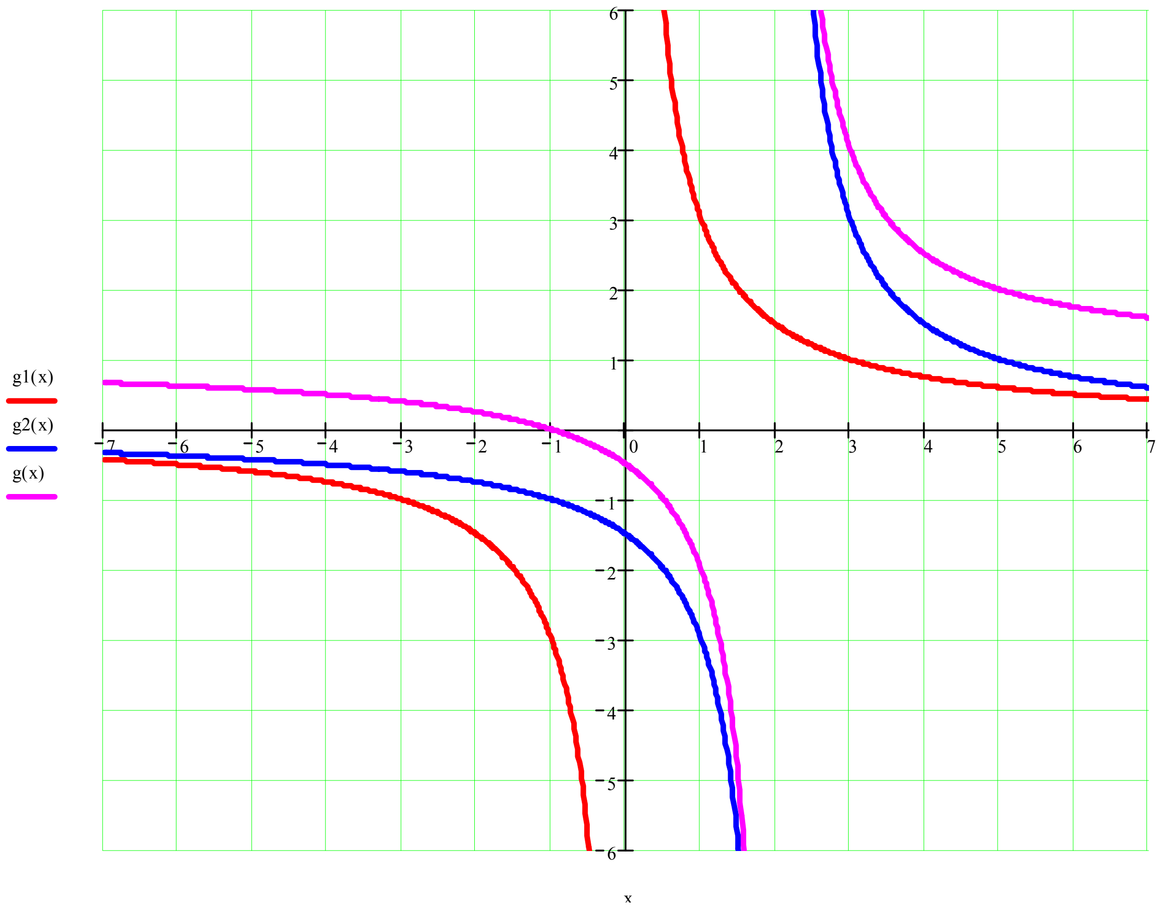
Varianta B

Příklad: Sestrojte graf funkce $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ definované na množině R\{2}

Řešení: Nejdříve upravíme výraz $\frac{x+1}{x-2}$ tak, abychom mohli užít poznatky o grafu nepřímé úměrnosti. Vydělíme dvojčlen $x+1$ dvojčlenem $x-2$; $(x+1):(x-2) = 1$

$-x+2$, zbytek 3

Je tedy $\frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$, a funkci g můžeme proto vyjádřit ve tvaru $g: y = 1 + \frac{3}{x-2}$. Nyní postupně sestrojíme graf funkce $g_1: y = \frac{3}{x}$ definované na R\{0} a graf funkce $g_2: y = \frac{3}{x-2}$ definované na R\{2}. Graf funkce g_2 získáme z grafu funkce g_1 pomocí posunutí o dvě jednotky ve směru kladné poloosy x. Graf funkce g dostaneme z grafu funkce g_2 posunutím o jednu jednotku ve směru kladné poloosy y.



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte graf této funkce: $y = \frac{2x+5}{3}$.

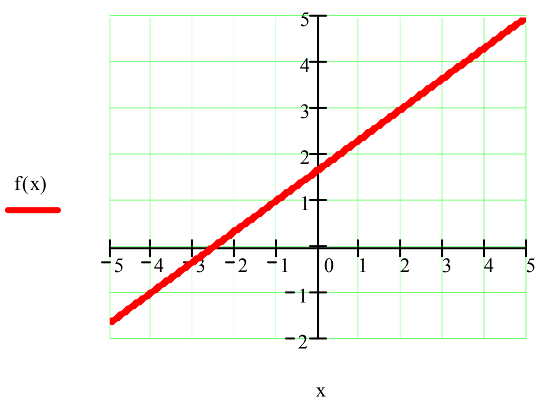
2) Načrtněte graf této funkce: $y = \frac{2x-4}{-x+2}$.

3) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

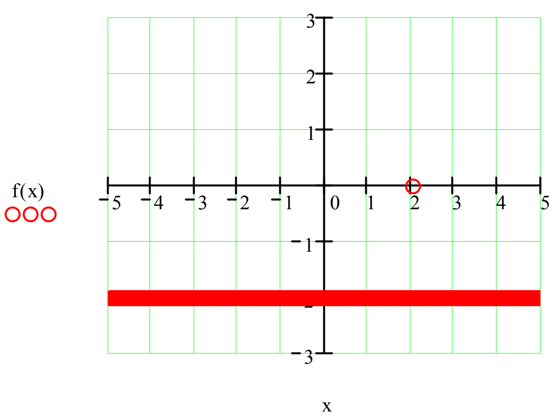
$$y = \frac{1}{2x}, \qquad y = \frac{1}{2x} + 2, \qquad y = \frac{1}{2x-1}, \qquad y = \frac{1}{2x-1} + 2$$

4) Načrtněte graf této funkce: $y = \frac{-x+2}{2x-1}$.

1.)

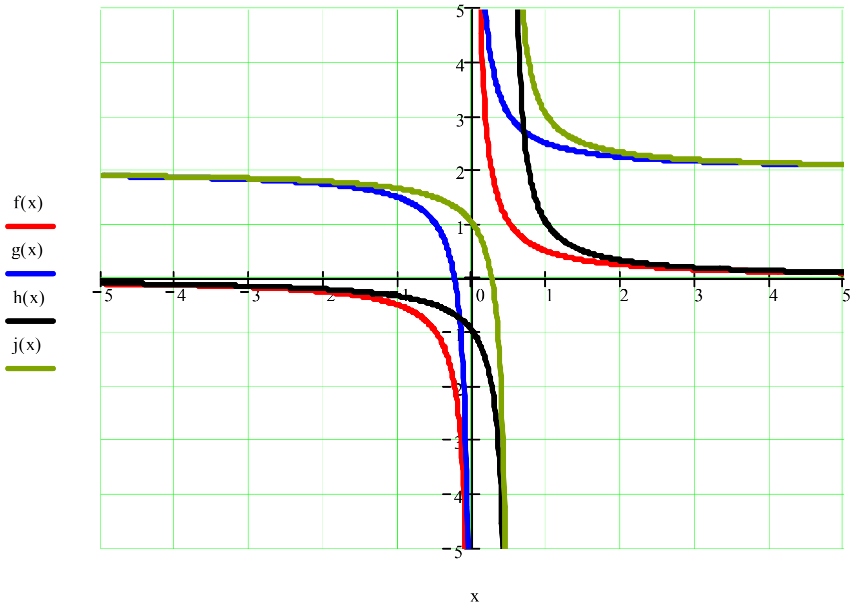


2.)

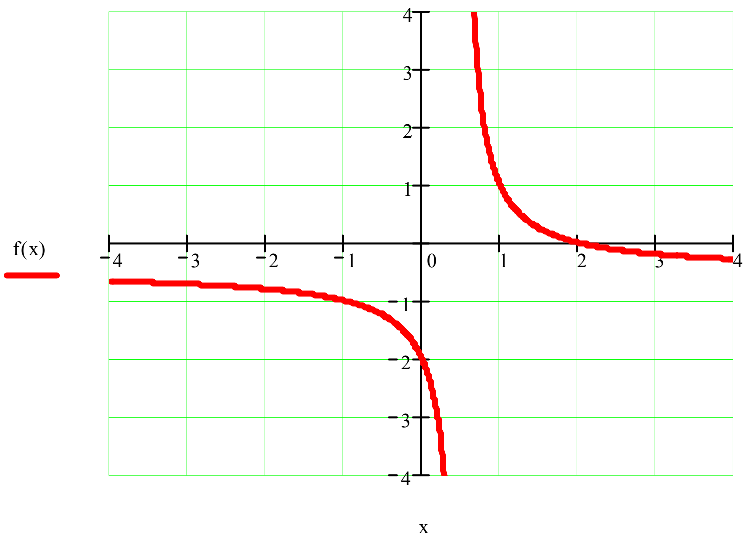


3.)

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{1}{2x} + 2, \qquad h(x) = \frac{1}{2x-1}, \qquad j(x) = \frac{1}{2x-1} + 2$$



4.)



Lineární lomené funkce

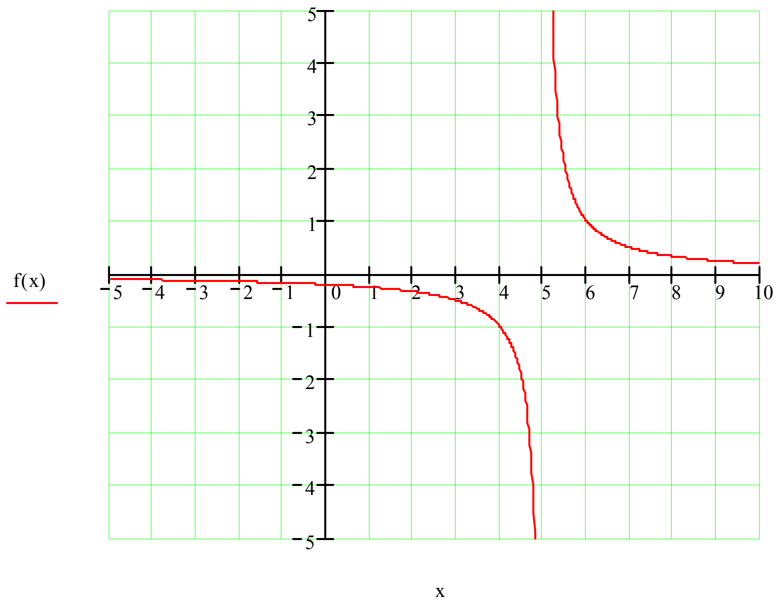
Varianta C

Příklad: Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = \frac{1}{x-5}, \qquad y = \frac{1}{|x|-5}, \qquad y = \left|\frac{1}{|x|-5}\right|$$

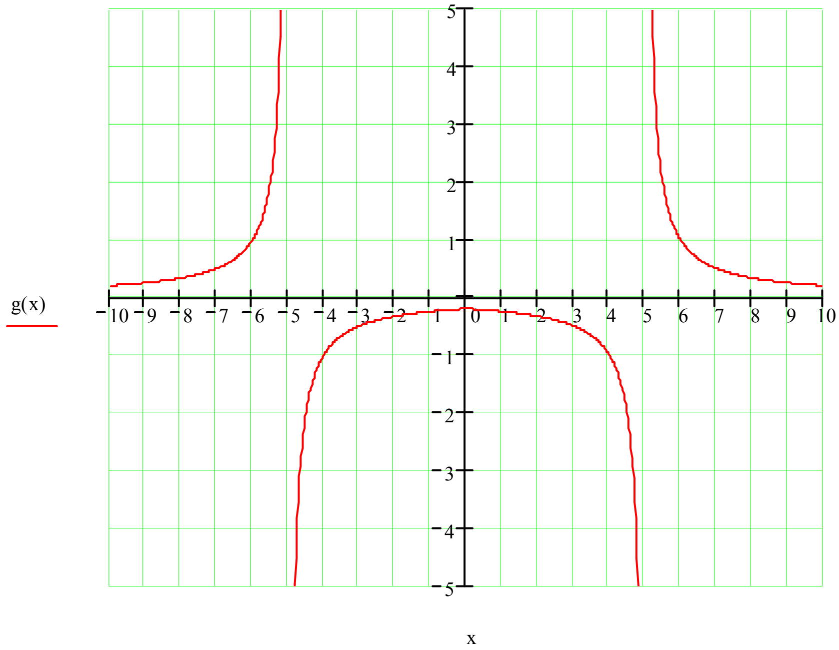
Řešení: a)

$$f(x) := \frac{1}{x-5}$$



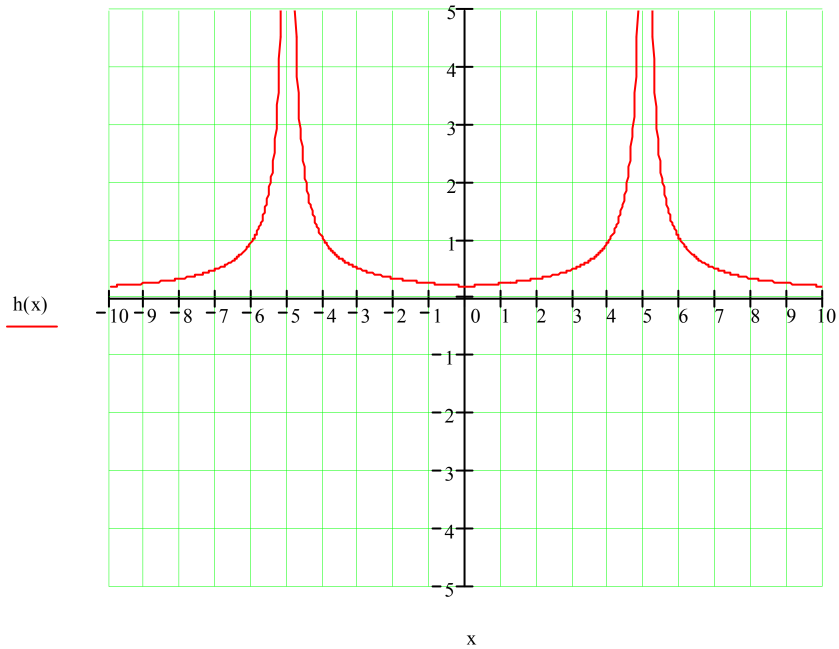
b)

$$g(x) := \frac{1}{|x| - 5}$$



c)

$$h(x) := \left|\frac{1}{|x| - 5}\right|$$



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte graf této funkce: $y = \left|\frac{1}{x}\right|$.

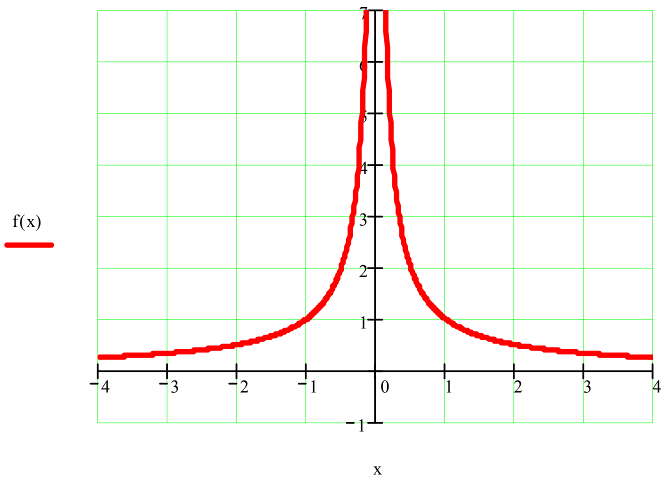
2) Načrtněte graf této funkce: $y = \left|\frac{1}{2x-1}\right|$.

3) Načrtněte graf funkce $y = \left|\frac{1}{x-1} + 1\right|$.

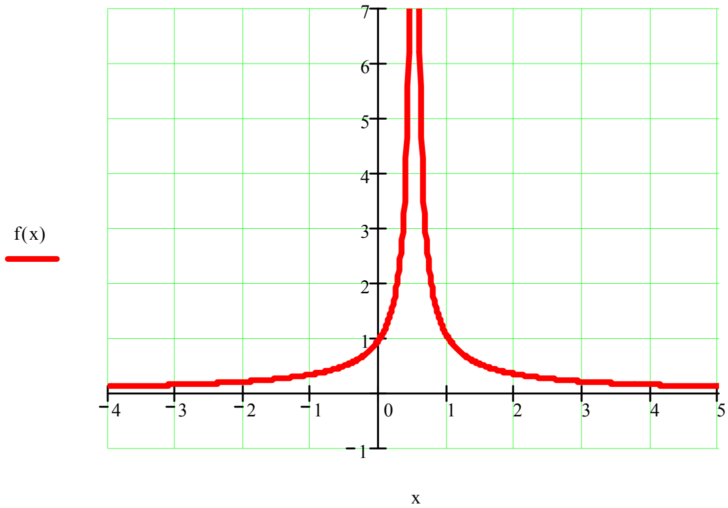
4) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí:

$$y = -\frac{1}{x+1}, \qquad y = -\frac{1}{|x|+1}, \qquad y = \left|-\frac{1}{|x|+1}\right|$$

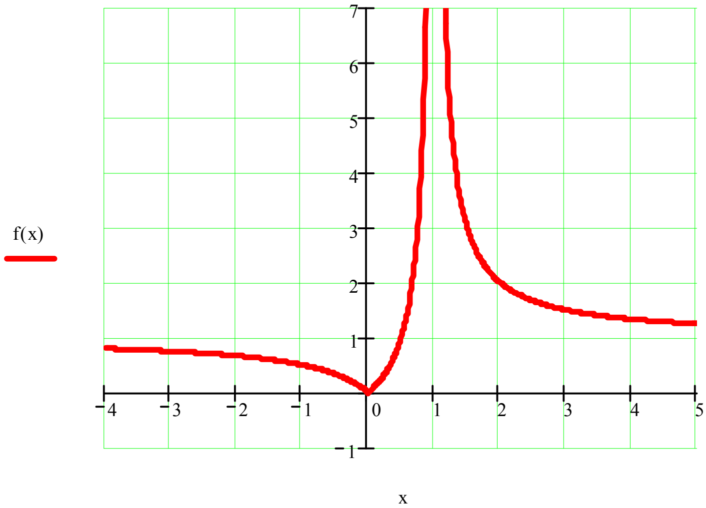
1.)



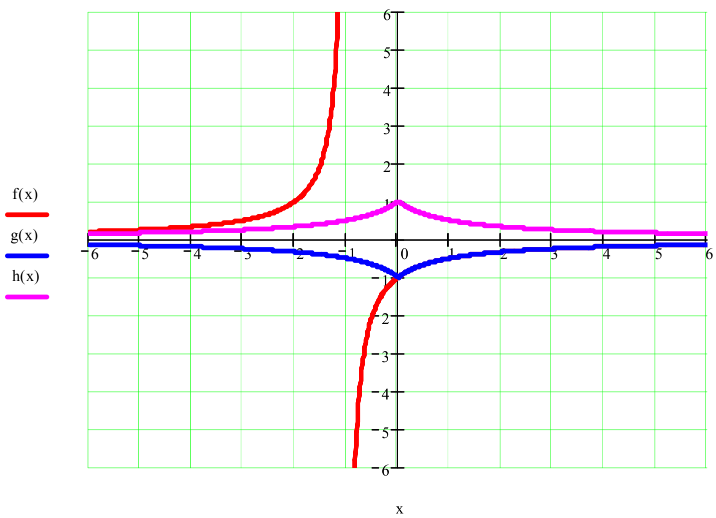
2.)



3.)



4.) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$, $g(x) = -\frac{1}{|x|+1}$, $h(x) = \left|-\frac{1}{|x|+1}\right|$

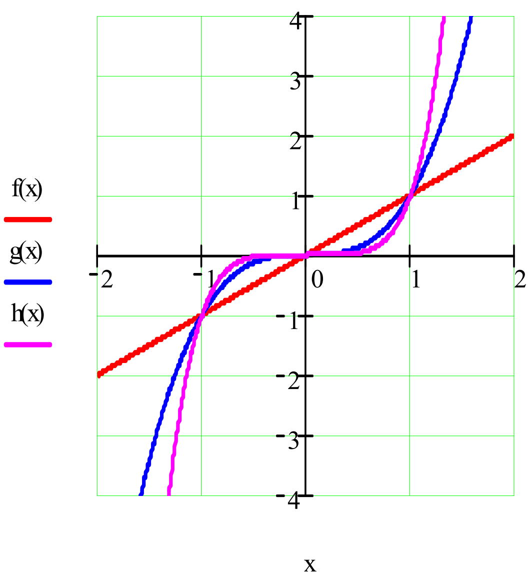
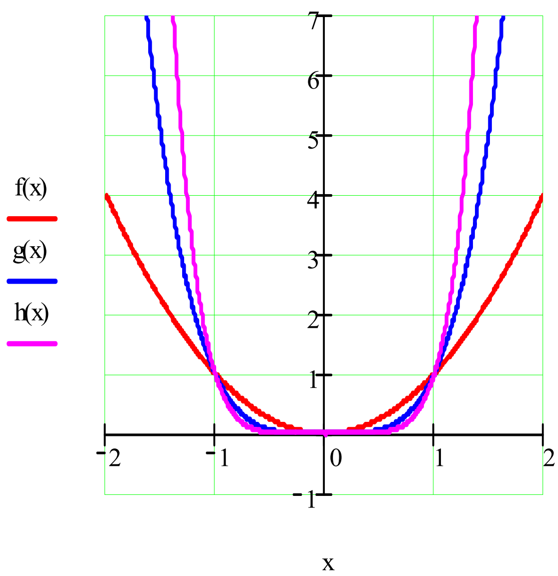


Mocninné funkce

Mocninné funkce s přirozeným exponentem

Mocninná funkce s přirozeným exponentem je funkce $f: y = x^n, n \in \boldsymbol{N}, D(f) = \boldsymbol{R}$.
Speciálně je-li $n = 1$, je to lineární funkce $f: y = x$, pro $n = 2$ základní kvadratická funkce $f: y = x^2$, pro $n = 3$ základní kubická funkce $f: y = x^3$ atd.
Grafem této mocninné funkce je pro $n = 1$ **přímka** (osa prvního a třetího kvadrantu) a pro $n > 1$ **parabola n- tého stupně**.

Vlastnosti mocninných funkcí $f: y = x^n, n \in \boldsymbol{N}$

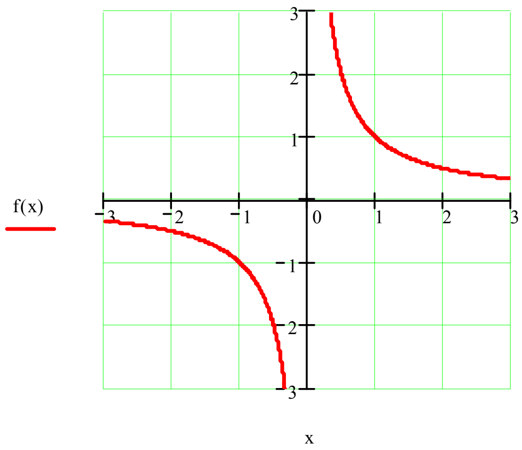
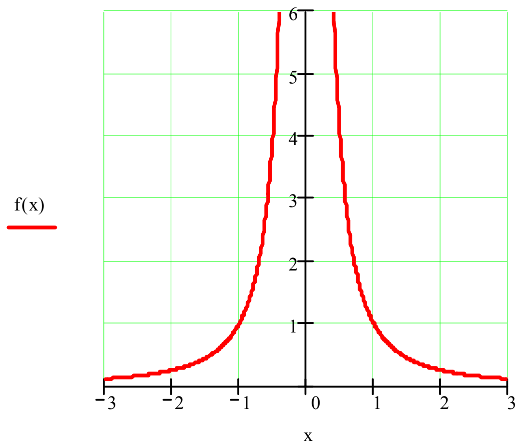
n liché	n sudé
$f(x) = x^1, g(x) = x^3, h(x) = x^5$	$f(x) = x^2, g(x) = x^4, h(x) = x^6$
	
$D(f) = \boldsymbol{R}, \quad H(f) = \boldsymbol{R}$	$D(f) = \boldsymbol{R}, \quad H(f) = \langle 0, +\infty)$
Je lichá. Není ani shora omezená, ani zdola omezená. Je rostoucí. Nemá ani minimum, ani maximum.	Je sudá. Je zdola omezená, není shora omezená. Je rostoucí v $\langle 0, +\infty)$, je klesající v $(-\infty, 0\rangle$. Má ostré minimum v bodě 0, nemá maximum.

Mocninné funkce s celým záporným exponentem

Mocninná funkce se záporným celým exponentem je funkce $f: y = x^{-n}, n \in \boldsymbol{N}$, $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

Grafem této mocninné funkce je **hyperbola stupně $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})$**.

Pozn.: Lze definovat též mocninnou funkci s nulovým exponentem:
$f: v = x^0, D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$! Jedná se však o konstantní funkci.

<table>
<tr><td colspan="2">Vlastnosti funkce $y = x^n, n \in \boldsymbol{Z}^-$</td></tr>
<tr><td>$-n$ liché</td><td>$-n$ sudé</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Oborem hodnot je $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$.

Je klesající v $(-\infty, 0)$, v $(0, +\infty)$.

Není ani zdola omezená, ani shora omezená.

Nemá v žádném bodě ani minimum, ani maximum.

Je lichá.</td><td>Oborem hodnot je $\boldsymbol{R}^+$.

Je rostoucí v $(-\infty, 0)$,

Je klesající v $(0, +\infty)$.

Je zdola omezená, není shora omezená.

Nemá v žádném bodě ani minimum, ani maximum.

Je sudá.</td></tr>
</table>

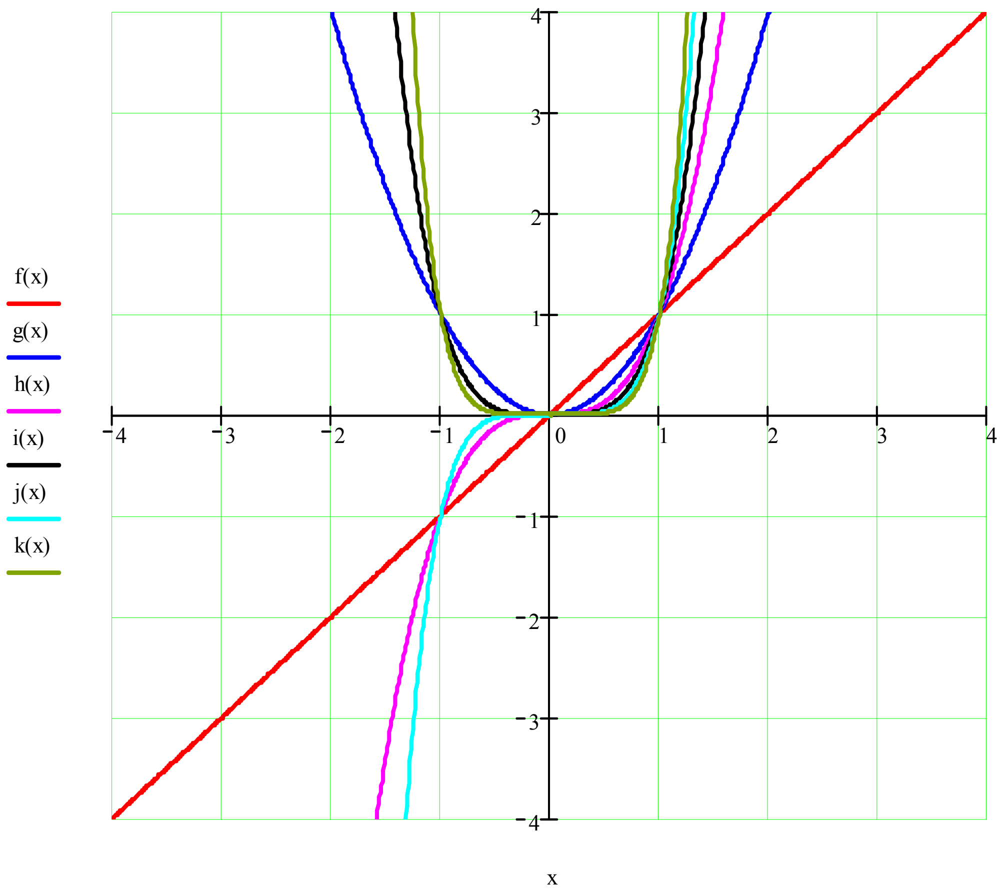
Mocninné funkce

Varianta A

Příklad: Sestrojte grafy mocninných funkcí pro $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Řešení:

	-1,1	-1	-0,5	0	0,5	1	1,1
$f(x) = x^1$	-1,1	-1	-0,5	0	0,5	1	1,1
$g(x) = x^2$	1,21	1	0,25	0	0,25	1	1,21
$h(x) = x^3$	-1,331	-1	-0,125	0	0,125	1	1,331
$i(x) = x^4$	1,4641	1	0,0625	0	0,0625	1	1,4641
$j(x) = x^5$	-1,61051	-1	-0,03125	0	0,03125	1	1,61051
$k(x) = x^6$	1,771561	1	0,015625	0	0,015625	1	1,771561



Čím je n větší, tím:

a) V intervalu $(0,1)$ je funkce „pozvolnější“

b) V intervalu $(1,+\infty)$ je funkce „strmější“

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Porovnejte podle velikosti následující čísla(využijte přitom grafy funkcí $y = x^n$, kde $n \in \boldsymbol{N}$):

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^5, \left(\frac{1}{4}\right)^5$ b) $0{,}7^4,\ (-0{,}7)^4$ c) $0{,}7^3,\ (-0{,}7)^3$ d) $(-1)^6,\ (-1)^6$

2) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = x^3 - 1$ b) $y = x^4 + 1$

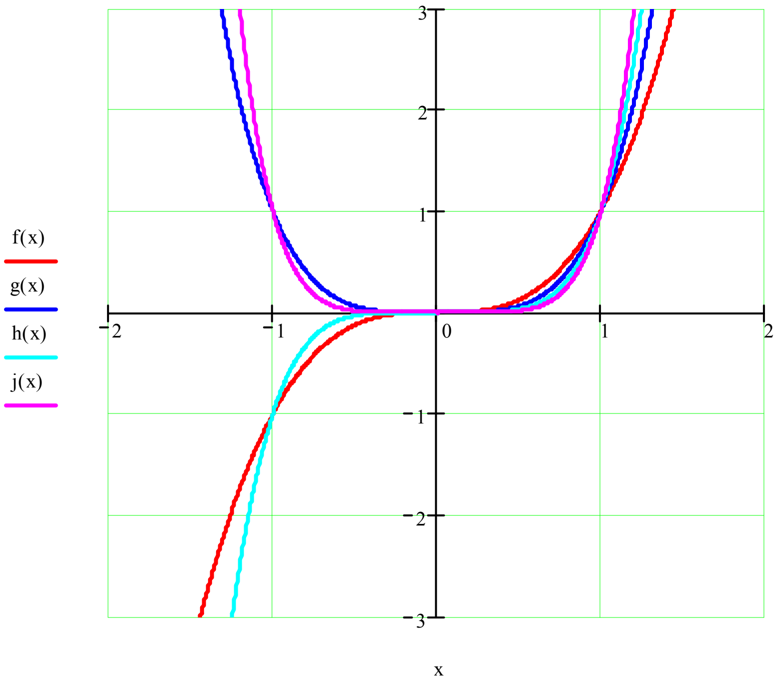
3) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = (x-1)^5$ b) $y = (x+2)^4$

4) Řešte tyto rovnice a nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $(-x)^3 \leq x^3$ b) $(-x)^5 = (-x)^6$

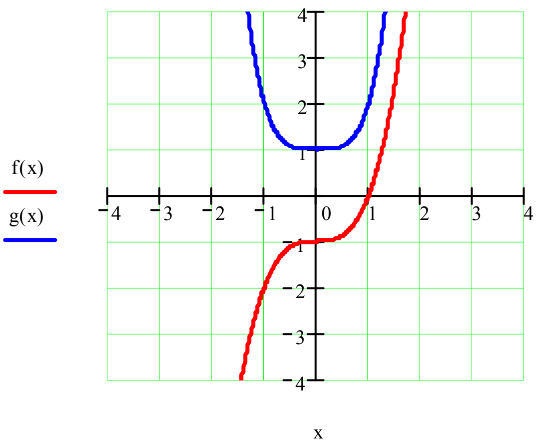
1.)



$\left(\frac{1}{3}\right)^5 > \left(\frac{1}{4}\right)^5$, $0{,}7^4 = (-0{,}7)^4$, $0{,}7^3 > (-0{,}7)^3$, $(-1)^5 < (-1)^6$

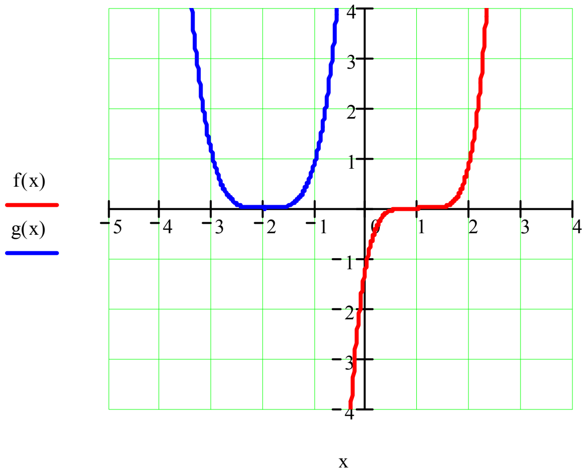
2.)

$f(x) = x^3 - 1, \qquad g(x) = x^4 + 1$



3.)

$f(x) = (x-1)^5, \qquad g(x) = (x+2)^4$



4.)

a) $x \in \langle 0, +\infty)$, b) $x_1 = -1, x_2 = 0$

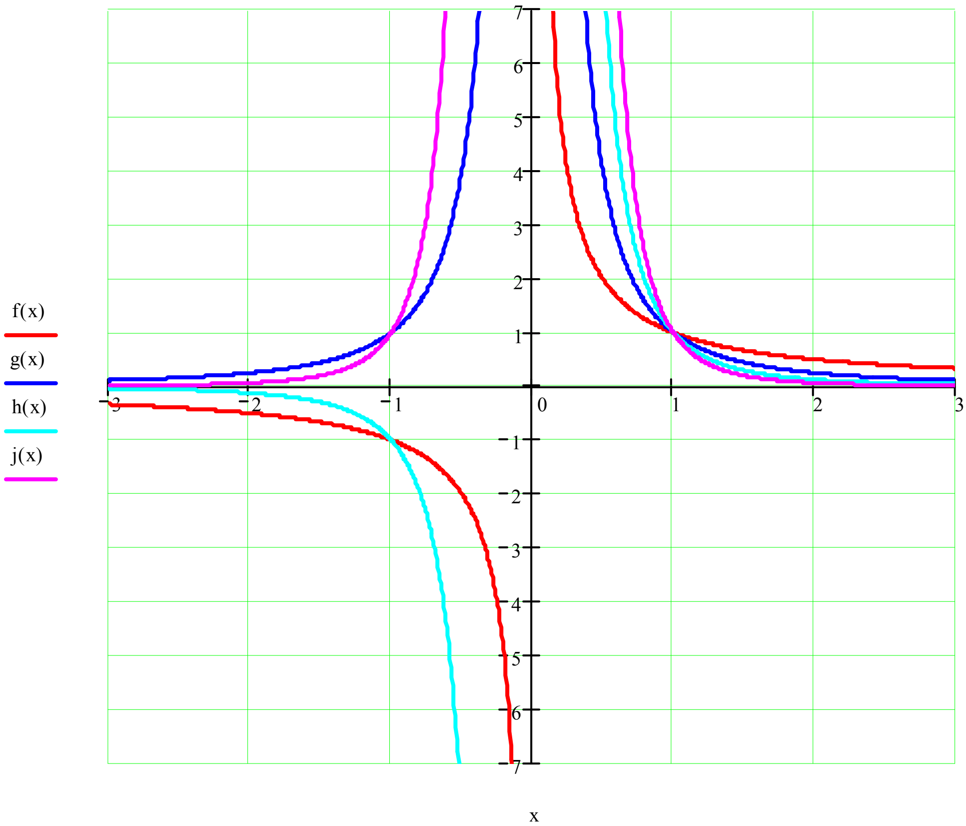
Mocninné funkce

Varianta B

Příklad: Načrtněte grafy funkcí $f(x) = x^{-1}, g(x) = x^{-2}, h(x) = x^{-3}, j(x) = x^{-4}$

Řešení:

x	-4	-2	-1	-1/2	-1/4	1/4	1/2	1	2	4
x^{-1}	-1/4	-1/2	-1	-2	-4	4	2	1	14/2	1/4
x^{-2}	1/16	¼	1	4	16	16	4	1	¼	1/16
x^{-3}	-1/64	-1/8	-1	-8	-64	64	8	1	1/8	1/64
x^{-4}	1/256	1/16	1	16	256	256	16	1	1/16	1/256



***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady k procvičení:

1) Porovnejte podle velikosti tato čísla (využijte při tom grafy funkcí $y = x^n$ pro $n \in \boldsymbol{Z}^-$):

a) $(-0{,}5)^{-2}, \ (0{,}5)^{-2}$ b) $(4{,}8)^{-4}, \ (4{,}9)^{-4}$

2) Porovnejte podle velikosti tato čísla(využijte při tom grafy funkcí $y = x^n$ pro $n \in \boldsymbol{Z}^-$):

a) $(-2{,}3)^{-3}, \ (2{,}3)^{-3}$ b) $(-4{,}8)^{-4}, \ (-4{,}9)^{-4}$

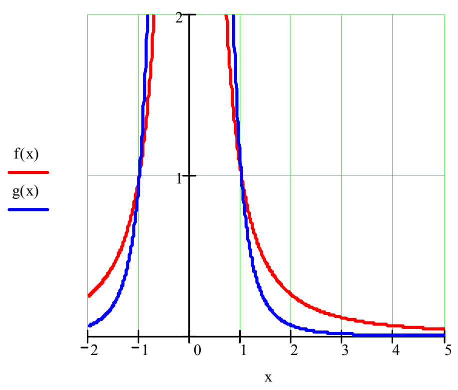
3) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y = 2x^{-2}$ b) $y = (x+2)^{-2}$

4) Načrtněte grafy těchto funkcí:

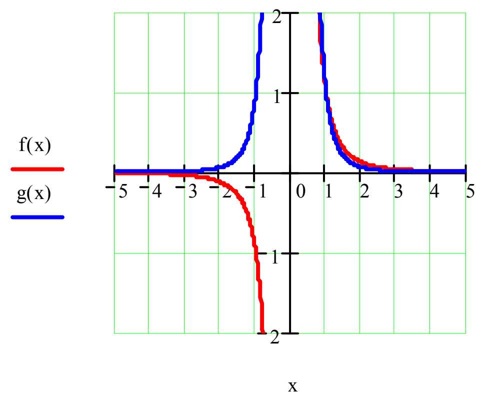
a) $y = x^{-3} - 1$ b) $y = \frac{1}{(x-1)^3}$

1.)



$(-0{,}5)^{-2} = (0{,}5)^{-2}, (4{,}8)^{-4} > (4{,}9)^{-4}$

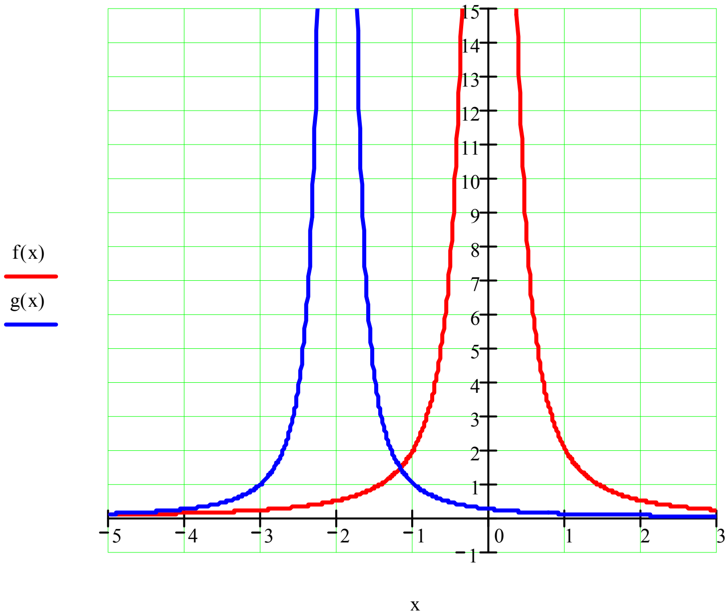
2.)



$(-2{,}3)^{-3} < (2{,}3)^{-3}, (-4{,}8)^{-4} > (-4{,}9)^{-4}$

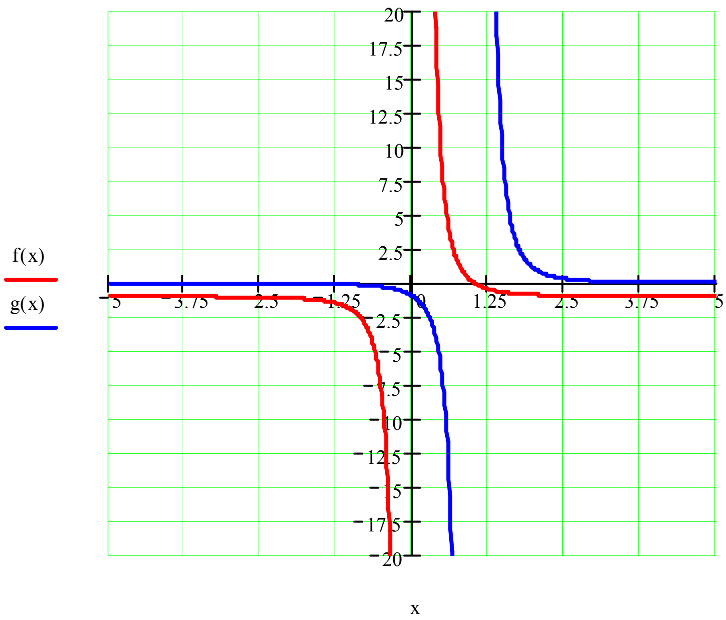
3.)

$$f(x) = 2x^{-2}, \qquad g(x) = (x+2)^{-2}$$



4.)

$$f(x) = x^{-3} - 1, \qquad g(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$$



Mocninné funkce

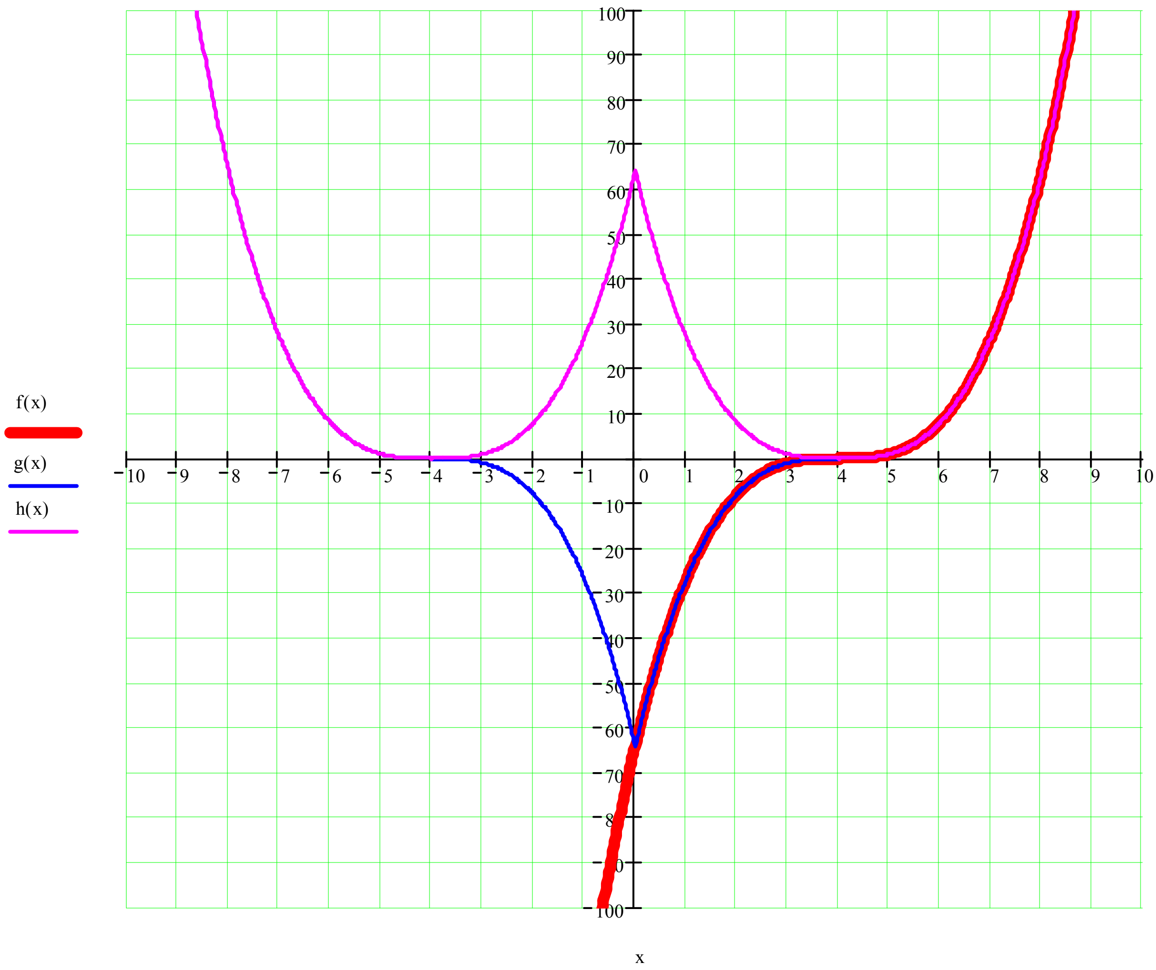
Varianta C

Příklad: Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = (x-4)^3, \qquad y = (|x|-4)^3, \qquad y = |(|x|-4)^3|$$

Řešení:

$$f(x) = (x-4)^3, \qquad g(x) = (|x|-4)^3, \qquad h(x) = |(|x|-4)^3|$$



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte do jednoho obrázku grafy funkcí:

$$f(x) = 2x^3, \qquad g(x) = 2(x+2)^3, \qquad h(x) = 2(x+2)^3 - 1$$

2) Načrtněte grafy těchto funkcí:

$$f(x) = x^{-2}, \qquad g(x) = (x-2)^{-2}, \qquad h(x) = (x-2)^{-2} + 1$$

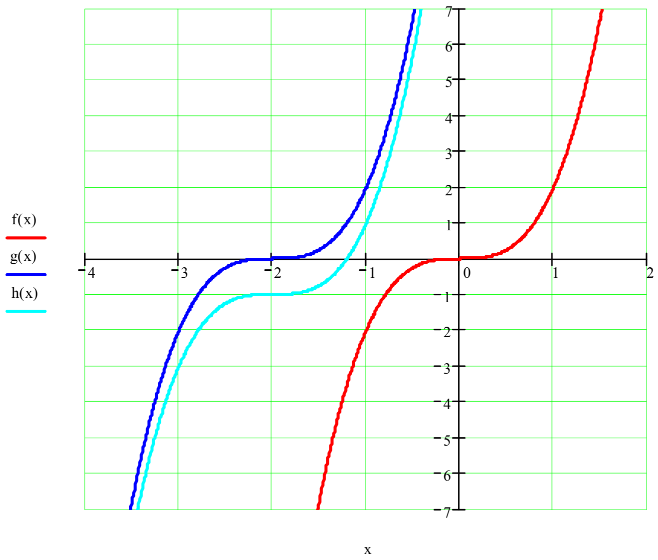
3) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = |x|^3 - 4, \qquad y = ||x|^3 - 4|$$

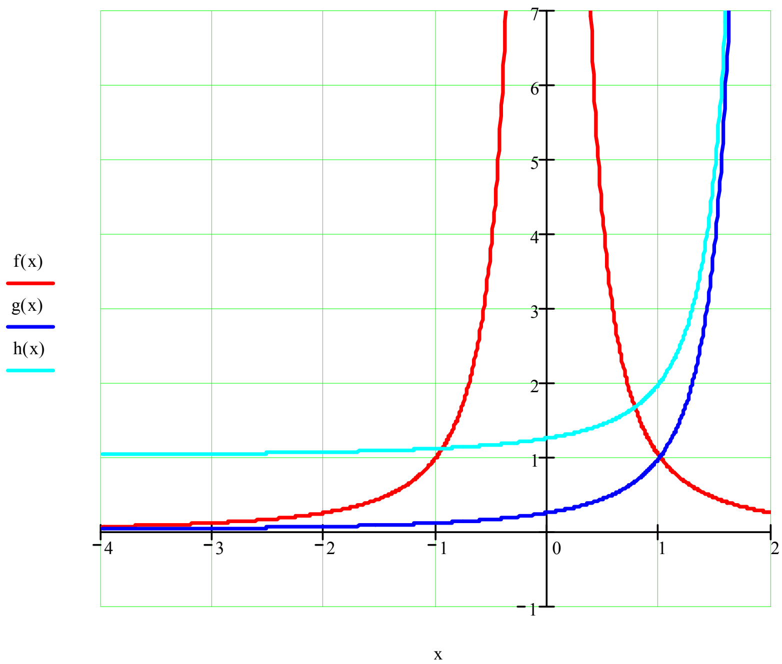
4) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí:

$$y = |x|^{-2}, \qquad y = |x+1|^{-2}$$

1.)

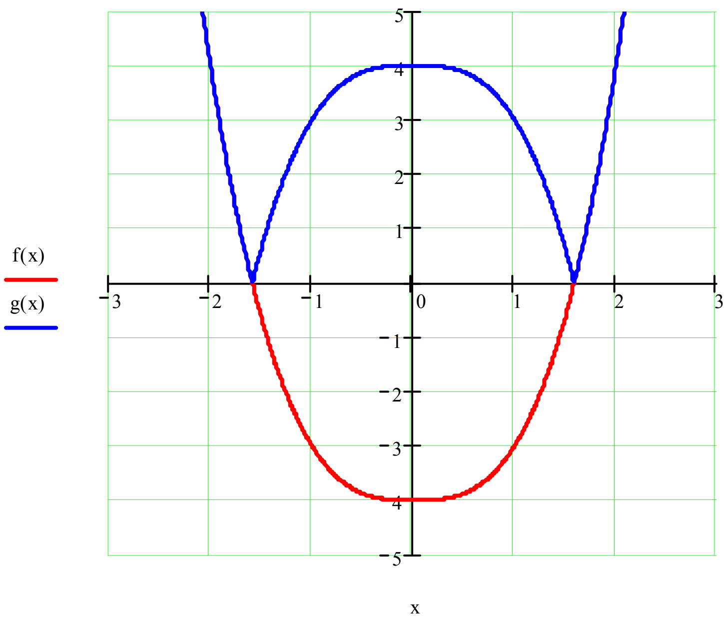


2.)



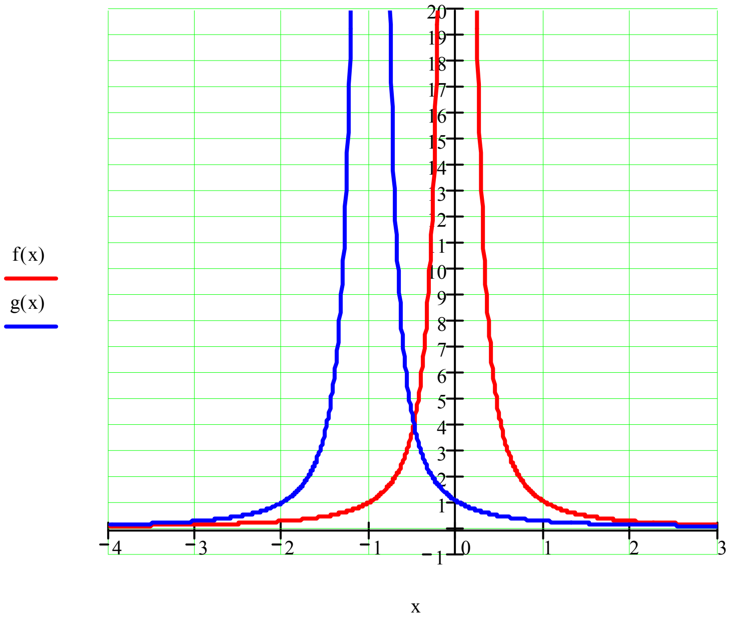
3.)

$$f(x) = |x|^3 - 4, \qquad g(x) = ||x|^3 - 4|$$



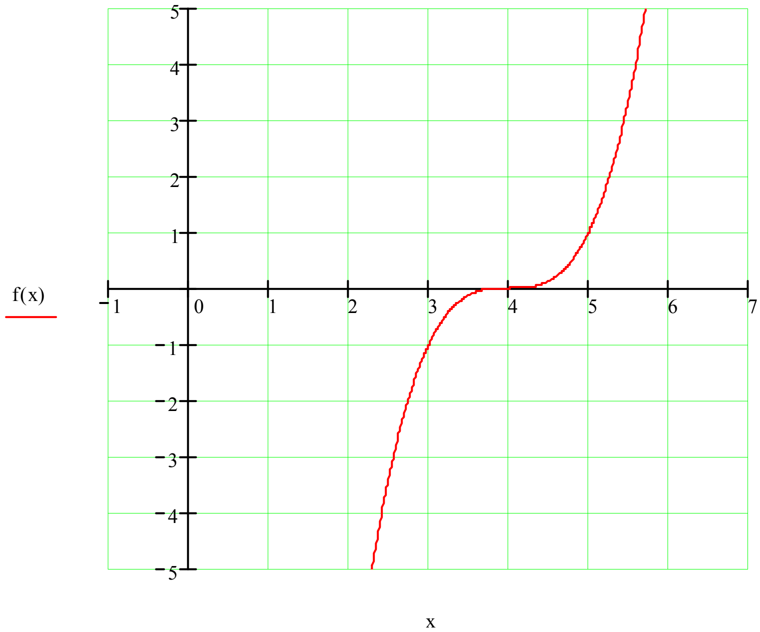
4.)

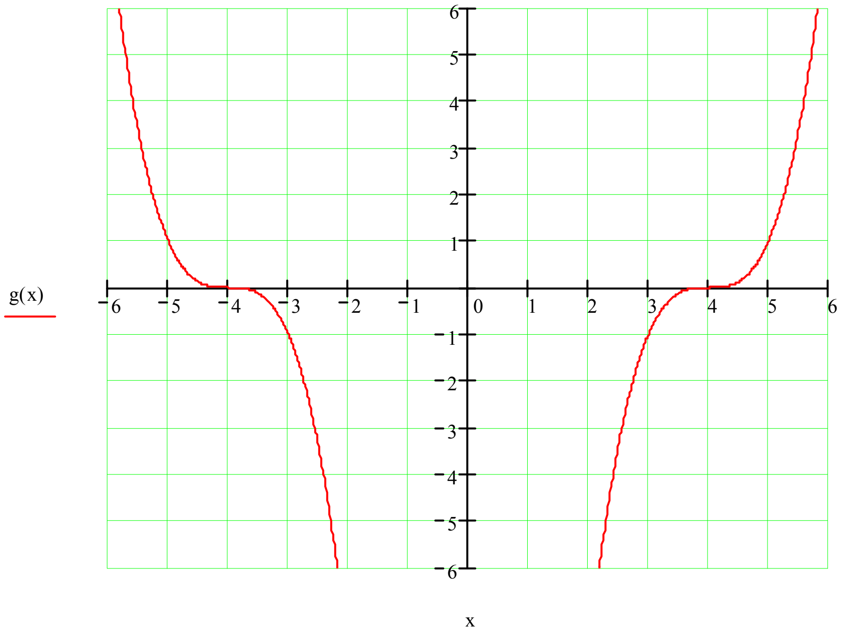
$$f(x) = |x|^{-2}, \qquad g(x) = |x+1|^{-2}$$



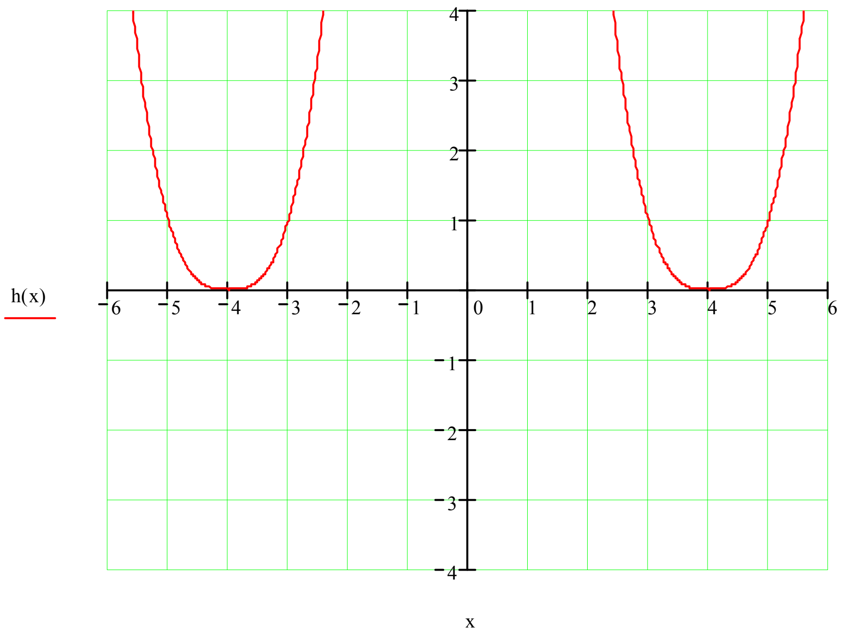
Rozkreslení řešeného příkladu varianty C

$$f(x) := (x-4)^3$$





$$h(x) := \left|(|x| - 4)^3\right|$$



Mocniny a odmocniny

N-tá mocnina

Pro všechna $a \in R$ a pro všechna $n \in N$ definujeme $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-krát}$

a… **základ odmocniny** (mocněnec)

n… **exponent** (mocnitel).

Pro všechna reálná čísla a, b a pro všechna přirozená čísla r, s je

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ b) $(a^r)^s = a^{rs}$ c) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

d) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

Pro $\forall a \in R \backslash \{0\}$ definujeme $a^0 = 1$.

Pro $\forall n \in Z^-$ definujeme $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Pro všechna reálná čísla a, b různá od nuly a pro všechna celá čísla r, s platí:

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ b) $(a^r)^s = a^{rs}$ c) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

d) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $r > s$

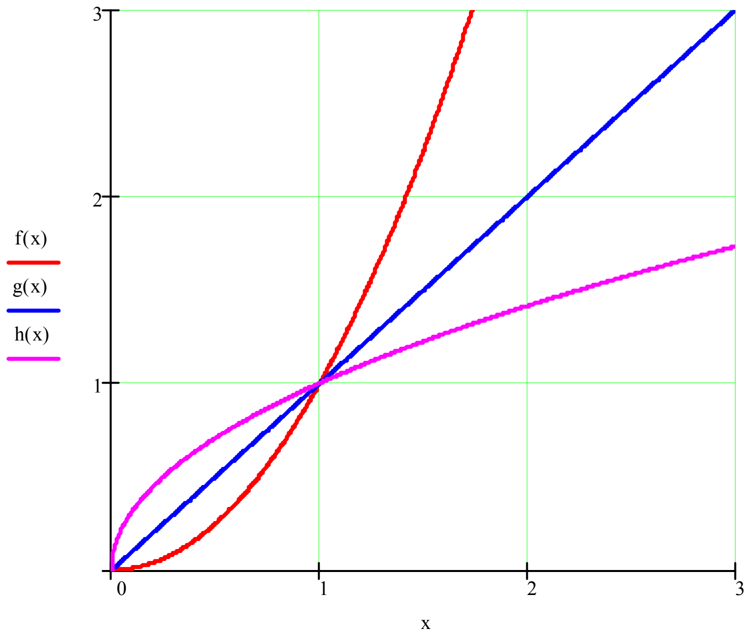
N-tá odmocnina

Pro každé $n \in N$ je n **−tá odmocnina z nezáporného čísla** a takové nezáporné číslo b, pro něž platí $b^n = a$. Budeme zapisovat $b = \sqrt[n]{a}$. Číslo n se nazývá **odmocnitel** (exponent odmocniny), číslo a **odmocněnec** (základ odmocniny).

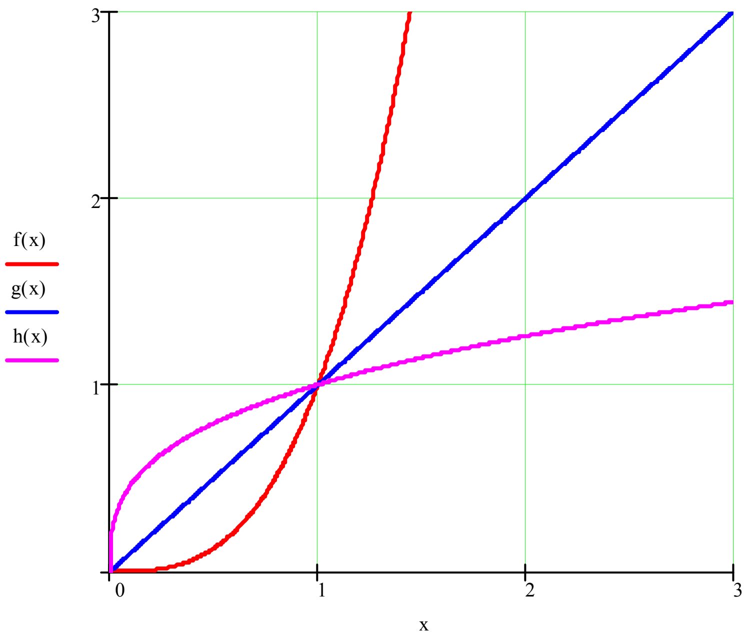
Funkce $y = \sqrt{x}$ je inverzní k funkci $y = x^2, x \in \langle 0, +\infty)$.

Funkce $y = \sqrt[3]{x}$ je inverzní k funkci $y = x^3, x \in \langle 0, +\infty)$.

$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = x^3, \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x}$



Pro všechna přirozená čísla n, r a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1, \dots, a_r$ je

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_r} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_r}$$

Např. $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt[5]{24}$.

Pro každé nezáporné reálné číslo a, každé kladné reálné číslo b a každé přirozené číslo n platí:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

„Podíl n –tých odmocnin čísel a, b je roven n –té odmocnině jejich podílu.“

Např. $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{16}{4}} = \sqrt[3]{4}$, $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Pro každé celé číslo s, každé kladné reálné číslo a a každé přirozené číslo n platí:

$$(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$$

Např. $(\sqrt[12]{5})^{-3} = \sqrt[12]{5^{-3}} = \sqrt[12]{\frac{1}{125}}$.

Je-li s přirozené číslo, pak tato věta platí i pro $a = 0$, tj. pro všechna nezáporná čísla a.

Je-li speciálně $s \in N$, $s = n$, pak pro každé nezáporné číslo a dostáváme $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Např. $(\sqrt[4]{8{,}1})^4 = \sqrt[4]{8{,}1^4} = 8{,}1$.

Pro všechna přirozená čísla m, n a pro každé nezáporné reálné číslo a platí:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Např. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[6]{8}$.

Pro všechna přirozená čísla m, n, p a pro každé nezáporné reálné číslo a platí:

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Např. $\sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3\cdot 3]{2^{2\cdot 3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Mocniny s racionálním exponentem

Pro každé kladné reálné číslo a, pro každé celé číslo m a pro každé přirozené číslo n je $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Číslo a budeme nazývat **základ mocniny** čili mocněnec, číslo $\frac{m}{n}$ se nazývá **exponent** čili mocnitel.

Pro všechna kladná reálná čísla a, b a pro všechna racionální čísla r, s je

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ b) $(a^r)^s = a^{rs}$ c) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

d) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Mocniny s iracionálním exponentem

V matematice lze také zavádět čísla typu $2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}} \ldots$, obecně a^p, kde $p \in \boldsymbol{I}$ a zároveň $a \in \boldsymbol{R}^+$.

Pro všechna kladná reálná čísla a, b a pro všechna reálná čísla r, s platí:

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ b) $(a^r)^s = a^{rs}$ c) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

d) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

Mocniny a odmocniny

Varianta A

Příklad: Vyjádřete ve tvaru jediné odmocniny

a) $\sqrt{\frac{c}{d} \cdot \sqrt[3]{\frac{d}{c}}}$

b) $4 \cdot \sqrt[5]{0{,}5}$

c) $\frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt{10}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$

e) $2\sqrt[3]{2}$

Řešení:

a) $\sqrt{\frac{c}{d} \cdot \sqrt[3]{\frac{d}{c}}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{c}{d}}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{d}{c}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{c}{d}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{d}{c}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{c}{d}\right)^3 \cdot \frac{d}{c}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{c}{d}\right)^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)^2}}$
$= \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$

b) $4 \cdot \sqrt[5]{0{,}5} = \sqrt[5]{4^5 \cdot 0{,}5} = \sqrt[5]{4^4 \cdot \frac{2^2}{2}} = \sqrt[5]{4^4 \cdot 2} = \sqrt[5]{64 \cdot 8} = \sqrt[5]{512} = \sqrt[5]{2^9}$

c) $\frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10}$

d) $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[12]{(2^3)^3}}{\sqrt[12]{(2^2)^4}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}} = \sqrt[12]{2}$

e) $2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ c) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$ e) $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

2) Určete, pro která $x \in \boldsymbol{R}$ jsou definovány dané odmocniny, a pak je upravte:

a) $\sqrt[4]{x^5}$ b) $\sqrt[4]{x^9}$ c) $\sqrt[11]{x^{45}}$ d) $\sqrt[3]{x^8}\cdot\sqrt[5]{x^3}$

3) Rozhodněte, pro která $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ mají následující výrazy smysl, a potom je zjednodušte:

a) $4b^2 - 4a^2 + 3a^2 - 2(-b)^2$ b) $(4c^3\cdot 2c\cdot c^4)^2$

c) $(-2a)^3\cdot(-a)^4\cdot 3(-a)^6\cdot(-c)^2$

4) Vyjádřete dané výrazy v co nejjednodušším tvaru pomocí mocnin s přirozeným mocnitelem:

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{3}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$ b) $(a-b)^{-2}:\left(\frac{1}{a-b}\right)^{-2}$

c) $\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(ab-\frac{1}{ab}\right)^{2}$

1.) a) 6, b) 8, c) 3, d) 4, e) 5, f) 1,5

2.) Ve všech případech $x \geq 0$; a) $x\cdot\sqrt[4]{x}$, b) $x^2\cdot\sqrt[4]{x}$, c) $x^4\cdot\sqrt[11]{x}$, d) $x^3\cdot\sqrt[15]{x^4}$

3.) a) $a, b \in \boldsymbol{R}, 2b^2 - a^2$, b) $c \in \boldsymbol{R}, 64c^{16}$, c) $a, c \in \boldsymbol{R}, -24a^{13}c^2$

4.) a) $\frac{y^6}{x^6}$, b) $\frac{1}{(a-b)^4}$, c) $\frac{a}{ab-1}$

Mocniny a odmocniny

Varianta B

Příklad: Zapište pomocí intervalů definiční obory funkcí:

a) $y = \sqrt{3-x}$ b) $y = \sqrt[3]{5x-5}$ c) $y = \sqrt[3]{3-x} + \sqrt[4]{5x-5}$

d) $y = \sqrt[5]{(x+2)\cdot(x-7)}$ e) $y = \sqrt[6]{x^2-4}$ f) $y = \sqrt[11]{7-3x^2}$

g) $y = \sqrt[4]{3x^2+4x-1}$ h) $y = \sqrt{\frac{x-4}{5+x}}$

Řešení:

a) $3 - x \geq 0, -x \geq -3, x \leq 3, D(f) = (-\infty, 3\rangle$

b) $5x - 5 \geq 0, x \geq 1, D(f) = \langle 1, +\infty)$

c) $x \in (-\infty, 3\rangle \wedge x \in \langle 1, +\infty)\, , D(f) = \langle 1,3\rangle$

d) $x \geq -2 \wedge x \geq 7\, ; x \leq -2 \wedge x \leq 7\, , D(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 7, +\infty)$

e) $(x-2)(x+2) \geq 0, x \geq 2 \wedge x \geq -2\, , x \leq 2 \wedge x \leq -2\, , D(f) = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

f) $7 - 3x^2 \geq 0,\ D(f) = \langle -\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\rangle$

g) $3x^2 + 4x - 1 \geq 0, x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+12}}{12} = \frac{-2\pm2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{3},$

$$D(f) = \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$$

h) $x - 4 \geq 0 \wedge 5 + x > 0\, , x \geq 4 \wedge x > -5\, , x - 4 \leq 0 \wedge x < -5\, , x \leq 4 \wedge x < -5$

$D(f) = (-\infty, -5) \cup \langle 4, +\infty)$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Zapište definiční obory následujících funkcí pomocí intervalů:

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt[5]{5-2x}$ c) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-3}$

2) Zapište definiční obory následujících funkcí pomocí intervalů:

a) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ b) $y = \sqrt[4]{x^2-1}$ c) $y = \sqrt{\frac{4-x}{x-2}}$

3) Rozhodněte, pro která $u \in \boldsymbol{R}$ je definována:

a) $\sqrt{u^2}$ b) $\sqrt[3]{u^3}$ c) $\sqrt[4]{u^4}$ d) $\sqrt[5]{u^5}$

4) Zjednodušte dané výrazy:

a) $\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right) + \sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right) - \sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

1.) a) $\langle 3, +\infty)$, b) $(-\infty; 2{,}5\rangle$, c) $\langle 3{,}4\rangle$

2.) a) $(0, +\infty)$, b) $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$, c) $(2, 4\rangle$

3.) a) $u \in \boldsymbol{R}$, b) $u \in \langle 0, +\infty)$, c) $u \in \boldsymbol{R}$, d) $u \in \langle 0, +\infty)$

4.) a) $2\sqrt{15}$, b) 8

Mocniny a odmocniny

Varianta C

Příklad: a) Zjednodušte výraz $\frac{\left(x^{\frac{9}{8}}\cdot y^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}}$; x, y, z jsou kladná reálná čísla

b) Částečně odmocněte $\sqrt[7]{a^{19}}$, předpokládejte; že a je kladné číslo

c) Vyjádřete součin $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^3}$ ve tvaru jediné odmocniny; předpokládejte, že a je kladné číslo

d) Pomocí jediné odmocniny vyjádřete $\sqrt{\frac{c}{d}\sqrt[3]{\frac{d}{c}}}$; c, d jsou kladná čísla

Řešení:

a) $\frac{\left(x^{\frac{9}{8}}\cdot y^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \frac{\left(x^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(y^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}} = \frac{x^{\frac{18}{24}}\cdot y^{\frac{10}{12}}\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{12}}\cdot y^{\frac{1}{12}}\cdot z^{\frac{1}{12}} =$
$(xyz)^{\frac{1}{12}}$

b) $\sqrt[7]{a^{19}} = a^{\frac{19}{7}} = a^{2+\frac{5}{7}} = a^2\cdot a^{\frac{5}{7}} = a^2\cdot\sqrt[7]{a^5}$

c) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}}$

d) $\sqrt{\frac{c}{d}\sqrt[3]{\frac{d}{c}}} = \left(\frac{c}{d}\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c}{d}\left(\frac{c}{d}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{2}{6}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{c}{d}}$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady k procvičení:

1) Zapište ve tvaru mocniny s racionálním exponentem:

$$\sqrt{15},\ \sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[8]{14^5},\ \sqrt[5]{x},\ \sqrt{(a^2-b^2)^3},\ \sqrt[4]{(ab)^3},\ \sqrt[3]{3^5},\ \sqrt[6]{13^7}$$

2) Vypočtěte:

a) $5{,}6^{\frac{1}{2}} : \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\left[2\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{8}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 18^{\frac{1}{8}}$

3) Uvedené výrazy vyjádřete pomocí jediné odmocniny; a, b jsou kladná čísla:

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}$ c) $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}}$ d) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$

4) Udejte, pro která x, y jsou definovány dále uvedené výrazy s odmocninami, a pak je vyjádřete v co nejjednodušším tvaru:

a) $2x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3}+\frac{5}{x}\sqrt{x^5}$ b) $\left(3\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)^2$

c) $\left(3\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)$

d) $\frac{2}{5}x\sqrt{25x}+8x\sqrt{x}+4\sqrt{x^3}-5x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^7}$

5) Upravte výrazy s odmocninami tak, aby ve jmenovateli nebyla odmocnina:

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{3-2\sqrt{6}}$

e) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

1.) $15^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, 14^{\frac{5}{8}}, x^{\frac{1}{5}}, (a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}, (ab)^{\frac{3}{4}}. 3^{\frac{5}{3}}, 3^{\frac{7}{6}}$

2.) a) 2, b) $2^{\frac{7}{8}}$, c) $(0{,}5)^{\frac{1}{4}}$

3.) a) $\sqrt[4]{a^3}$. b) $\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}$, c) $\sqrt[12]{a^{-5}}$, d) $\sqrt[3]{2}$

4.) a) $x>0, 4x\cdot\sqrt{x}$, b) $x\geq 0, y\geq 0, 9x+4y+12\sqrt{xy}$,

c) $x\geq 0, y\geq 0, 9x-4y$, d) $x>0, x\cdot\sqrt{x}\cdot(14-5x^3)$

5.) a) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$, b) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$, c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, d) $-\frac{2}{5}\left(3+2\sqrt{6}\right)$,

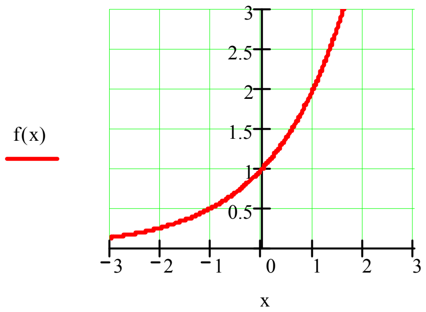
e) $5+2\sqrt{6}$, f) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$

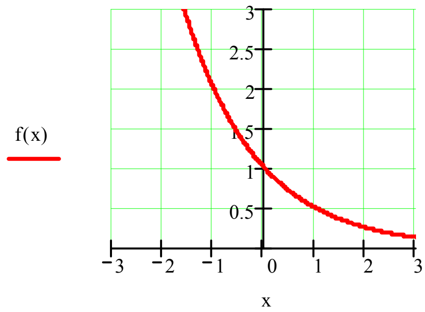
Exponenciální funkce

Definice**:**

Exponenciální funkce o základu a je funkce na množině $\boldsymbol{R}$ vyjádřená ve tvaru $y = a^x$, kde a je kladné číslo různé od 1.

Vlastnosti:

<table>
<tr><td colspan="2">Funkce $y = a^x; a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>

Definiční obor je R.
Obor hodnot je $(0, +\infty)$.
Je rostoucí, a tedy je prostá.
Je zdola omezená, není shora omezená.
Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.
Funkční hodnota v bodě 0 je rovna 1.</td><td>

Definiční obor je R.
Obor hodnot je $(0, +\infty)$.
Je klesající, a tedy je prostá.
Je zdola omezená, není shora omezená.
Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum.
Funkční hodnota v bodě 0 je rovna 1.</td></tr>
</table>

Pro posunování grafů exponenciálních funkcí platí stejná pravidla jako pro předešlé typy funkcí: $$f_0: y = a^x, \qquad f: y = a^{x-m} + n$$ Graf funkce f získáme posunutím grafu funkce f_0 o m jednotek doprava a n jednotek nahoru.

Exponenciální funkce

Varianta A

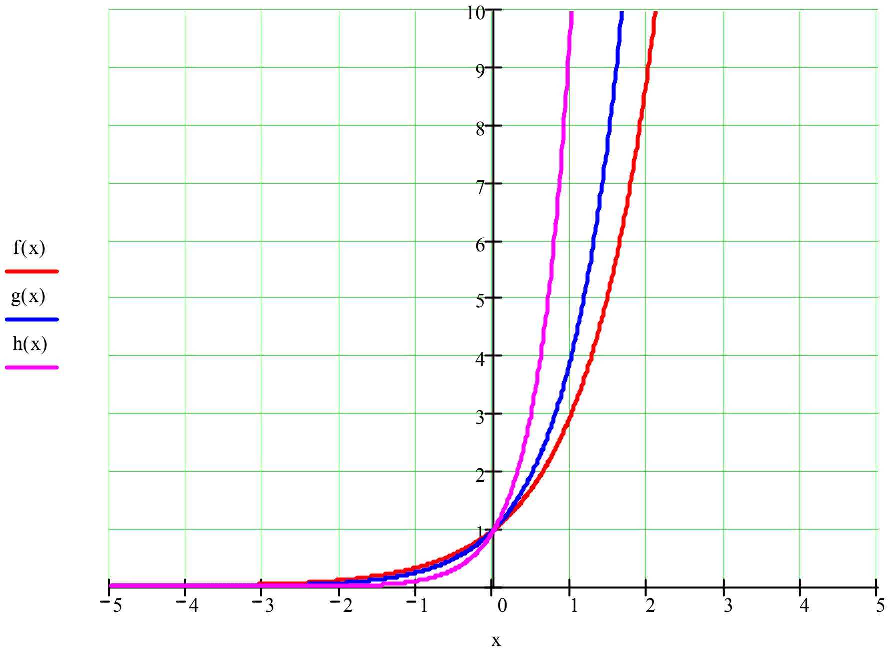
Příklad: Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí:

$$f_1\colon y = 3^x, \qquad f_2\colon y = 4^x, \qquad f_3\colon y = 10^x$$

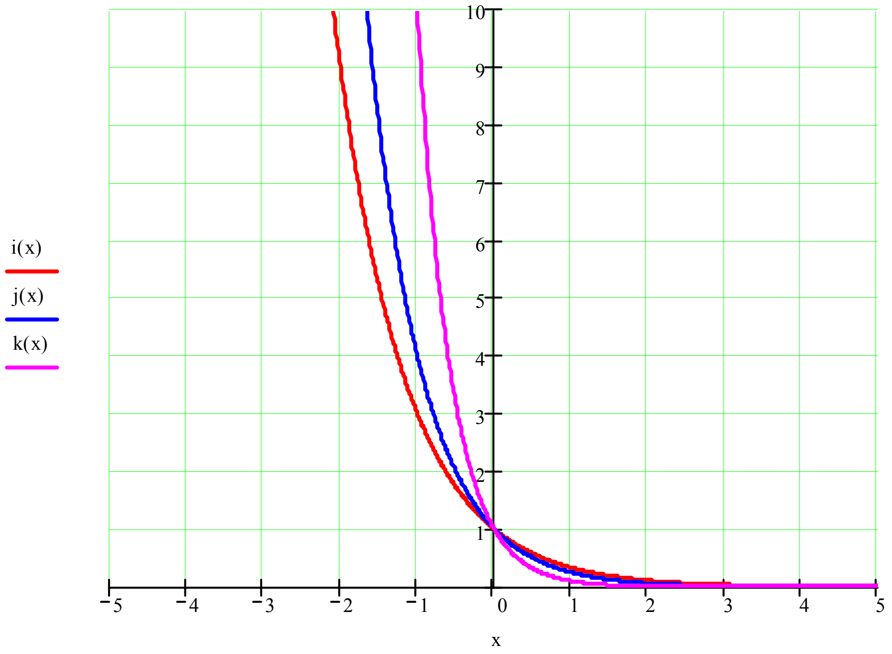
$$g_1\colon y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \qquad g_2\colon y = \left(\frac{1}{4}\right)^x, \qquad g_3\colon y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

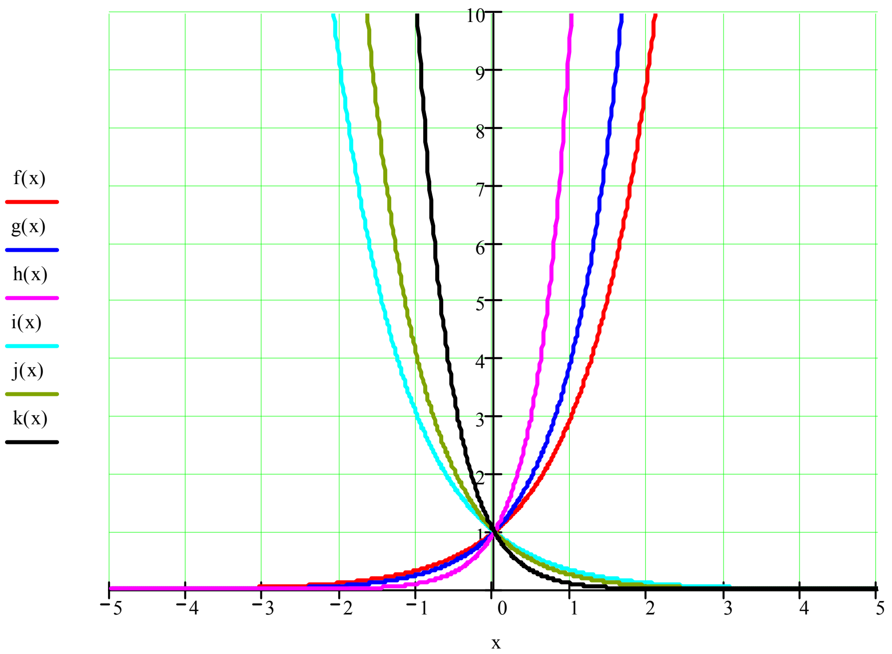
Řešení:

$$f(x) = 3^x, \qquad g(x) = 4^x, \qquad h(x) = 10^x$$



$$i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \qquad j(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x, \qquad k(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$





Můžeme využít toho, že pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Grafy funkcí $y = 2^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ jsou souměrně sdruženy podle osy y.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Na základě vlastností exponenciální funkce určete, které z následujících mocnin jsou větší než jedna, rovny jedné, menší než jedna:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}}; 2{,}18^{0{,}1};\ 0{,}45^{0{,}4}$$

2) Rozhodněte, zda jsou pravdivé výroky:

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^{2{,}5} < \left(\frac{6}{7}\right)^{2{,}4}$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}4} < \left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}3}$

3) Rozhodněte, který ze vztahů $0 < a < 1, a > 1$ platí, je-li:

a) $a^{\frac{2}{5}} < a^{\frac{7}{3}}$ b) $a^{\frac{21}{6}} < a^{\frac{1}{6}}$

4) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí $y = 2^x, y = 4^x$ a dále graf funkce $y = 2{,}5^x$.

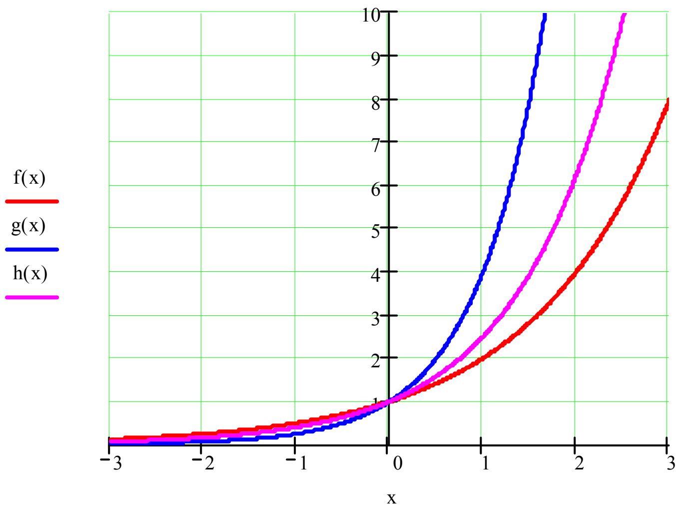
1.) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < 1;, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}} > 1;\ 2{,}18^{0{,}1} > 1;\ 0{,}45^{0{,}4} < 1$

2) a) ano, b) ne

3.) a) $a > 1$, b) $0 < a < 1$

4.) Pro všechna $x \in (0, +\infty)$

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = 4^x, \qquad h(x) = 2{,}5^x$$



Exponenciální funkce

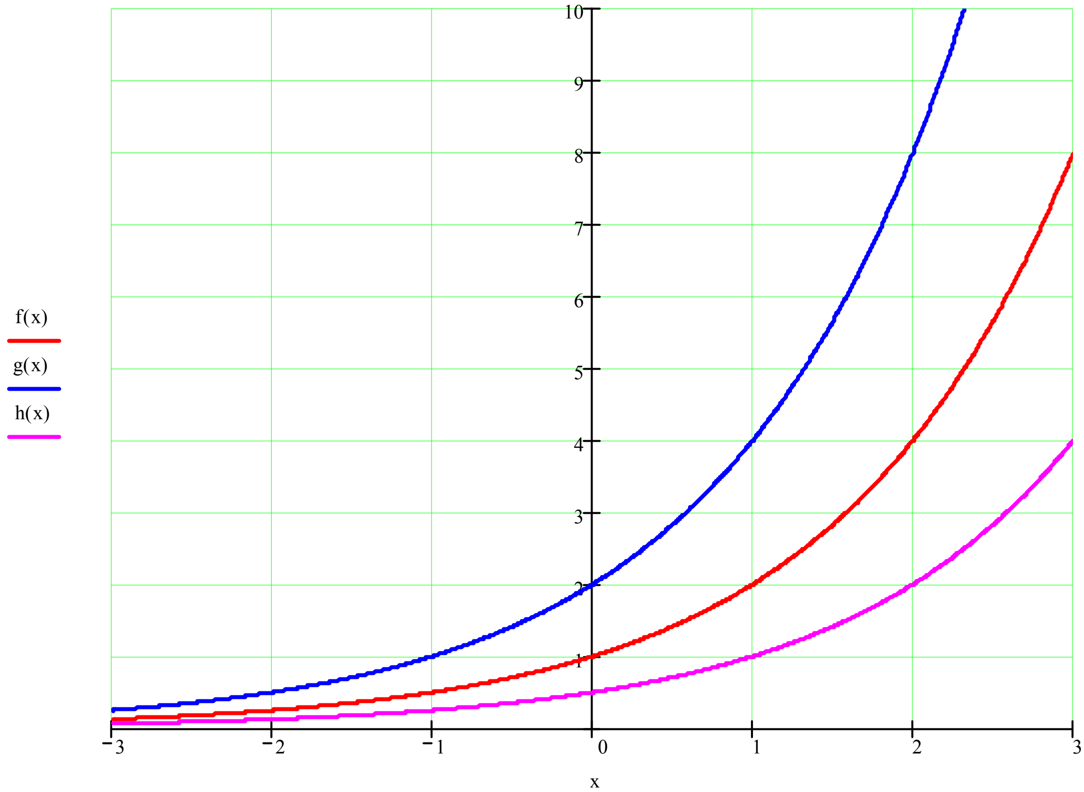
Varianta B

Příklad: Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 2^x, \qquad y = 2^{x+1}, \qquad y = 2^{x-1}$$

Řešení:

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = 2^{x+1}, \qquad h(x) = 2^{x-1}$$



Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 0{,}2^x, \qquad y = -0{,}2^x, \qquad y = -0{,}2^x + 2$$

2) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$$

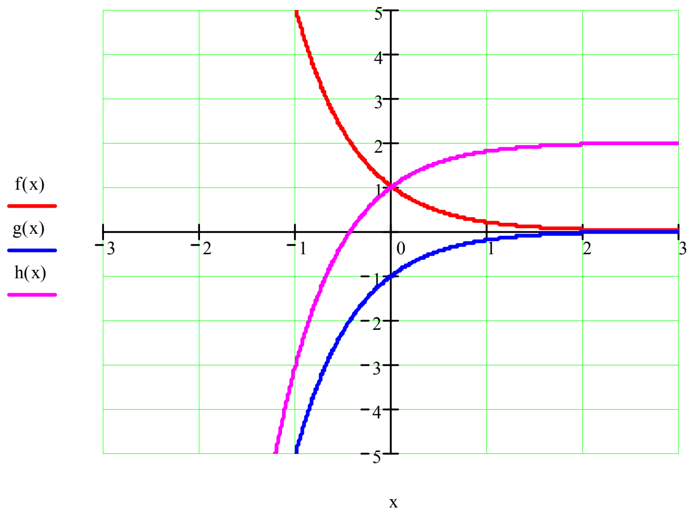
3) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí:

$$y = 4^x, \qquad y = 4^x + 2, \qquad y = 4^{x-1}$$

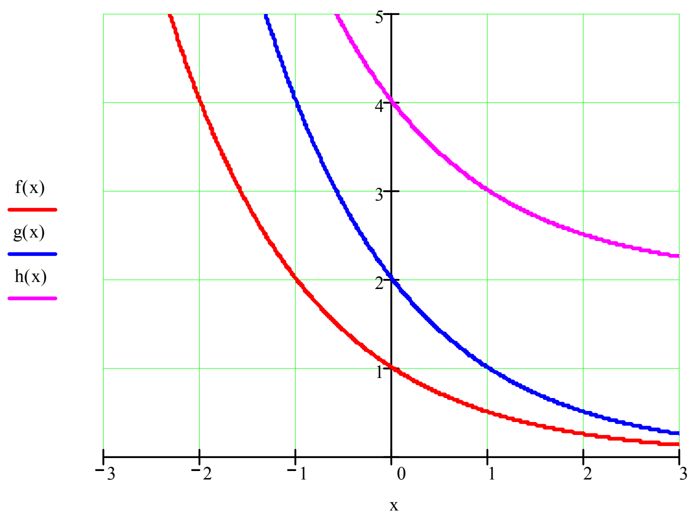
4) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí:

$$y = 0{,}4^x, \qquad y = -0{,}4^x, \qquad y = 0{,}4^{-x}$$

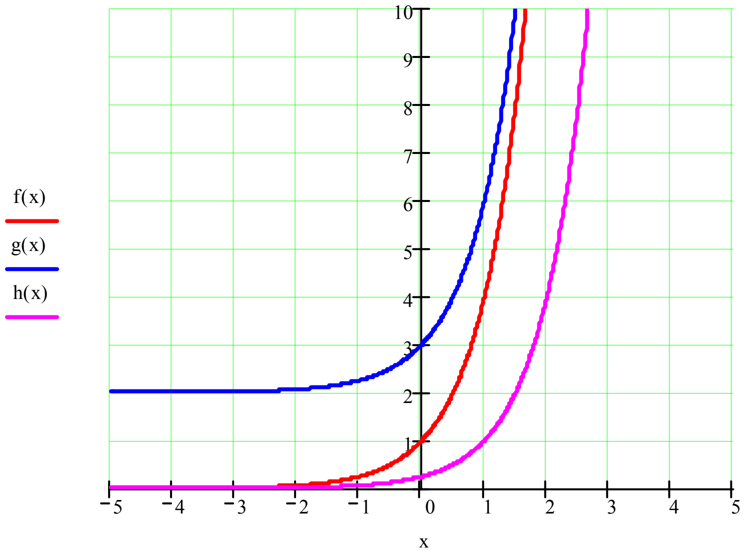
1.) $f(x) = 0{,}2^x,\ g(x) = -0{,}2^x,\ h(x) = -0{,}2^x + 2$



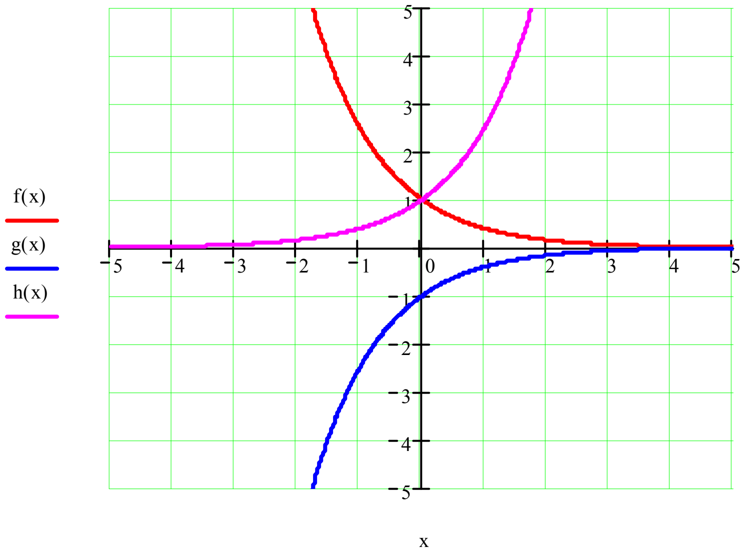
2.) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1},\ h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



3.) $f(x) = 4^x,\ g(x) = 4^x + 2,\ h(x) = 4^{x-1}$



4.) $f(x) = 0{,}4^x,\ g(x) = -0{,}4^x,\ h(x) = 0{,}4^{-x}$



Exponenciální funkce

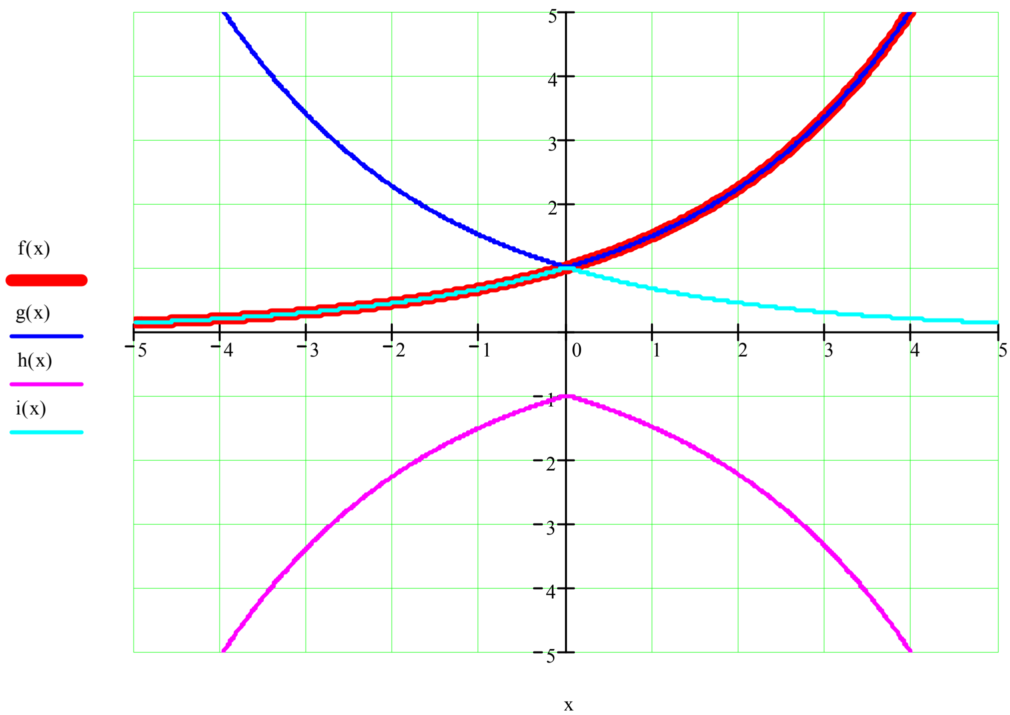
Varianta C

Příklad: Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 1{,}5^{x}, \qquad y = 1{,}5^{|x|}, \qquad y = -1{,}5^{|x|}, \qquad y = 1{,}5^{-|x|}$$

Řešení:

$$f(x) = 1{,}5^{x}, \qquad g(x) = 1{,}5^{|x|}, \qquad h(x) = -1{,}5^{|x|}, \qquad i(x) = 1{,}5^{-|x|}$$



***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 0{,}7^{x+1}, \qquad y = 0{,}7^{|x+1|}$$

2) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = -0{,}7^{|x+1|}, \qquad y = 0{,}7^{-|x+1|}$$

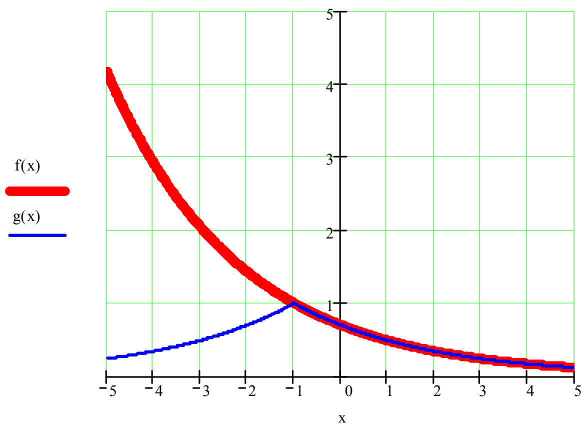
3) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 2^x - 3, \qquad y = |2^x - 3|$$

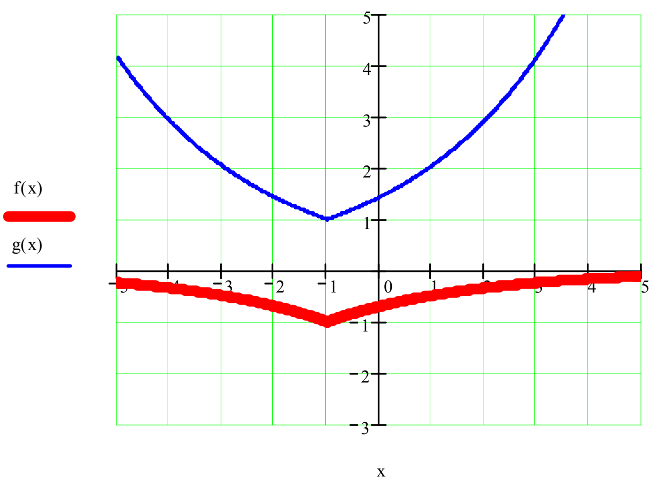
4) Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 2^x - 3, \qquad y = 2^{|x|} - 3, \qquad y = \left|2^{|x|} - 3\right|$$

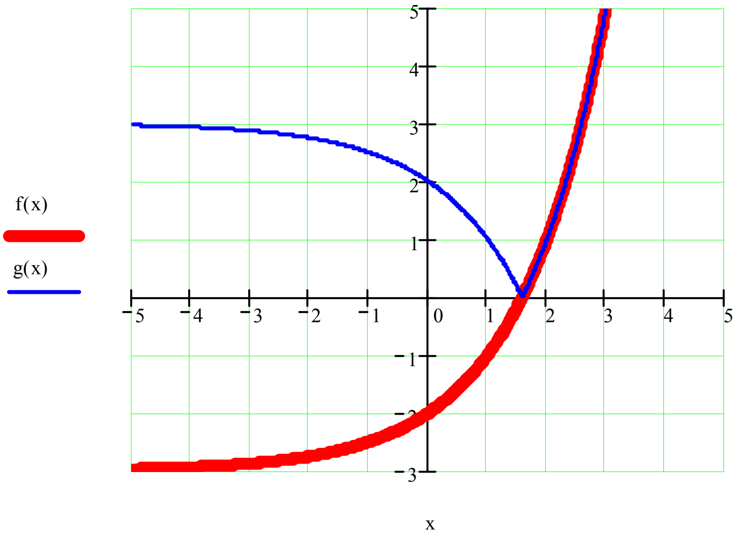
1.) $f(x) = 0{,}7^{x+1},\ g(x) = 0{,}7^{|x+1|}$



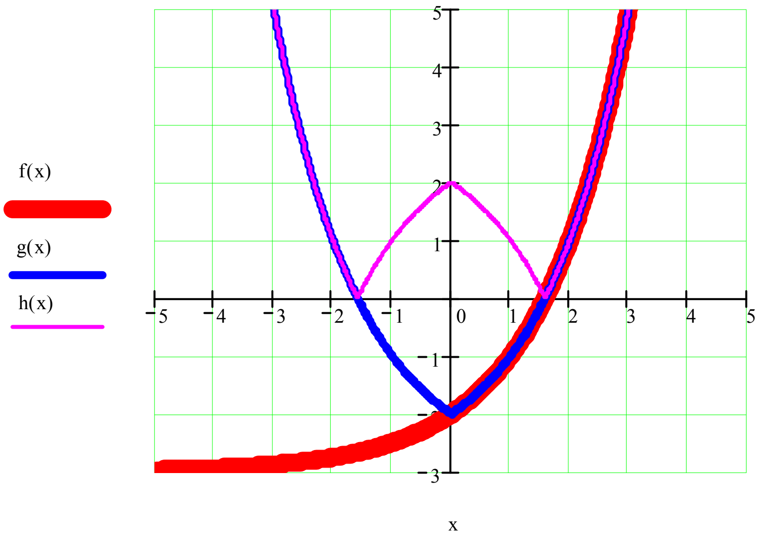
2.) $f(x) = -0{,}7^{|x+1|},\ g(x) = 0{,}7^{-|x+1|}$



3.) $f(x) = 2^x - 3,\ g(x) = |2^x - 3|$



4.) $f(x) = 2^x - 3,\ g(x) = 2^{|x|} - 3, h(x) = \left|2^{|x|} - 3\right|$



Logaritmická funkce

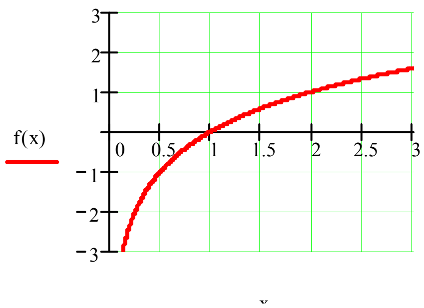
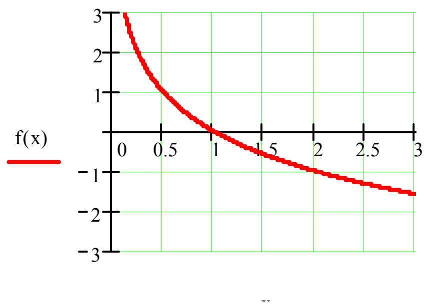
Definice**:**

> **Logaritmická funkce o základu** a je funkce, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$; a je libovolné kladné číslo různé od jedné.

Uvažujme exponenciální funkci $f: y = a^x$. Pro hodnotu funce f^{-1}, která je přiřazena číslu x, se volí speciální označení: „$\log_a x$“. Čteme logaritmus x o základu a nebo „logaritmus o základu a čísla x.“ V souladu s tímto označením budeme logaritmickou funkci f^{-1} o základu a zapisovat ve tvaru $\boxed{y = \log_a x}$.

> Definičním oborem logaritmické funkce f^{-1} je množina $(0, +\infty)$; to plyne z toho, že obor hodnot funkce $f: y = a^x$ je $(0, +\infty)$.

Vlastnosti:

Funkce $y = \log_a x\,; a \in \boldsymbol{R}^+ \setminus \{1\}$	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 Definiční obor je $(0, +\infty)$. Obor hodnot je $\boldsymbol{R}$. Je rostoucí, a tedy je prostá. Není ani shora omezená, ani zdola omezená. Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum. Funkční hodnota v bodě 1 je rovna 0.	 Definiční obor je $(0, +\infty)$. Obor hodnot je $\boldsymbol{R}$. Je klesající, a tedy je prostá. Není ani shora omezená, ani zdola omezená. Nemá v žádném bodě ani maximum, ani minimum. Funkční hodnota v bodě 1 je rovna 0.

Logaritmus

Definice:

Logaritmus čísla $\boldsymbol{r}$ o základu a je takové číslo v, pro které platí $a^v = r$.

$$\log_a r = v, \text{ právě když } a^v = r.$$

Věty o logaritmech:

Pro každé $a > 0, a \neq 1$ a pro všechna kladná reálná čísla r, s je

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s.$$

„Logaritmus součinu dvou kladných čísel je roven součtu logaritmů jednotlivých činitelů.“

Pro každé $a > 0, a \neq 1$, pro všechna kladná reálná čísla r, s je

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s.$$

„Logaritmus podílu dvou kladných čísel je roven rozdílu logaritmů dělence a dělitele (v tomto pořadí).“

Pro každé $a > 0, a \neq 1$, pro všechna $r \in \boldsymbol{R}^+$ a pro všechna $s \in \boldsymbol{R}$ je

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r.$$

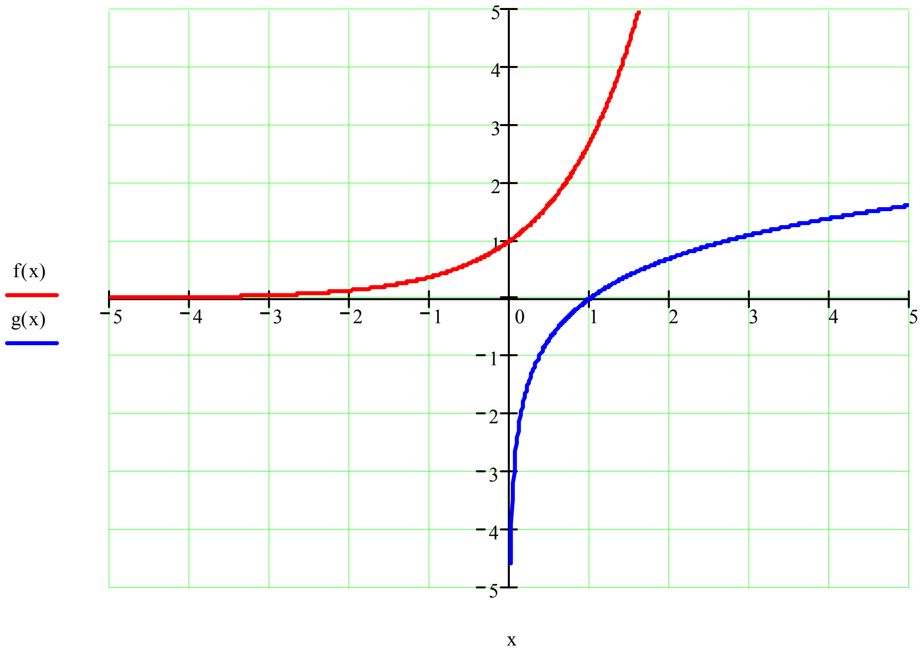
„Logaritmus mocniny kladného čísla je roven součinu mocnitele a logaritmu základu mocniny.“

Logaritmy o základu 10 obvykle označujeme jako **dekadické logaritmy**. V zápisu „$\log_{10} x$“ většinou „10“ vynecháváme, píšeme jen „$\log x$“(např. místo $\log_{10} 0{,}25$ pouze $\log 0{,}25$ apod.) a čteme „**logaritmus $\boldsymbol{x}$**.“

Přirozená exponenciální funkce a logaritmus

Exponenciální funkce o základu $\boldsymbol{e}$, tj. funkce $y = e^x$, se nazývá přirozená exponenciální funkce. Tato funkce má značný význam v teoretické matematice, pomocí ní se popisuje řada jevů a procesů ve fyzice, chemii, biologii atd. Označme $e = Eulerovo\ číslo$ přičemž jeho hodnota je přibližně **2,718281828**.

Na obrázku níže je sestrojen graf funkce $y = e^x$ a graf funkce k ní inverzní, tj. graf funkce $y = \log_e x$.



Místo $\log_e x$ je zvykem psát $\ln x$; hovoříme o přirozeném logaritmu čísla x a o přirozené logaritmické funkci $y = \ln x$.

Pro všechna kladná reálná čísla r, s různá od jedné a pro každé kladné reálné číslo t je

$$\log_r t = \frac{\log_s t}{\log_s r}$$

Logaritmická funkce a logaritmus

Varianta A

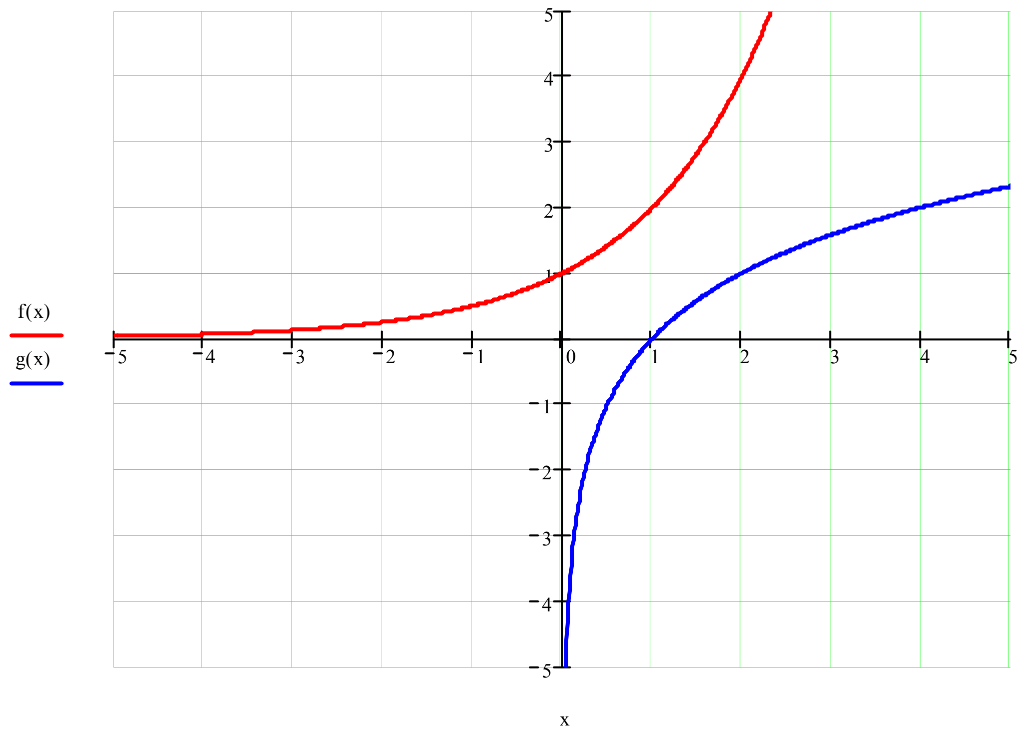
Příklad: Do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí:

$$f: y = 2^x, \qquad f^{-1}: y = \log_2 x$$

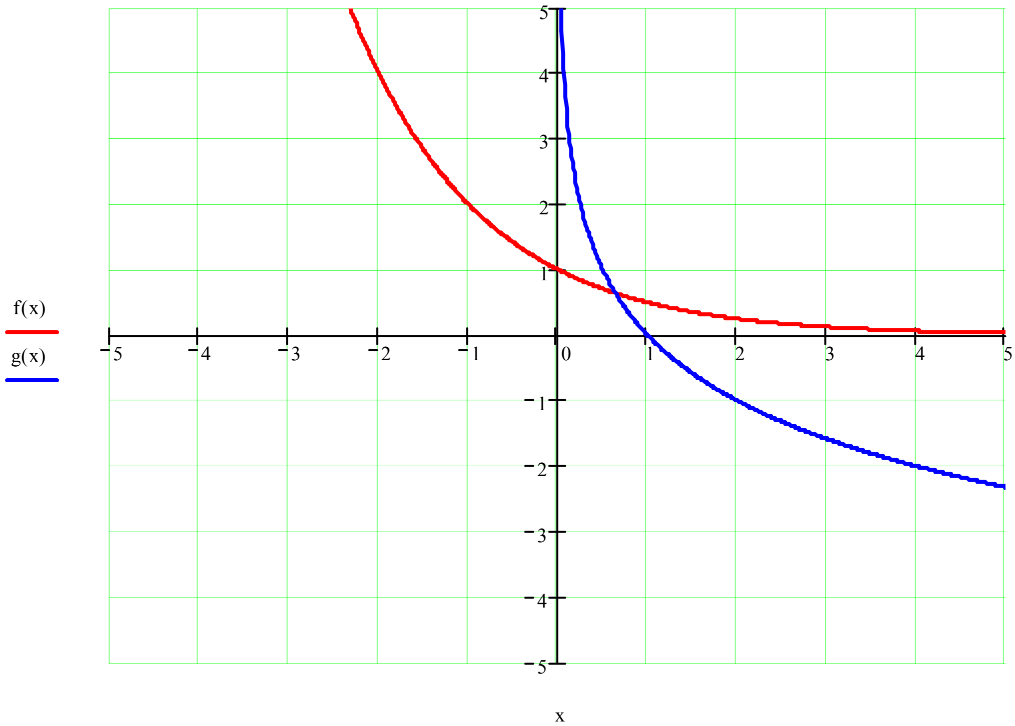
$$g: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad g^{-1}: y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Řešení:

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = \log_2 x$$



$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Rozhodněte, které z dále uvedených výroků jsou pravdivé:

a) $\log_3 5 < \log_3 8$ b) $\log_{0,5} 7 \leq \log_{0,5} 8$

c) $\log_3 10 > \log_{\frac{1}{3}} 10$ d) $\log_{0,4} 7 < \log_{0,4} 6$

[Využijte poznatky o vlastnostech logaritmických funkcí]

2) Najděte všechna $x \in \boldsymbol{R}$, pro něž platí:

a) $\log_2 x > \log_2 4$ b) $\log_{0,5} x \geq \log_{0,5} 2$

c) $\log_x 3 < \log_x 11$

3) Zjistěte definiční obory následujících funkcí:

a) $y = \log_{10}(x + 3)$ b) $y = \log_{0,5}(-x)$

4) Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = \log_{10}(x - 3)$ b) $y = \log_{10} x - 1$

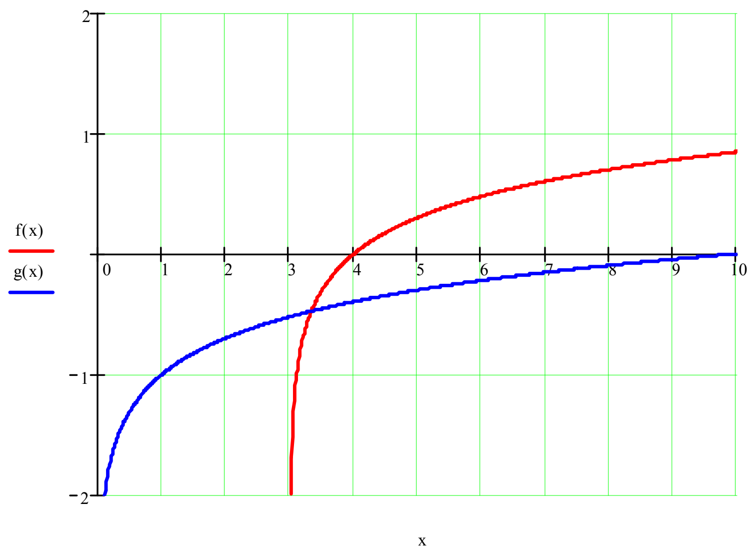
Zapište jejich definiční obory a obory hodnot.

1.) a) ano, b) ne, c) ano, d) ano

2) a) $x > 4$, b) $x \leq 2$, c) $x > 1$

3.) a) $(-3, +\infty)$, b) $(-\infty, 0)$

4.) a) $(3, +\infty)$, $\boldsymbol{R}$ b) $(0 + \infty)$, $\boldsymbol{R}$



Logaritmická funkce a logaritmus

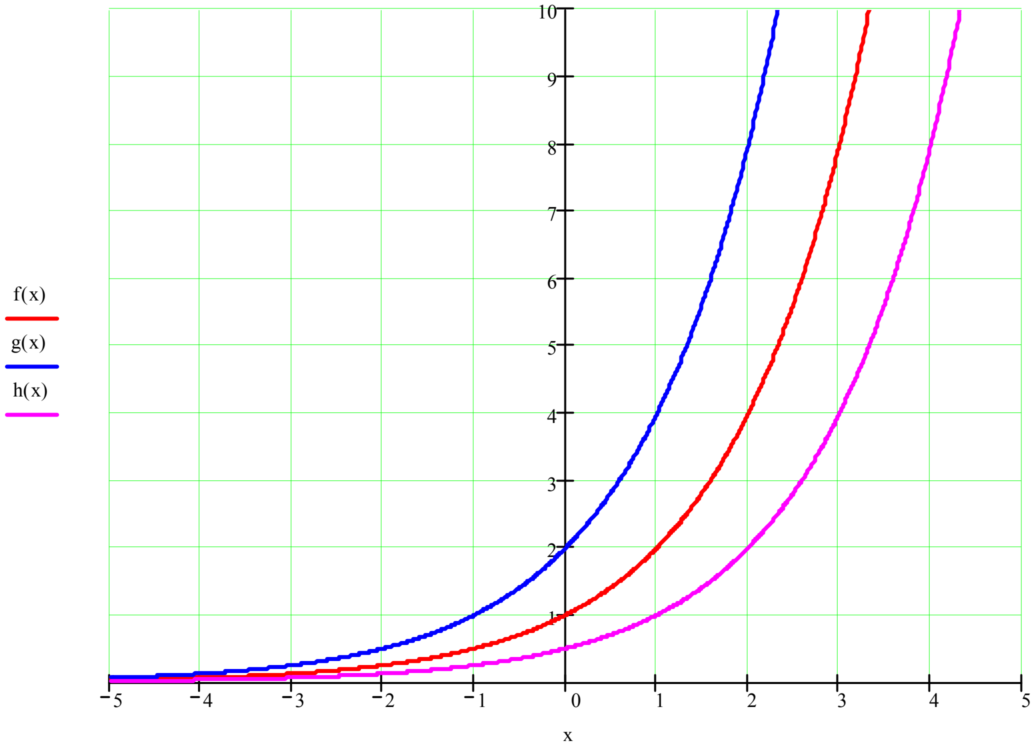
Varianta B

Příklad: Načrtněte v téže soustavě souřadnic grafy těchto funkcí:

$$y = 2^x, \qquad y = 2^{x+1}, \qquad y = 2^{x-1}$$

Řešení:

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = 2^{x+1}, \qquad h(x) = 2^{x-1}$$



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Vypočítejte:

a) $\log_{10} 1000$ b) $\log_{10} 10^5$

c) $\log_{10} 10^0$ d) $\log_{10} 0{,}01$

2) Vypočítejte:

a) $\log_{0,5} 2$ b) $\log_{0,5} 0{,}5$

c) $\log_{0,5} 8$ d) $\log_{0,5} \sqrt{2}$

3) Vypočítejte:

a) $\log_3 1$ b) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\log_3 \frac{1}{9}$ d) $\log_3 3\sqrt{3}$

4) Vypočítejte:

a) $\log_4 \frac{1}{256} - \log_{10} 10 + \log_3 243$ b) $\log_{10} 0{,}001 \cdot \log_3 9 - \log_3 \frac{1}{9}$

1.) a) 3; $[1000 = 10^3]$, b) 5, c) 0, d) -2; $[0{,}01 = 10^{-2}]$

2.) a) -1; $\left[2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]$, b) 1, c) -3, d) -0,5

3.) a) 0, b) -0,5; $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5} = 3^{-0,5}\right]$, c) -2, d) 1,5

4.) a) 0, b) -4

Logaritmická funkce a logaritmus

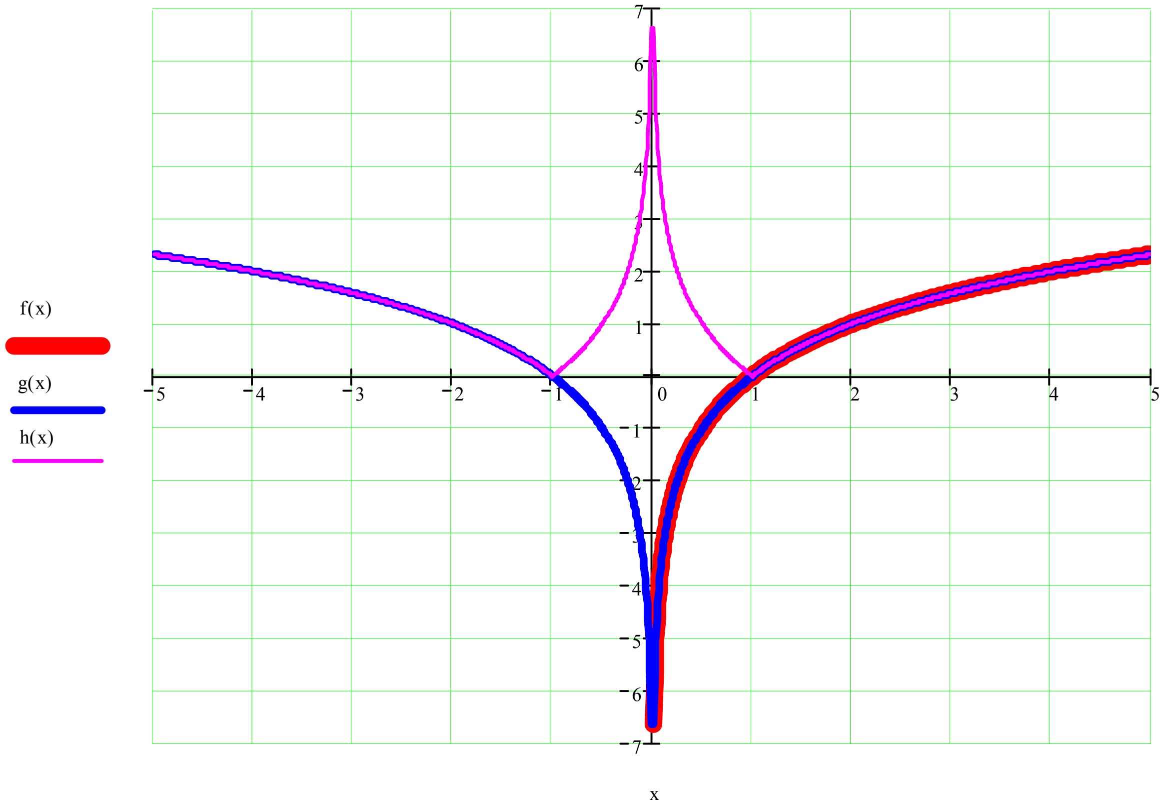
Varianta C

Příklad: Do jednoho obrázku načrtněte grafy těchto funkcí:

$$f\colon y = \log_2 x\,, \qquad g\colon y = \log_2 |x|\,, \qquad h\colon y = |\log_2 |x||$$

Řešení:

$$f(x) = \log_2 x\,, \qquad g(x) = \log_2 |x|\,, \qquad h(x) = |\log_2 |x||$$



***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady k procvičení:

1) Načrtněte grafy těchto funkcí:

$$y = \log_{0,5} x\,, \qquad y = \log_{0,5}|x|\,, \qquad y = \left|\log_{0,5}|x|\right|$$

2) Načrtněte grafy funkcí:

$$y = |\log_4 x|, \qquad y = \log_4|x|$$

Zapište definiční obory a obory hodnot jednotlivých funkcí. Popište vlastnosti funkcí.

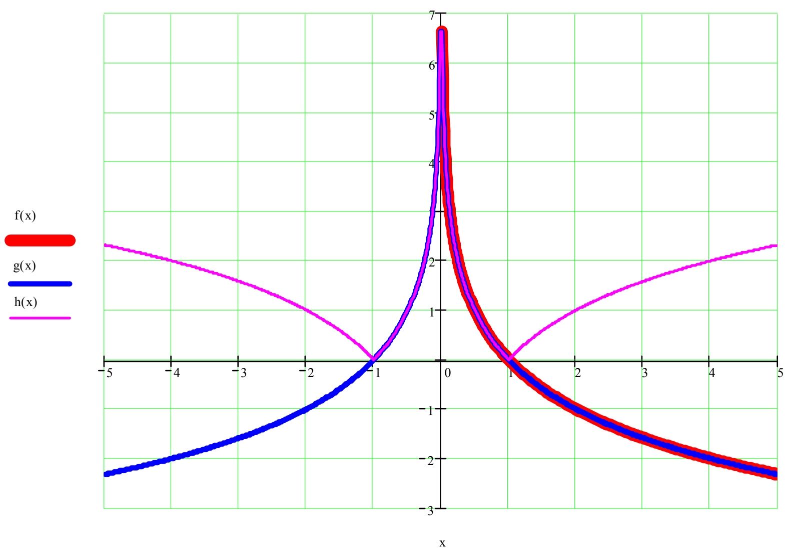
3) Zapište pomocí intervalů definiční obory funkcí:

$$y = \log_{10}\frac{1}{x-4}, \qquad y = \log_5(5-2x)$$

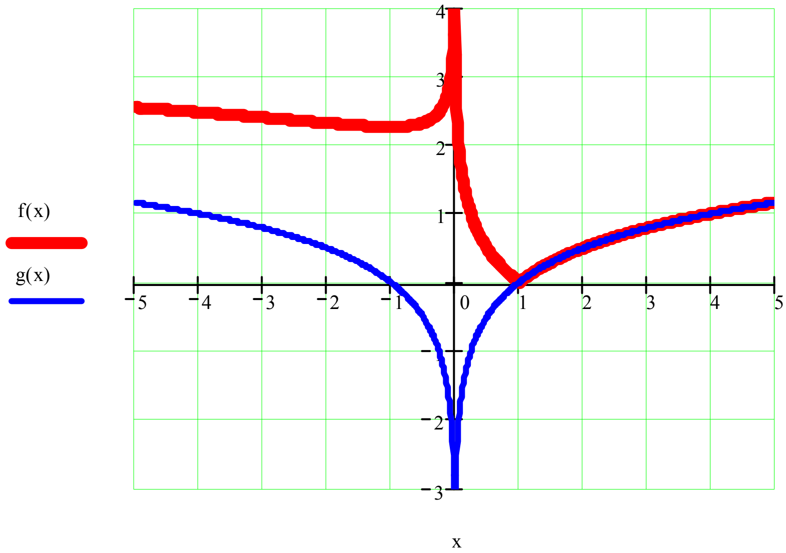
4) Zapište pomocí intervalů definiční obory funkcí:

$$y = \log_{10}\sqrt{x^2-3}\,, \qquad y = \sqrt{\log_{10}(x^2-3)}$$

1.) $f(x) = \log_{0,5} x\,,\ g(x) = \log_{0,5}|x|\,,\ h(x) = \left|\log_{0,5}|x|\right|$



2.) $f(x) = |\log_4 x|,\ g(x) = \log_4|x|$



$f(x)$: $(0, +\infty), \langle 0, +\infty)$; je klesající v intervalu $(0, 1\rangle$, rostoucí v intervalu $\langle 1, +\infty)$, je zdola omezená, není shora omezená, má minimum v bodě 1, nemá maximum v žádném bodě

$g(x)$: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \boldsymbol{R}$; je klesající v intervalu $(-\infty, 0)$, rostoucí v intervalu $(0, +\infty)$, není shora omezená ani zdola omezená, nemá v žádném bodě maximum ani minimum, je sudá

3.) a) $(4, +\infty)$, b) $(-\infty; 2{,}5)$

4.) a) $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, b) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$; [Musí být $\log_{10}(x^2 - 3) \geq 0$, a tedy $x^2 - 3 \geq 1$.]

Logaritmické a exponenciální rovnice

Definice**:**

Logaritmickou rovnicí nazýváme každou rovnici, v níž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$.

Nejjednodušším případem logaritmické rovnice je rovnice

$$\log_a x = b, a > 0,\ a \neq 1, b \in \boldsymbol{R}, \qquad (1)$$

jež má (podle definice logaritmu) řešení $x = a^b$.

Složitější logaritmickou rovnici obvykle řešíme tak, že ji upravíme na rovnici tvaru

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)\,,\ a > 0, a \neq 1, \qquad (2)$$

Kde výrazy $f(x), g(x)$ vyjadřují funkční hodnoty dvou daných funkcí f, g proměnné x, z nichž jedna může být speciálně konstanta. Protože logaritmická funkce je prostá (rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$), z logaritmické rovnice (2) plyne rovnice

$$f(x) = g(x). \qquad (3)$$

Rovnice (2), (3) jsou však ekvivalentní jenom při splnění podmínek: $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$. Pokud je nestanovíme předem, musí být nutnou součástí řešení zkouška.

Řešení složitějších logaritmických rovnic též často usnadňuje vhodná substituce, např. $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$, kterou se převede logaritmická rovnice na algebraickou rovnici.

Logaritmické a exponenciální rovnice

Varianta A

Příklad: Řešte rovnici $2\log_{10}(x-1) = 0{,}5(\log_{10} x^5 - \log_{10} x)$ s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

$$2\log_{10}(x-1) = 0{,}5(\log_{10} x^5 - \log_{10} x)$$

$$2\log_{10}(x-1) = 0{,}5\log_{10}\frac{x^5}{x}$$

$$2\log_{10}(x-1) = 0{,}5\log_{10} x^4$$

$$2\log_{10}(x-1) = 2\log_{10} x$$

$$\log_{10}(x-1) = \log_{10} x$$

$$x - 1 = x$$

Odtud je už vidět, že žádné $x \in \boldsymbol{R}$ nemůže být kořenem řešené rovnice.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $\log_3(x+5) = \log_3(2x-1)$ b) $\log_5(x^2-17) = \log_5(x+3)$

2) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $\log_{10} x = 2 - \log_{10} 5$ b) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$

3) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $\log_{10}(x+3) - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10}(x+2)$ b) $\log_4(2x+5) - \log_4(x+1) = 1$

4) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $\frac{2\cdot\log_{10}(x+2)}{\log_{10}(3x+10)} = 1$ b) $\log_{10}\sqrt{x-4} + \log_{10}\sqrt{3x+1} = \log_{10} 40 - 1$

1.) a) $x = 6$, b) $x = 5$

2) a) $x = 20$, b) $x = 2$

3.) a) $x = 2$, b) $x = \frac{1}{2}$

4.) a) $x = 2$, b) $x = 5$

Logaritmické a exponenciální rovnice

Varianta B

Příklad: Řešte rovnici $\frac{1}{3^{-(u+2)}} - 2 = 3^u$ s neznámou $u \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

Upravujeme nejprve levou stranu dané rovnice:

$$3^{u+2} - 2 = 3^u$$

$$9 \cdot 3^u - 2 = 3^u$$

Dále dostaneme:

$$8 \cdot 3^u = 2$$

$$3^u = 0{,}25$$

Od výrazů, které tvoří jednotlivé strany poslední rovnice, přejdeme k jejich logaritmům o základu 10; říkáme, že **rovnici logaritmujeme**:

$$\log_{10} 3^u = \log_{10} 0{,}25$$

Podle věty o logaritmu mocniny dostaneme

$$u \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 0{,}25$$

a odtud

$$u = \frac{\log_{10} 0{,}25}{\log_{10} 3}$$

Pomocí kalkulátoru můžeme zjistit, že

$$u \doteq -1{,}262.$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Příklady k procvičení:

1) Řešte rovnice s neznámou $t \in \boldsymbol{R}$:

a) $5^{t-2} = \frac{10}{3}$ b) $3^{2t-1} = 5^{3-t}$

2) Řešte rovnice s neznámou $t \in \boldsymbol{R}$:

a) $5^{t^2+t} \cdot 2^{t^2+t} = 4 \cdot 100^t$ b) $2^{t-1} \cdot 3^{3t} = \frac{4^{t-1}}{2}$

3) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $5^x = 3$ b) $2^{-2x+7} = 10^{-3x+5}$

4) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $8^{x+1} = 0{,}1$ b) $4^{x+2} = 5^{x+1}$

1.) a) $t \doteq 2{,}748$, b) $t \doteq 1{,}557$

2.) a) $t_1 \doteq 1{,}423$; $t_2 \doteq -0{,}423$, b) $t \doteq -0{,}533$

3.) a) $x = \frac{\log 3}{\log 5}$; $[\log 5^x = \log 3]$, b) $x = \frac{5-\log 128}{3-\log 4}$;

$[(-2x+7) \cdot \log 2 = -3x + 5]$

4.) a) $x = -1 - \frac{1}{\log 8}$, b) $x = \frac{\log \frac{5}{16}}{\log \frac{4}{5}}$

Logaritmické a exponenciální rovnice

Varianta C

Příklad: Řešte rovnici $v^{\log v} = 100v$ s neznámou $v \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

Nejprve budeme danou rovnici logaritmovat, užijeme při tom dekadické logaritmy:

$$\log\left(v^{\log v}\right) = \log(100v)$$

Podle vět o logaritmech a na základě definice logaritmu dále dostaneme:

$$\log v \cdot \log v = \log 100 + \log v$$

$$(\log v)^2 - \log v - 2 = 0$$

Užijeme substituci

$$\log v = x \qquad (1)$$

a budeme řešit kvadratickou rovnici

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad (2)$$

s neznámou $x \in R$:

$$D = 1 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Rovnice (2) má dva různé kořeny: a) $x_1 = 2$, b) $x_2 = -1$.

Dosadíme za x do (1) po řadě čísla 2 a -1 a budeme řešit odpovídající logaritmické rovnice s neznámou $v \in \boldsymbol{R}$:

a) $\log v = 2, \;\; v = 100$ b) $\log v = -1, \;\; v = 0{,}1$

Provedeme zkoušku dosazením:

a) $L(100) = 100^{\log 100} = 100^2 = 10^4$

$P(100) = 100 \cdot 100 = 10^4$

$L(100) = P(100)$

b) $L(0{,}1) = 0{,}1^{\log 0{,}1} = 0{,}1^{-1} = 10$

$P(0{,}1) = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

$L(0{,}1) = P(0{,}1)$

Kořeny rovnice $v^{\log v} = 100v$ jsou čísla 100 a 0,1.

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Příklady k procvičení:

1) Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - 10 = 0$

b) $\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2$

[Užijte metodu substituce]

2) Řešte rovnice s neznámou $v \in \boldsymbol{R}$:

a) $v^{1+\log v} = 100$ b) $\sqrt[5]{v^{\log_3 v}} = 243$

[Rovnice logaritmujte]

3) Řešte rovnice s neznámou $u \in \boldsymbol{R}$:

a) $u^{\log u+2} = 1000$ b) $u^{\log_2 u+2} = 8$

4) Řešte soustavy rovnic s neznámými $x, y \in \boldsymbol{R}$:

a) $\log x + \log y = 5$

$\log x - \log y = 3$

b) $x + y = 34$

$\log_2 x + \log_2 y = 6$

1.) a) $x_1 = 3^{-2}, x_2 = 3^5$, b) $x = 5$

2.) a) $v_1 = 0{,}01; v_2 = 10$. b) $v = 3^5$

3.) a) $u_1 = 10, u_2 = 10^{-3}$, b) $u_1 = 0{,}125; u_2 = 2$

4.) a) $x = 10^4, y = 10$, b) $x_1 = 2, y_1 = 32, x_2 = 32, y_2 = 2$

$[\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy)\,, xy = 64]$