DIFERENCIÁLNÍ POČET – SPOJITOST FUNKCE, LIMITA FUNKCE, DERIVACE FUNKCE

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově

Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia

Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

Obsah

Diferenciální počet

Elementární funkce

Základní vlastnosti funkcí zopakovat:

co je funkce, definiční obor - D_f*, obor hodnot funkce -* H_f*, graf funkce, rovnost funkcí, funkce sudá a lichá, funkce klesající a rostoucí, funkce prostá, funkce inverzní, funkce složená, funkce omezená, funkce periodická, extrémy funkce. Tyto vlastnosti funkcí se nevyšetřují pouze v celém definičním oboru, ale většinou v nějakém intervalu, který je podmnožinou definičního oboru funkce.*

1) ***Polynomická funkce n-tého stupně***

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Kde ***n*** je celé nezáporné číslo, $a_n, a_{n-1}, \ldots\ a_1, a_0$ jsou reálné koeficienty, kde $a_n \neq 0$.

Definiční obor jsou reálná čísla.

Příklady jednoduchých polynomických funkcí:

$y = a_0$	konstantní funkce
$y = a_1 x + a_0$	lineární funkce
$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	kvadratická funkce

2) ***Racionální funkce***

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

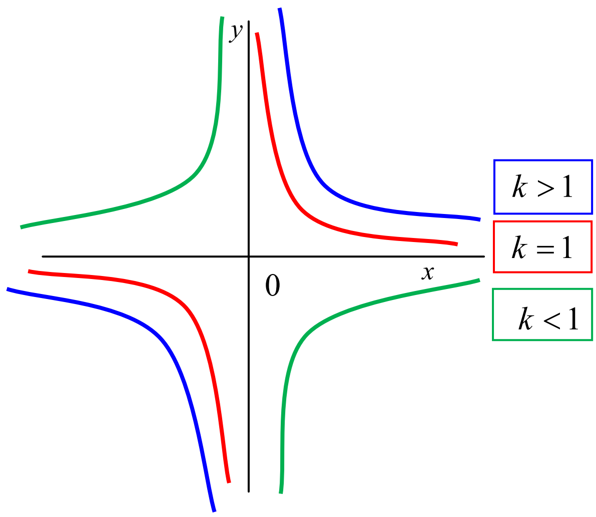
Definičním oborem funkce je množina reálných čísel, kromě všech nulových bodů polynomu *Q (x)*. (to jsou čísla *x*, pro která platí $Q_m(x) = 0$)

Mezi nejdůležitější racionální funkce patří:

a) ***Nepřímá úměrnost***

$$y = \frac{k}{x}$$

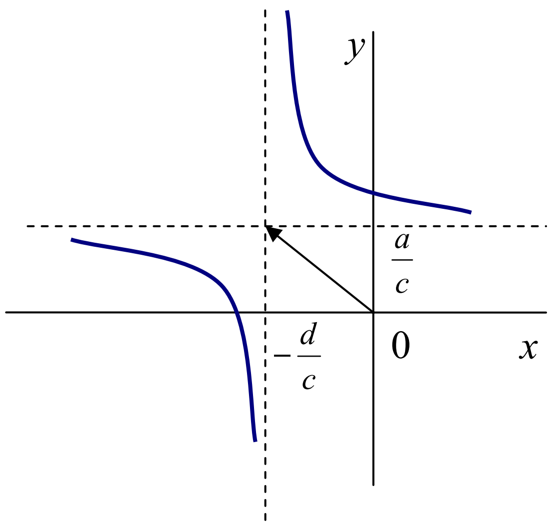
$k \neq 0, D_f = H_f = \mathbb{R} - \{0\}$



b) ***Lineární lomená funkce***

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

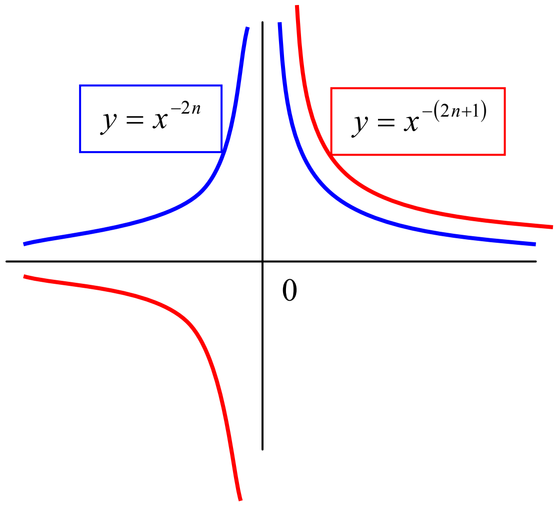
$c \neq 0, ad \neq bc, D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}, H_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

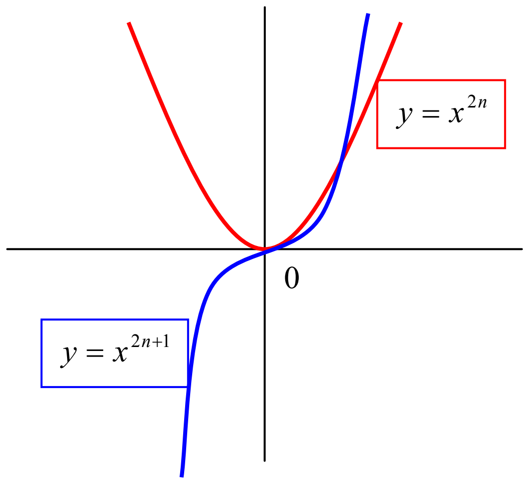


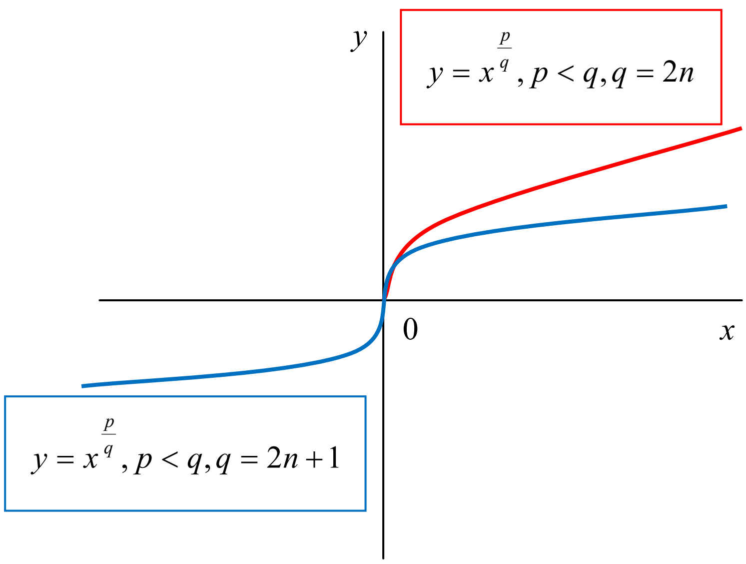
3) ***Mocninná funkce***

$y = x^n$

- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ přirozený exponent
- $n \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ celý záporný exponent
- $n \in \mathbb{Q} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+$ racionální exponent



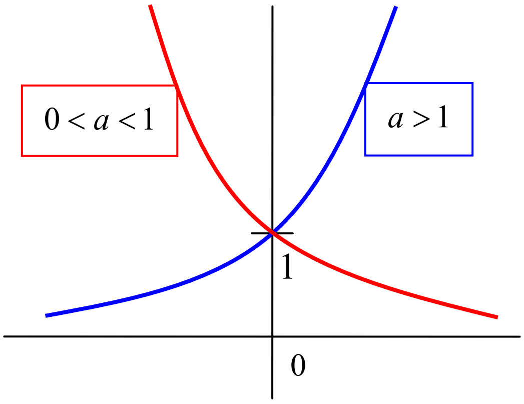




4) ***Exponenciální funkce***

$y = a^x$

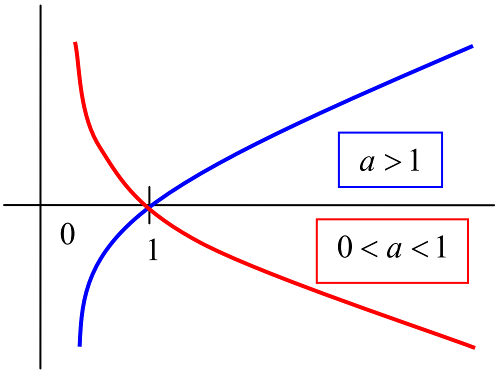
$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}^+$



5) ***Logaritmická funkce***

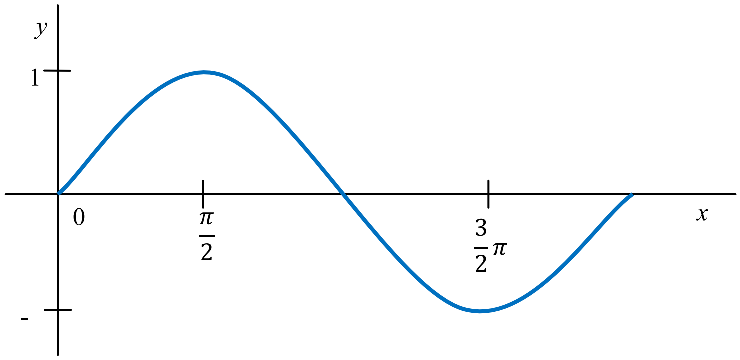
$y = \log_a x$

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, D_f = \mathbb{R}^+, H_f = \mathbb{R}$

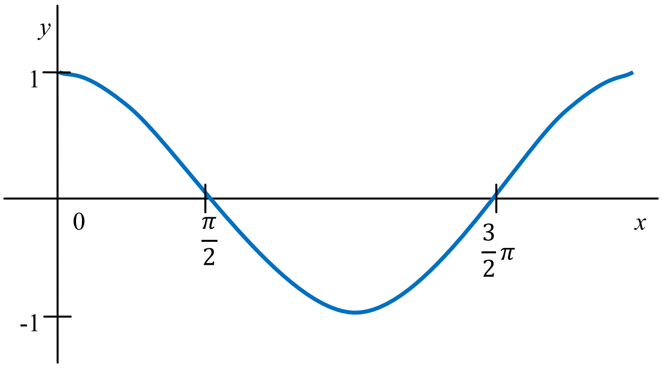


6) ***Goniometrické funkce***

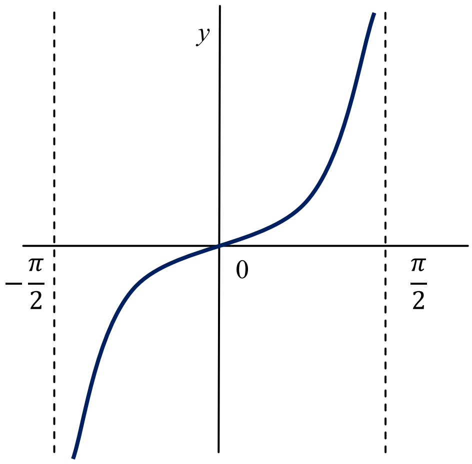
$y = \sin x\,, D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1,1 \rangle$



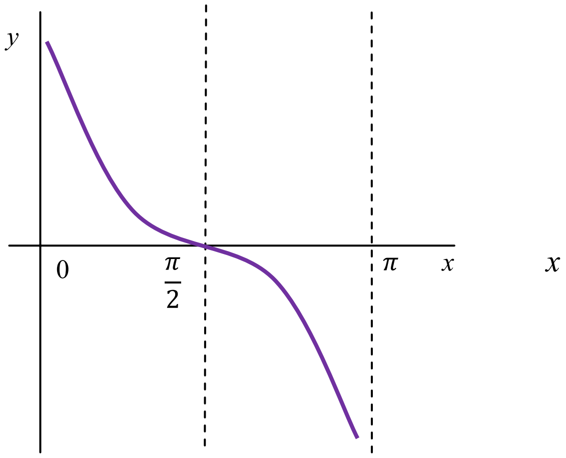
$y = \cos x\,, D_f = \mathbb{R}, H_f = \langle -1,1 \rangle$



$y = \mathrm{tg}\, x\,, D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{1}{2}\pi + k\pi\right\}, H_f = \mathbb{R}$



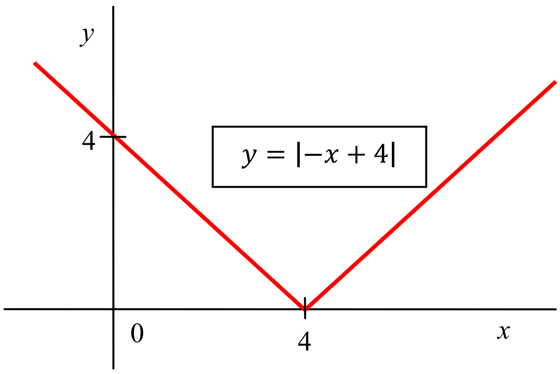
$y = \operatorname{cotg} x\,, D_f = \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}\,, H_f = \mathbb{R}$



7) ***Absolutní hodnota reálného čísla***

$y = |x|$

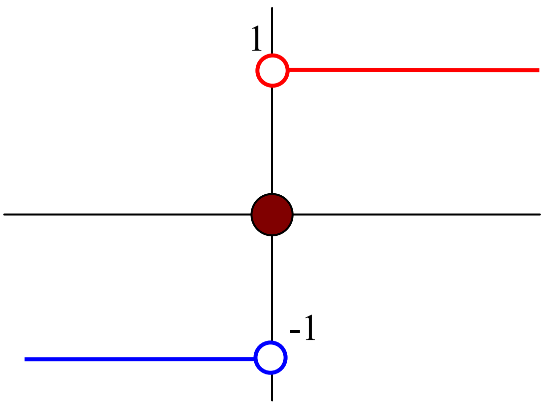
$D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{R}_0^+$



8) ***Signum reálného čísla***

$y = sgn\,x$

$D_f = \mathbb{R}, H_f = \{-1, 0, 1\}$

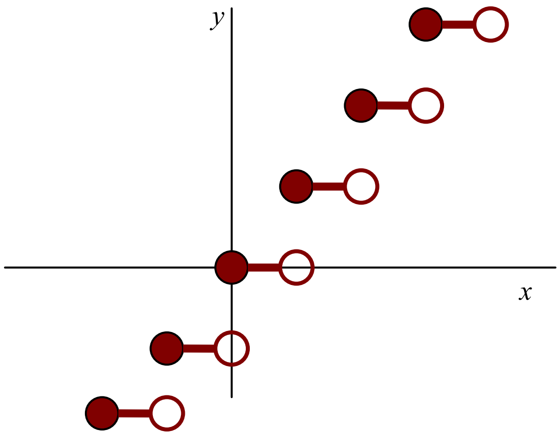


9) ***Celá část reálného čísla***

$y = [x]$ – (intičr)

$D_f = \mathbb{R}, H_f = \mathbb{Z}$

Celá část reálného čísla x je celé číslo n, pro které platí $n \leq x < n + 1$.



Umět načrtnout grafy funkcí

$y = f(x), y = f(-x), y = -f(x), y = |f(x)|, y = f(x - m) + n$

V diferenciálním počtu se často využívá vlastností ***- rovnost funkce a složená funkce.***

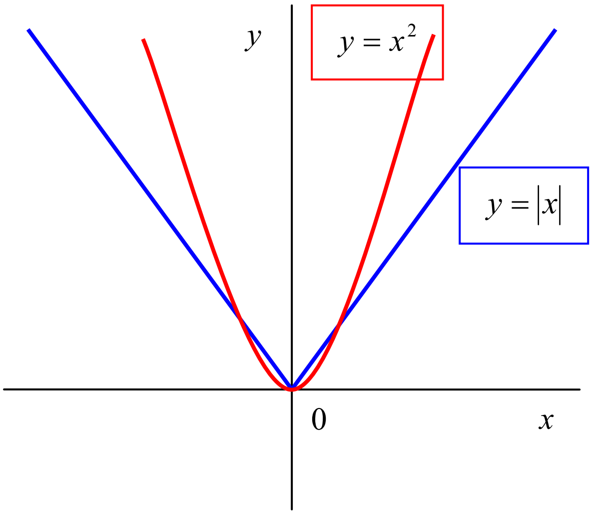
Funkce f, g ***se rovnají na množině*** $M = D_f \cap D_g$***, platí-li pro každé*** $x \in M: f(x) = g(x)$***.***

$f: y = |x|, D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}_0^+$

$g: y = x^2, D(g) = \mathbb{R}, H(g) = \mathbb{R}_0^+$

1) $M = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R}$

2) $H(f) \cap H(g) = \mathbb{R}_0^+$



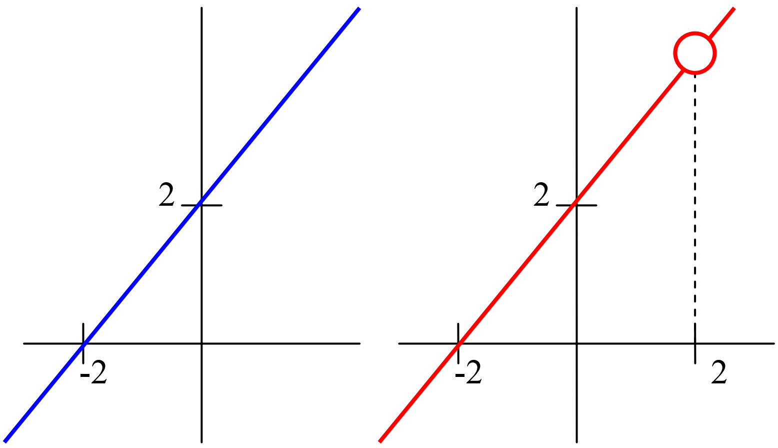
Funkce mají řadu společných vlastností, ale nerovnají se, jak vyplývá z grafu.

$f: y = \frac{x^2 - 4}{x - 2},$

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$y = x + 2,$

$D(g) = \mathbb{R}$



funkce se rovnají na intervalu $M = \mathbb{R} - \{2\}$

Funkce h je složena z funkcí f, g právě když platí: $h = g \circ f$

$D_h = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

$\forall x \in D_h, h(x) = g\big(f(x)\big)$

f – vnitřní funkce, g – vnější funkce.

Operace skládání funkcí není komutativní $h = g \circ f \neq f \circ g$.

Elementární funkce

Varianta A

Určete definiční obor a obor hodnot funkce. Určete, zda je funkce omezená a rozhodněte o monotónnosti funkce.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{15}$

$-x^2 + 2x + 15 = 0$

$-1 \cdot (x-5) \cdot (x+3) = 0$

$y = -(x-1)^2 + 16$

$V = [1;\ 16]$

$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = (-\infty, 16\rangle$

$x \in (-\infty, 1)$

$\forall x_1, x_2 \in D_f$

$x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^2 > {x_2}^2 \Rightarrow -{x_1}^2 < -{x_2}^2 \Rightarrow -{x_1}^2 + 2x_1 < -{x_2}^2 + 2x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -{x_1}^2 + 2x_1 + 15 < -{x_2}^2 + 2x_2 + 15$

$x \in (1, +\infty)$

$\forall x_1, x_2 \in D_f$

$x_1 < x_2 \Rightarrow {x_1}^2 < {x_2}^2 \Rightarrow -{x_1}^2 > -{x_2}^2 \Rightarrow -{x_1}^2 + 2x_1 > -{x_2}^2 + 2x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -{x_1}^2 + 2x_1 + 15 > -{x_2}^2 + 2x_2 + 15$

Výsledek řešení:

$D_f = \mathbb{R}$, $H_f = (-\infty, 16\rangle$

Funkce je omezená shora číslem 16, není omezená zdola.

Je rostoucí v intervalu $(-\infty, 1)$, klesající v intervalu $(1, +\infty)$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete definiční obor a obor hodnot funkce. Určete, zda je funkce omezená a rozhodněte o monotónnosti funkce.

$\boldsymbol{f: y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}}$

[$D_f = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 4, +\infty)$; $H_f = \langle 0, +\infty)$; omezená zdola číslem 0, shora omezená není, rostoucí v$\langle 4, +\infty)$, klesající v$(-\infty, -2\rangle$]

2) Určete definiční obor a obor hodnot funkce. Určete, zda je funkce omezená a rozhodněte o monotónnosti funkce.

$\boldsymbol{f: y = \dfrac{2x - 4}{x + 3}}$

[$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$; $H_f = \mathbb{R} - \{2\}$; v intervalu $(-\infty, -3)$ omezená zdola číslem 2, v intervalu $(-3, +\infty)$ omezená shora číslem 2, rostoucí v$(-\infty, -3)$ a$(-3, +\infty)$]

3) Určete definiční obor a obor hodnot funkce. Určete, zda je funkce omezená a rozhodněte o monotónnosti funkce.

$\boldsymbol{f: y = 2\log_5(x - 2) + 2}$

[$D_f = (2, +\infty)$; $H_f = \mathbb{R}$; není omezená, rostoucí v$(2, +\infty)$]

4) Určete definiční obor a obor hodnot funkce. Určete, zda je funkce omezená a rozhodněte o monotónnosti funkce.

$\boldsymbol{f: y = 5^{x+4} - 1}$

[$D_f = \mathbb{R}$; $H_f = (-1, +\infty)$; je omezená zdola číslem -1, shora omezená není, rostoucí na D_f]

Elementární funkce

Varianta B

Určete definiční obor a obor hodnot funkcí *f, g* a najděte funkce složené $h = f \circ g$ a $k = g \circ h$ a určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$\boldsymbol{f: y = x - 2}$

$\boldsymbol{g: y = cos\,3x}$

Výsledek řešení:

$h = f \circ g = \cos 3x - 2$

$k = g \circ h = \cos 3(x - 2)$

$D_f = \mathbb{R};\ H_f = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R};\ H_g = \langle -3; 3 \rangle$

$D_h = \mathbb{R};\ H_f = \langle -5; 1 \rangle$

$D_k = \mathbb{R};\ H_k = \langle -3; 3 \rangle$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete definiční obor a obor hodnot funkcí *f, g* a najděte funkce složené $h = f \circ g$ a $k = g \circ h$ a určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$\boldsymbol{f: y = x - 5}$

$\boldsymbol{g: y = ln(x + 1)}$

[$\mathrm{h = ln(x+1) - 5; k{:}\, y = ln(x-4)};\ \mathrm{D_f = \mathbb{R};\ H_f = \mathbb{R};\ D_g = (-1;\ +\infty);\ H_g = \mathbb{R};\ D_h = (-1;\ +\infty);\ H_h = \mathbb{R};\ D_k = (4;\ +\infty);\ H_h = \mathbb{R}}$]

2) Určete definiční obor a obor hodnot funkcí *f, g* a najděte funkce složené $h = f \circ g$ a $k = g \circ h$ a určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$\boldsymbol{f: y = \sqrt{x+5}}$

$\boldsymbol{g: y = \log(x-2)}$

[$\mathrm{h} = \sqrt{\log(\mathrm{x}-2)+5}$; $\mathrm{k: y} = \log\left(\sqrt{\mathrm{x}+5}-2\right)$; $\mathrm{D_f} = \langle -5; +\infty)$; $\mathrm{H_f} = \langle 0; +\infty)$; $\mathrm{D_g} = (2;\ +\infty)$; $\mathrm{H_g} = \mathbb{R}$; $\mathrm{D_h} = (2;\ +\infty)$; $\mathrm{H_h} = \langle 0; +\infty)$; $\mathrm{D_k} = (-1;\ +\infty)$; $\mathrm{H_h} = \mathbb{R}$]

3) Určete definiční obor a obor hodnot funkcí *f, g* a najděte funkce složené $h = f \circ g$ a $k = g \circ h$ a určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$\boldsymbol{f: y = |x|}$

$\boldsymbol{g: y = 2^{x-2} - 4}$

[$\mathrm{h} = |2^{\mathrm{x}-2} - 4|$$\mathrm{k: y} = 2^{|\mathrm{x}|-2} - 4$; $\mathrm{D_f} = \mathbb{R}$; $\mathrm{H_f} = \langle 0; +\infty)$; $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}$; $\mathrm{H_g} = (-4;\ +\infty)$; $\mathrm{D_h} = \mathbb{R}$; $\mathrm{H_h} = \langle 0; +\infty)$; $\mathrm{D_k} = \mathbb{R}$; $\mathrm{H_h} = \langle -3{,}5; +\infty)$]

4) Určete definiční obor a obor hodnot funkcí *f, g* a najděte funkce složené $h = f \circ g$ a $k = g \circ h$ a určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$\boldsymbol{f: y = |x+2|}$

$\boldsymbol{g: y = \log_{\frac{1}{4}}(x+1)}$

[$\mathrm{h} = \left|\log_{\frac{1}{4}}(\mathrm{x}+1) + 2\right|$$\mathrm{k: y} = \log_{\frac{1}{4}}(|\mathrm{x}+2|+1)$; $\mathrm{D_f} = \mathbb{R}$; $\mathrm{H_f} = \langle 0; +\infty)$; $\mathrm{D_g} = (-1;\ +\infty)$; $\mathrm{H_g} = \mathbb{R}$; $\mathrm{D_h} = (-1;\ +\infty)$; $\mathrm{H_h} = \mathbb{R}$; $\mathrm{D_k} = \mathbb{R}$; $\mathrm{H_h} = (-\infty; 0\rangle$]

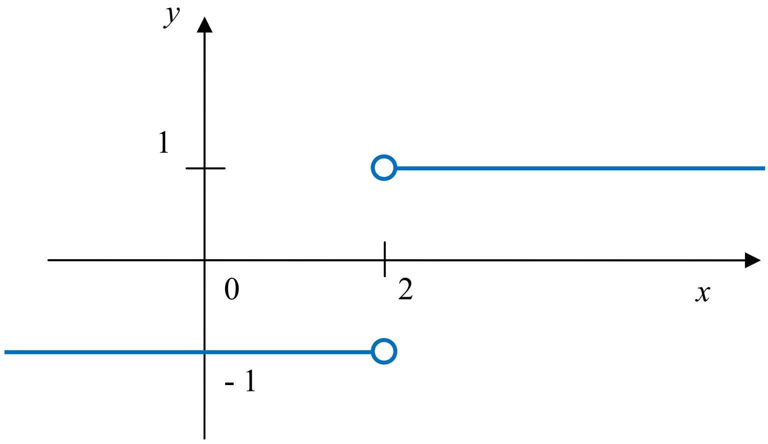
Elementární funkce

Varianta C

Vyšetřete rovnost funkcí:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{|\boldsymbol{x} - \mathbf{2}|}$$

$$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}{\sqrt{(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^{\mathbf{2}}}}$$



Výsledek řešení:

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$D_f = D_g$

$\forall x \in D_f; f(x) = g(x)$

Funkce f a g se rovnají.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

1) Vyšetřete rovnost funkcí:

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x + 3}}$$

$$\boldsymbol{g: y = x^2 - 4}$$

[funkce $f \neq g$; $M = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$, pak $f = g$]

2) Vyšetřete rovnost funkcí:

$$\boldsymbol{f: y = \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}}}$$

$$\boldsymbol{g: y = \sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}}}$$

[funkce $f \neq g$; $D_f = (2, \infty)$; $D_g = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$]

3) Vyšetřete rovnost funkcí:

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 5}{x^2 + 1}}$$

$$\boldsymbol{g: y = x + 5}$$

[funkce $f = g$; $D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}$]

4) Vyšetřete rovnost funkcí:

$$\boldsymbol{f: y = \frac{|x - 9|}{|x - 1|}}$$

$$\boldsymbol{g: y = \left|\frac{x - 9}{x - 1}\right|}$$

[funkce $f = g$; $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$; $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$]

Diferenciální počet

Spojitost funkce

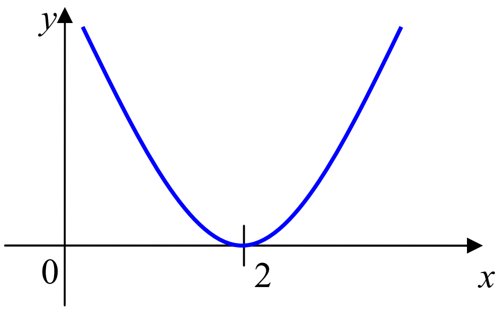
Spojitý *– představa něčeho plynulého, nepřerušovaného. Funkce je spojitá, jestliže její graf můžeme nakreslit jedním tahem.*

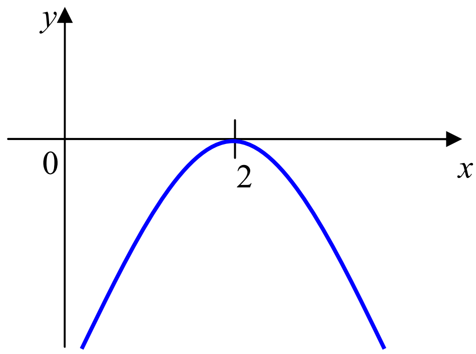
Ale jak určit spojitost funkcí, které nemůžeme načrtnout?

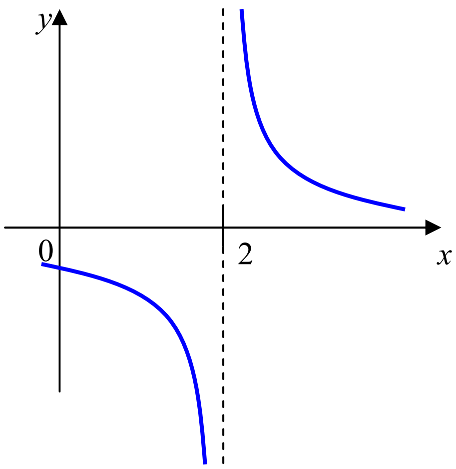
Zkoumání spojitosti funkcí, to je sledování změn funkce v konkrétním bodě, případně v okolí tohoto bodu.

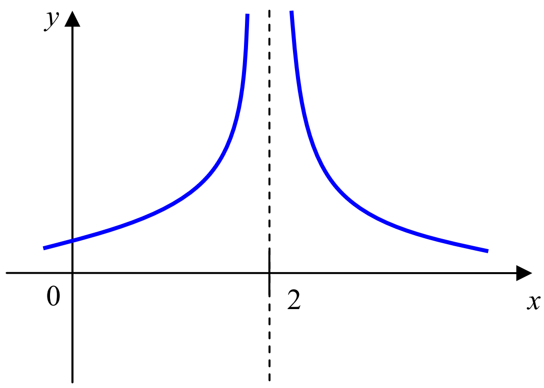
Jak se mění funkční hodnoty funkce ***f (x) blízko*** hodnoty ***f (a), když*** se bude měnit ***x*** velmi málo od bodu ***a?*** Přičemž funkční hodnota funkce v bodě ***a*** může, ale i nemusí existovat.

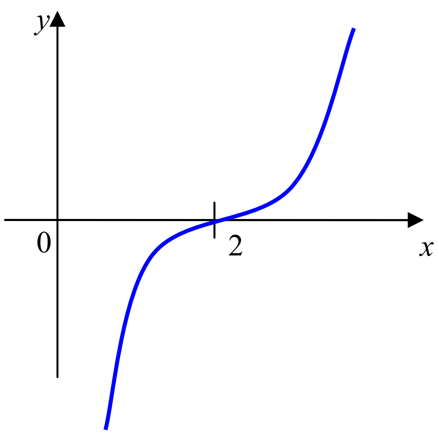
Například na obrázcích jsou grafy jednoduchých funkcí, tyto funkce nabývají odlišných vlastností v bodě 2:

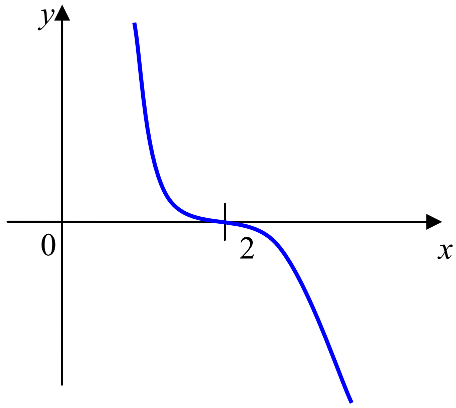


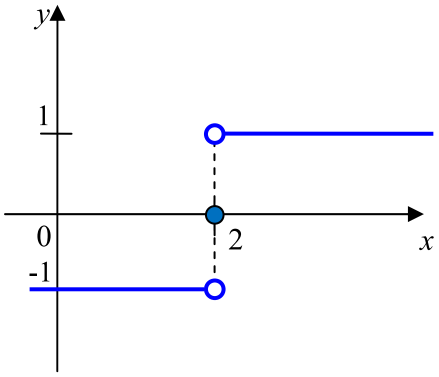


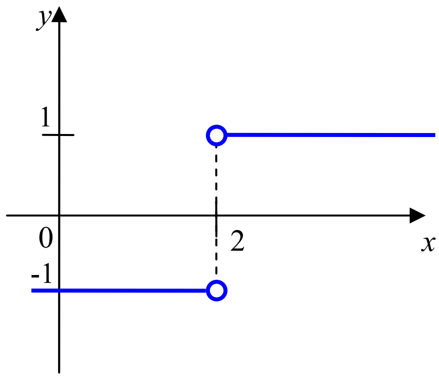






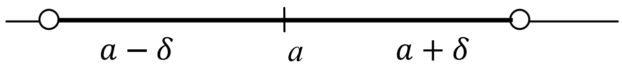






<u>Okolí bodu</u>

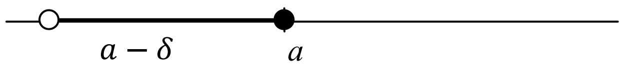
Okolím bodu a *nazýváme otevřený interval* $(a-\delta, a+\delta)$, *kde* δ ***delta*** *je kladné reálné číslo* $(\delta > 0)$. *Číslo* ***a*** *nazýváme* ***střed*** *okolí a číslo* δ ***delta poloměr*** *okolí.*



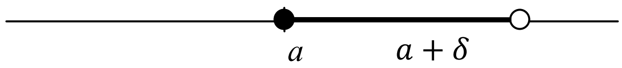
Delta okolí bodu a - $\cup(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$ ***nebo*** $\cup(a) = (a-\delta, a+\delta)$***, jsou všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnostem*** $\cup(a) = (a-\delta < x < a+\delta)$

$|x-a| < \delta \Leftrightarrow 0 \le |x-a| < \delta$

Levým okolím bodu ***a*** nazýváme polozavřený interval $(a-\delta, a\rangle$, kde delta je kladné reálné číslo. $a-\delta < x \leq a$



Pravým okolím bodu ***a*** nazýváme polozavřený interval $\langle a, a+\delta)$, kde delta je kladné reálné číslo. $a \leq x < a+\delta$

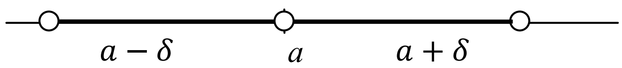


<u>Prstencové okolí bodu a (redukované okolí)</u>

Množina $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, dostaneme ***vyjmutím bodu a*** z okolí bodu ***a***.

$\mathrm{U}(a,\delta) - \{a\}$

$0 < |x-a| < \delta$. (z levého okolí i pravého okolí vyjmeme bod *a*).



<u>Přírůstek argumentu a přírůstek funkce</u>

$f\colon y = f(x)$

proměnná x se nazývá argument funkce

y je funkcí argumentu x.

Nechť funkce *f* je definována v nějakém okolí $\mathrm{U}(a)$ bodu *a*, nechť $x \in \mathrm{U}(a)$.

Rozdíl $(x-a)$ nazýváme ***přírůstek argumentu*** v bodě *a*, označujeme $\Delta x = x - a$.

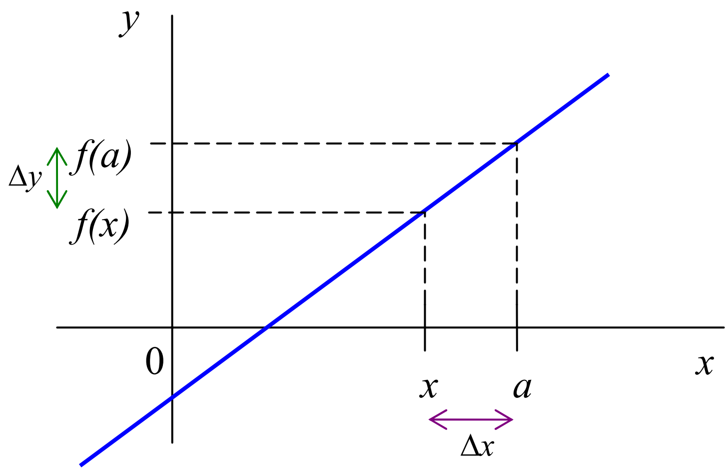
$x > a \Rightarrow \Delta x = x - a > 0$

$x < a \Rightarrow \Delta x = x - a < 0$

Nechť funkce *f* je definována v nějakém okolí $\mathrm{U}(a)$ bodu *a*, nechť $x \in \mathrm{U}(a)$.

Rozdíl $f(x) - f(a)$ nazýváme ***přírůstek funkce*** v bodě *a* odpovídající přírůstku $\Delta x = x - a$ argumentu a označujeme $\Delta y = f(x) - f(a)$.

$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$


y
f(a)
Δy
f(x)
0
x
a
x
Δx

Spojitost funkce

Varianta A

Načrtněte graf funkce a rozhodněte, zda je funkce spojitá, nebo nespojitá.

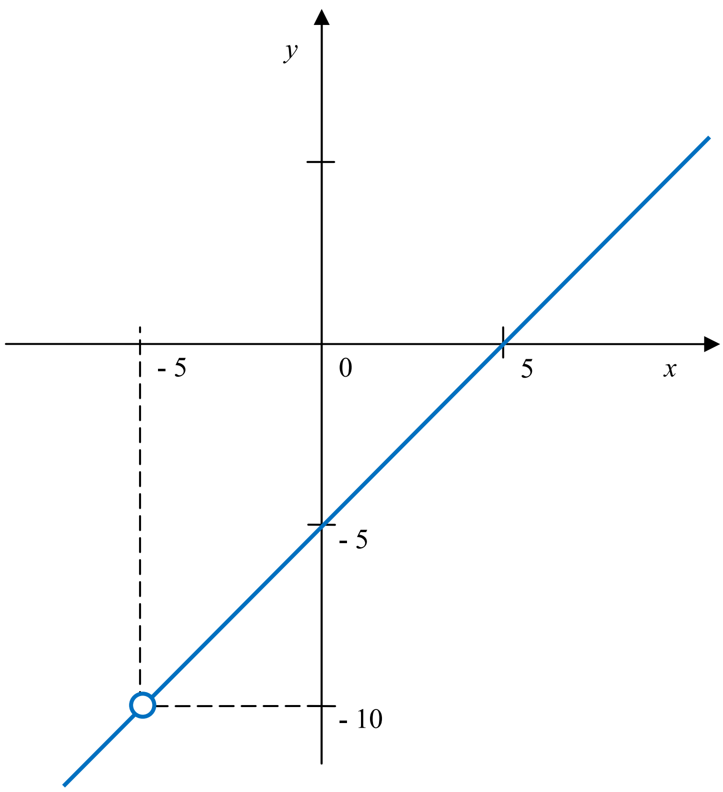
$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x^2 - 25}}{\boldsymbol{x + 5}}$$

$x + 5 \neq 0$

$x \neq -5$

$D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$

$H_f = \mathbb{R} - \{-10\}$



Výsledek řešení:

$D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$; $H_f = \mathbb{R} - \{-10\}$

Funkce není spojitá.

***Příklad*:**

Varianta A

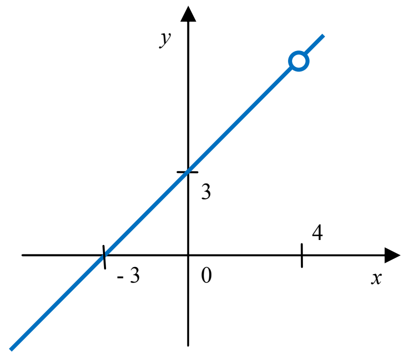
Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Načrtněte graf funkce a rozhodněte, zda je funkce spojitá, nebo nespojitá.

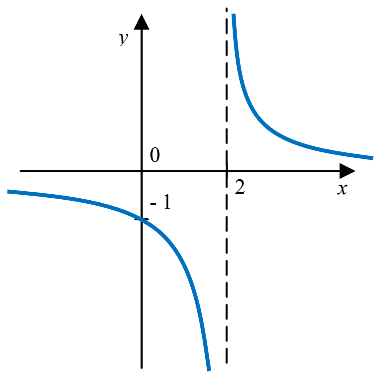
$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}}$$



$[D_f = \mathbb{R} - \{4\};\ H_f = \mathbb{R} - \{7\};$ Funkce není spojitá$]$

2) Načrtněte graf funkce a rozhodněte, zda je funkce spojitá, nebo nespojitá.

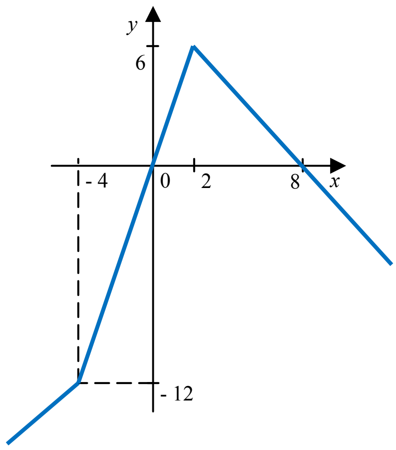
$$\boldsymbol{f: y = \frac{2}{x - 2}}$$



$[D_f = \mathbb{R} - \{2\};\ H_f = \mathbb{R} - \{0\};$ Funkce není spojitá$]$

3) Načrtněte graf funkce a rozhodněte, zda je funkce spojitá, nebo nespojitá.

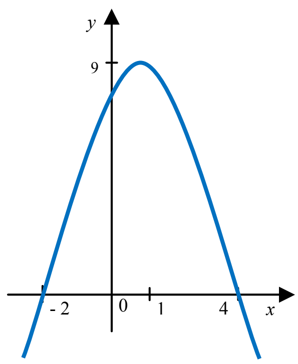
$\boldsymbol{f: y = |x+4| - 2|x-2|}$



$[D_f = \mathbb{R};\ H_f = \langle 6, +\infty);$ Funkce je spojitá]

4) Načrtněte graf funkce a rozhodněte, zda je funkce spojitá, nebo nespojitá.

$\boldsymbol{f: y = -x^2 + 2x + 8}$



$[D_f = \mathbb{R}; H_f = \mathbb{R};$ Funkce je spojitá]

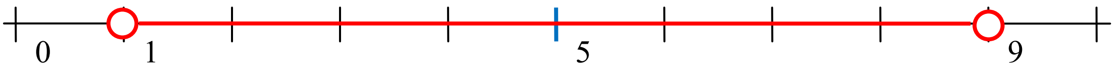
Spojitost funkce

Varianta B

Pomocí definice okolí bodu, vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}|<4$

Hledáme taková x, pro která bude platit, že vzdálenost od bodu 5 na číselné ose musí být menší než 4.



Výsledek řešení:

$x \in (1,9) \Rightarrow a = 5, \delta = 4$

Řešením je každý bod intervalu $(1,9)$. Interval $(1,9)$ považujeme za okolí bodu 5 s poloměrem $\delta = 4$, jeho středem je číslo 5.

$\mathrm{U}(a,\delta) = \mathrm{U}(5,4)$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí definice okolí bodu, vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$|\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|<3$ $[x \in (-1,5) \Rightarrow \mathrm{U}(a,\delta) = \mathrm{U}(2,3)]$

2) Pomocí definice okolí bodu, vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$|\boldsymbol{x}+\mathbf{8}|<2$ $[x \in (-10,-6) \Rightarrow \mathrm{U}(a,\delta) = \mathrm{U}(-8,2)]$

3) Pomocí definice okolí bodu, vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$\mathbf{0}<|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|<3$ $[x \in (-2,1) \cup (1,4) \Rightarrow \mathrm{U}(a,\delta) - \{a\} = \mathrm{U}(-2,1) \cup (1,4)]$

4) Pomocí definice okolí bodu, vyřešte v $\mathbb{R}$ rovnici:

$\mathbf{0}<|\boldsymbol{x}-\mathbf{7}|<1$ $[x \in (6,7) \cup (7,8) \Rightarrow \mathrm{U}(a,\delta) - \{a\} = \mathrm{U}(6,7) \cup (7,8)]$

Spojitost funkce

Varianta C

Vyjádřete přírůstek funkce $\boldsymbol{y = (x+1)^2 - 2}$, a určete jeho hodnotu pro $a = 2$, je-li $\boldsymbol{\Delta x = 0,1}$.

Výsledek řešení:

$y = (x+1)^2 - 2$

$\Delta y = f(x) - f(a) = (x+1)^2 - 2 - [(a+1)^2 - 2] = x^2 + 2x + 1 - a^2 - 2a - 1 + 2$

$\Delta y = f(x) - f(a) = x^2 + 2x - a^2 - 2a = x^2 - a^2 + 2(x-a)$

$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x$

$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = (a+\Delta x)^2 - a^2 + 2(a + \Delta x - a)$

$\Delta y = a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 - a^2 + 2\Delta x = \Delta x^2 + 2a\Delta x + 2\Delta x$

$\Delta y = \Delta x^2 + 2a\Delta x + 2\Delta x = 0{,}1^2 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}61$

Hodnota přírůstku funkce pro pro $a = 2$, a $\Delta x = 0{,}1$ je $\Delta y = 0{,}61$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vyjádřete přírůstek funkce $\boldsymbol{y = x^2 + 5x - 2}$, a určete jeho hodnotu pro $a = 1$, je-li $\boldsymbol{\Delta x = 0,12}$. [$\Delta y = x^2 - a^2 + 5(x-a)$; $\Delta y = 0{,}8544$]

2) Vyjádřete přírůstek funkce $\boldsymbol{y = x^2 - 2x - 4}$, a určete jeho hodnotu pro $a = 2$, je-li $\boldsymbol{\Delta x = 0,01}$. [$\Delta y = x^2 - a^2 + 2(x-a)$; $\Delta y = 0{,}0201$]

3) Vyjádřete přírůstek funkce a určete jeho hodnotu pro $a = 1$, je-li $\Delta\boldsymbol{x} = \mathbf{0,2}$.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{4}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}$$

$[\Delta y = \frac{2\cdot(x-a)}{(x-2)\cdot(a-2)};\ \Delta y = \frac{1}{2}]$

4) Vyjádřete přírůstek funkce a určete jeho hodnotu pro $a = 1$, je-li $\Delta\boldsymbol{x} = \mathbf{0,2}$.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{4}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{2}}$$

$[\Delta y = \frac{2\cdot(x-a)}{(x-2)\cdot(a-2)};\ \Delta y = \frac{1}{2}]$

Diferenciální počet

Spojitost funkce v bodě

Funkce ***f*** je spojitá v bodě ***a,*** jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu ***f(a)*** existuje takové okolí bodu ***a***, že pro všechna ***x*** z tohoto okolí bodu ***a*** patří hodnoty ***f(x)*** do zvoleného okolí bodu ***f(a).***

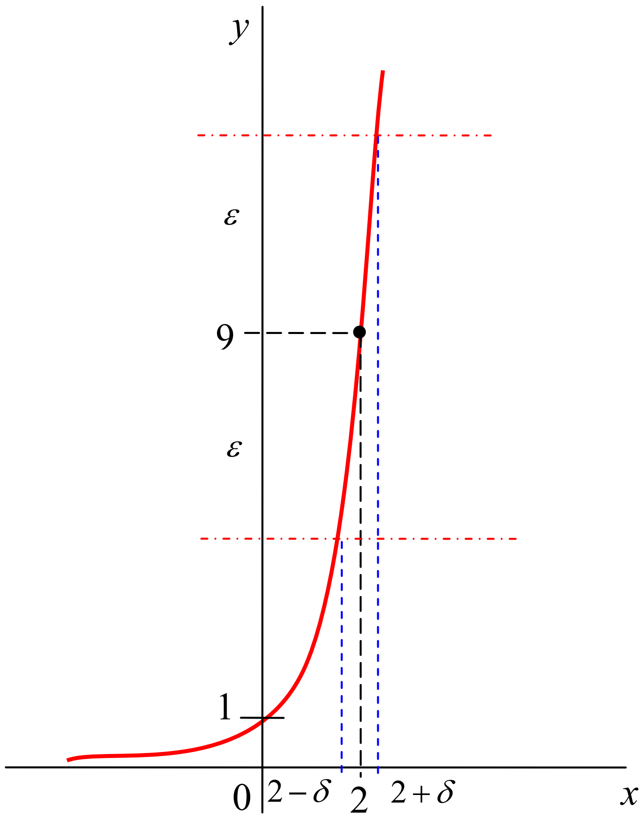
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{U}(a, \delta), f(x) \in \mathrm{U}(f(a), \varepsilon) \Leftrightarrow |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Úloha 1:

Exponenciální funkce $y = 3^x$*, která je definována v okolí bodu* $a = 2$*.*

Sledujeme hodnoty x okolo bodu 2, a funkční hodnoty okolo bodu 9.

Když se bod x blíží k bodu 2, blíží se hodnoty funkce f (x) k hodnotě 9. Tzn., že funkce f je spojitá v bodě 2. Ať zvolíme jakkoliv malé ε *okolí bodu 9 na ose y, vždy se podaří najít takové* δ *okolí bodu 2 na ose x, tak* $x \in \mathrm{U}(2, \delta), f(x) \in \mathrm{U}(9, \varepsilon)$.



Jestliže je funkce spojitá v bodě a, musí být definována nejen v bodě a, ale i v jistém okolí bodu a.

- Funkce $f: y = c, c \in \mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě.
- Funkce $f: y = x$ je spojitá v každém bodě.
- Funkce $f: y = \sin x$ je spojitá v každém bodě.
- Funkce $f: y = a^x, g: y = \log_a x$ jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.
- Funkce $f: y = \sqrt[n]{x}$ je pro *n* liché spojitá v $\mathbb{R}$ a pro *n* sudé je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

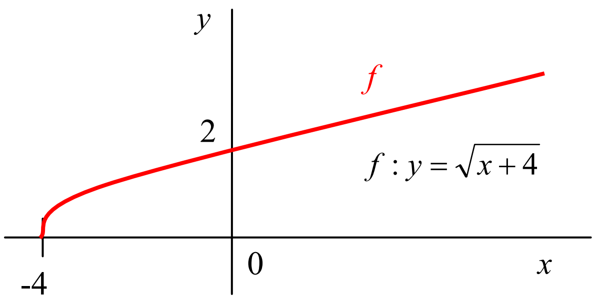
Jsou-li funkce *f, g* ***spojité v bodě*** *a****, pak je také spojitou funkcí v bodě*** *a* ***jejich součet*** *f + g****, rozdíl*** *f - g****, součin*** *f . g* ***a podíl*** *f / g****.***

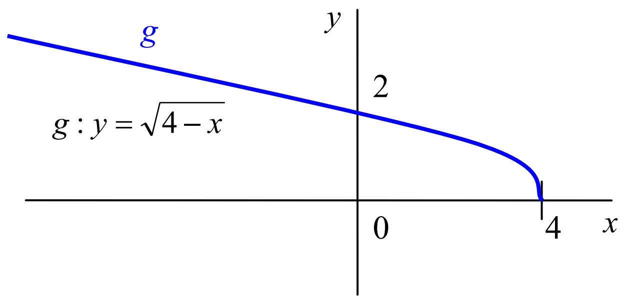
Spojitost funkce v intervalu

Funkce ***f*** je v bodě ***a spojitá zprava***, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pro všechna ***x*** z intervalu $\langle a, a + \delta)$.

Funkce ***f*** je v bodě ***a spojitá zleva***, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ je splněna pro všechna ***x*** z intervalu $(a - \delta, a\rangle$.

Příklad: *Tyto funkce nejsou spojité v bodě -4, 4, ale jsou jednostranně spojité.*





- ***Funkce f je spojitá v bodě a, právě když je v tomto bodě spojitá zprava i zleva.***
- Funkce je spojitá v otevřeném intervalu (a, b), je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.
- Funkce je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li spojitá v (a, b), a v bodě ***a*** je spojitá zprava a v bodě ***b*** je spojitá zleva.

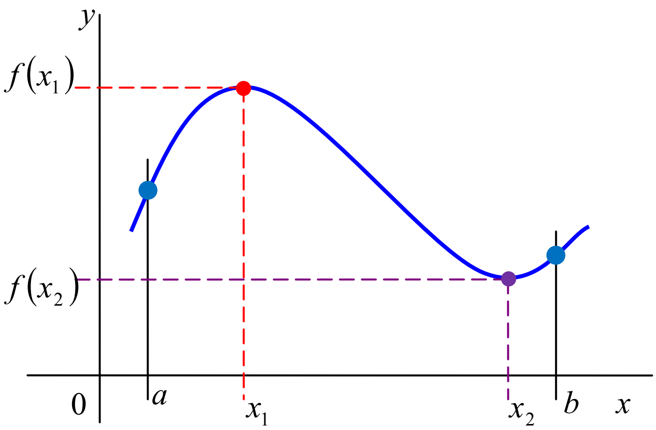
Funkce $f: y = a^x$ *a* $f: y = log_a x$ *jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.*

Funkce $f: y = \sqrt[n]{x}, n \in N$ *je pro **n** liché spojitá v* $\mathbb{R}$ *a pro **n** sudé je spojitá v intervalu* $\langle 0, \infty)$.

Věta Weierstrassova.

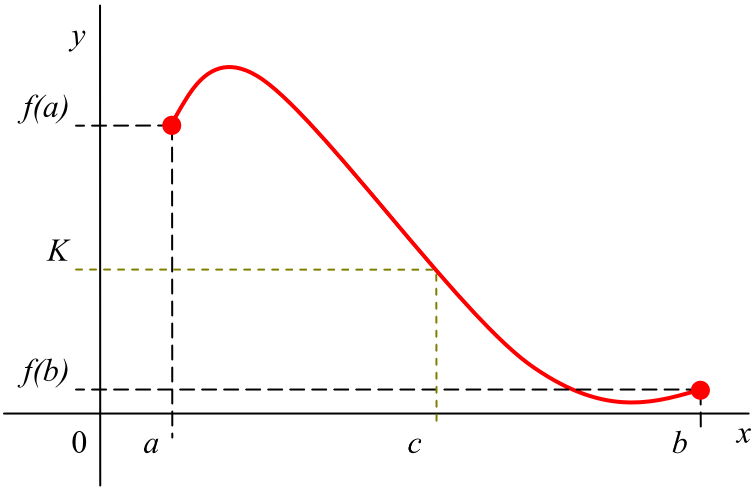
Je-li funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje alespoň jeden takový bod $x_1 \in \langle a, b\rangle$, že $\forall x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leq f(x_1)$, a alespoň jeden takový bod $x_2 \in \langle a, b\rangle$, že $\forall x \in \langle a, b\rangle$platí $f(x) \geq f(x_1)$.

Funkce spojitá v uzavřeném intervalu nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě **maxima** a alespoň v jednom bodě **minima**.
Funkce je omezená v tomto intervalu.



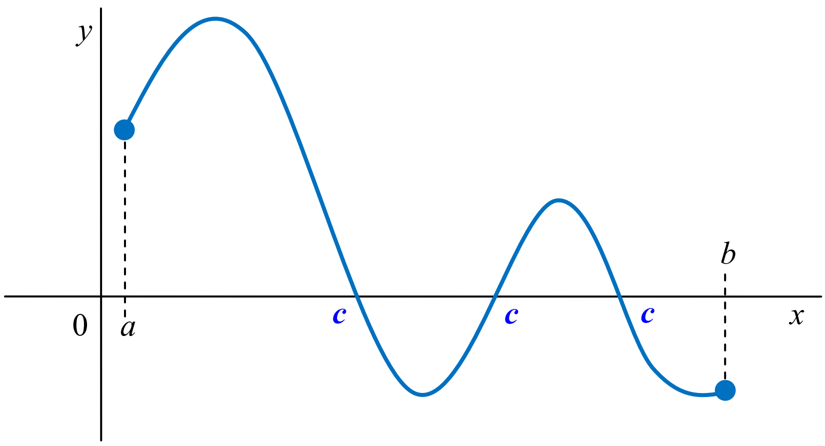
Věta Bolzanova – Weierstrassova.

Je-li funkce ***f*** spojitá v $\langle a, b\rangle$ a $f(a) \neq f(b)$, potom ke každému číslu *K*, které leží mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$, existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, že $f(c) = K$.



(Darbouxova vlastnost)

Je-li funkce ***f*** spojitá v $\langle a, b\rangle$ a mají-li čísla $f(a)$ a $f(b)$, různá znaménka, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$ potom existuje alespoň jeden takový bod $c \in (a, b)$, v němž platí $f(c) = 0$.



*V okolí bodu **c** tedy mění hodnoty funkce **f** znaménko + na – nebo znaménko – na +.*

*Nejdříve určíme body **c**, pro které je $f(x) = 0$ pak zkoumáme znaménka hodnot dané funkce.*

Spojitost funkce v intervalu

Varianta A

Ukaž, že rovnice $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ má kořen v intervalu $(0, 2)$.

Výsledek řešení:

Využíváme Darbouxovy vlastnosti:

I) Funkce je spojitá v intervalu $\langle 0,2 \rangle$.

II) Pro funkci platí:

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 3 = 3$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 + 3 = -3$

$f(0) \cdot f(2) < 0$

III)

Jsou splněny všechny předpoklady, proto existuje $c \in (0,2)$, takové, že $f(c) = 0$. (c je kořen rovnice)

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Ukaž, že rovnice $x^3 + 2x^2 - 13x + 10 = 0$ má kořen v intervalu $(-6, -4)$.

2) Ukaž, že rovnice $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ má kořen v intervalu $(1, 3)$.

3) Ukaž, že rovnice $\frac{2}{x-3} + 1 = 0$ má kořen v intervalu $(0, 2)$.

4) Ukaž, že rovnice $2 - \frac{1}{x-1} = 0$ má kořen v intervalu $(1, 2)$.

Spojitost funkce v intervalu

Varianta B

V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Výsledek řešení:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$(x-3) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \geq 0$

$c_1 = 3;\ c_2 = 1;\ c_3 = -2$

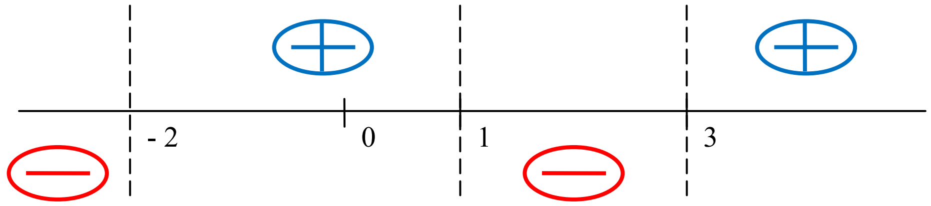
$(-\infty, -2) \Rightarrow f(-10) = -144 < 0$

$(-2, 1) \Rightarrow f(0) = 6 > 0$

$(1, 3) \Rightarrow f(2) = -4 < 0$

$(3, +\infty) \Rightarrow f(5) = 56 > 0$

$K = \langle -2, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty)$



***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$.

$[K = (-\infty, -3) \cup (-1, 2)]$

2) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 > 0$.

$[K = (-4, -2) \cup (2, +\infty)]$

3) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x^2 - 3x}{x + 4} \geq 0$$

$[K = (-4, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty)]$

4) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{2x - x^2}{x - 4} \geq 0$$

$[K = \langle 0, 4) \cup \langle 8, +\infty)]]$

Spojitost funkce v intervalu

Varianta C

V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} > 0$$

Výsledek řešení:

$$\frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} > 0$$

$$\frac{x \cdot (x^2 + 4)}{x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)} > 0$$

$$\{[x \cdot (x^2 + 4) > 0] \land [x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) > 0]\}$$

Nebo

$$\{[x \cdot (x^2 + 4) < 0] \land [x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) < 0]\}$$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2$

$$K = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Řešení můžeme efektivně nalézt pomocí tabulky, kde vyjádříme znaménko funkce v daném intervalu.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	-	-	+	+
$(x^2 + 4)$	+	+	+	+
x	-	-	+	+
$(x - 2)$	-	-	-	+
$(x + 2)$	-	+	+	+

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{x^3 - x} > 0$$

$$\left[K = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \cup (3, +\infty)\right]$$

2) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x^3 - x} < 0$$

$$\left[K = \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3},\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right)\right]$$

3) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$x \cdot 2^{x+2} \geq 2x$ $\qquad [K = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty)]$

4) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici

$\sqrt{x^3} \leq \sqrt{x}$ $\qquad [K = \langle 0, 1\rangle]$

Diferenciální počet

Limita funkce v bodě

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L*, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu *L* existuje okolí bodu *a* tak, že pro všechna $x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty *f (x)* zvolenému okolí bodu *L*.

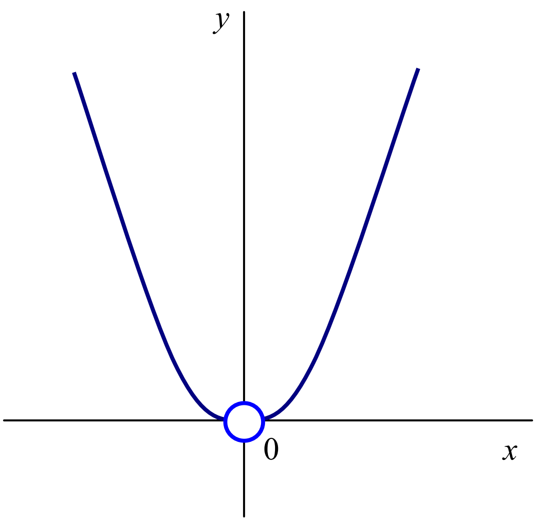
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x$ *platí:* $0 < |x - a| < \delta, |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

- *Nezáleží na tom, zda **f (a)** je či není definováno.*
- *Funkce **f** má v bodě **a** nejvýše jednu limitu.*

Příklad:

Nakreslete graf funkce $f: y = \frac{x^3}{x}, D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.



$$f(-0{,}3) = \frac{x^3}{x} = \frac{(-0{,}3)^3}{-0{,}3} = 0{,}09$$

$$f(-0{,}2) = \frac{x^3}{x} = \frac{(-0{,}2)^3}{-0{,}2} = 0{,}04$$

$$f(-0{,}1) = \frac{x^3}{x} = \frac{(-0{,}1)^3}{-0{,}1} = 0{,}01$$

$$f(0{,}3) = \frac{x^3}{x} = \frac{(0{,}3)^3}{0{,}3} = 0{,}09$$

$$f(0{,}2) = \frac{x^3}{x} = \frac{(0{,}2)^3}{0{,}2} = 0{,}04$$

$$f(0{,}1) = \frac{x^3}{x} = \frac{(0{,}1)^3}{0{,}1} = 0{,}01$$

Když za x budeme dosazovat hodnoty blízké bodu a = 0, pak odpovídající hodnoty f (x) budou blízké hodnotě L = 1.

Zdá se, že se můžeme k hodnotě L = 1 přiblížit libovolně blízko. Ovšem za x nemůžeme dosadit a = 0.

Je to obdobné jako u spojitosti funkce, ale rozdíl je v tom, že f (a) pro a = 0 nemusí být definována. Nezáleží na tom, zda f (a) je či není definována.

Pro čísla x velmi blízká k bodu a = 0 jsou funkční hodnoty f (x) velmi blízko k číslu L = 1.

*Hlavní rozdíl mezi limitou a spojitostí funkce je v okolí bodu **a**. U spojitosti požadujeme, aby funkce byla v bodě **a** definována, u definice limity nezávisí na tom, zda je funkce v bodě **a** definována, či nikoliv. U limity hodnota f (a) nerozhoduje o určení.*
*Pracujeme s okolím bodu **a**, ze kterého je bod **a** vyjmut* $0 < |x - a| < \delta$.

Funkce *f* je spojitá v bodě *a* pravě tehdy, když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

<u>Věta o limitě dvou funkcí:</u>

Jestliže $\forall x \in \mathrm{U}(a, \delta) - \{a\}, x \neq a$ platí, že $f(x) = g(x)$ a současně $lim_{x \to a}\, g(x) = L$, potom má v bodě *a* limitu i funkce *f* a platí $lim_{x \to a}\, f(x) = lim_{x \to a}\, g(x) = L$.

$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (3x - 1)}{x} = \lim_{x \to 0} (3x - 1) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$

$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1) \cdot (x+3)}{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+3)}{(x^2 - x + 1)} = \frac{(-1+3)}{((-1)^2 + 1 + 1)} = \frac{2}{3}$

Počítáme-li $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, *kde P(x), Q(x) jsou polynomické funkce a platí P(a) = 0, Q(a) = 0, potom mají polynomy společného dělitele (x – a).*

$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot R(x)}{(x-a) \cdot S(x)} = \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{S(x)}$

Pokud by opět platilo, že R(a) = 0, S(a) = 0, pak

$\lim_{x \to a} \frac{R(x)}{S(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot T(x)}{(x-a) \cdot U(x)} = \lim_{x \to a} \frac{T(x)}{U(x)}$

Pokud by opět platilo, že R(a) ≠ 0, S(a) = 0, pak řešíme (dozvíme se později).

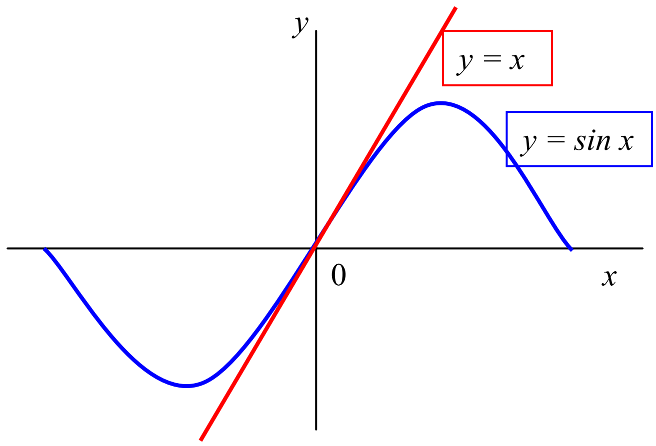
<u>Věta o třech limitách</u>

Jestliže pro všechna** $x \neq a$ **z jistého okolí bodu a platí** $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ **a současně $lim_{x \to a}\, f(x) = lim_{x \to a}\, h(x) = L$, ***potom existuje také limita funkce g v bodě a, platí*** $lim_{x \to a}\, g(x) = L$ **.**

Limita

$lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$lim_{x \to 0} \frac{\sin k x}{kx} = 1$



V blízkosti bodu 0 grafy obou funkcí téměř splývají. Můžeme tedy tvrdit, že pro velmi malé hodnoty x lze psát

$\sin x = x$.

$lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Věty o součtu, rozdílu, součinu a podílu limit.

Jestliže $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A, \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ ***potom platí:***

$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$

$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$

$\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}, \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

Limita funkce v bodě

Varianta A

Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 2} \frac{3x + 2}{x^2 + 2}$$

Výsledek řešení:

Racionální funkce

$$f: y = \frac{3x + 2}{x^2 + 2}$$

Je spojitá v $\mathbb{R}$, proto pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \to a} \frac{3x+2}{x^2+2}$ rovna funkční hodnotě $f(a)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x + 2}{x^2 + 2} = \frac{3 \cdot 2 + 2}{2^2 + 2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$$

[*f*: 9, *g*: $\frac{3}{4}$]

2) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to -1} \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} - 2 \right)$$

[*f*: $\frac{1}{10}$, *g*: 2]

3) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 4}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 5} + 2}{\sqrt{x - 1}}$$

$[f\colon -\frac{1}{6}, g\colon 2 \cdot \sqrt{2}]$

4) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x^2 - x}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 2}{\sqrt{x + 3}}$$

$[f\colon \frac{1}{3}, g\colon \sqrt{5}]$

Limita funkce v bodě

Varianta B

Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f: \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1}}$$

Výsledek řešení:

Racionální funkce

$$f: y = \frac{x^3 - x}{x - 1}$$

Není spojitá v ℝ, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Funkce není v bodě 1 definována, není spojitá v tomto bodě.

Využijeme věty o dvou limitách:

Provedeme úpravu funkce

$$f: y = \frac{x^3 - x}{x - 1} = \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = x^2 + x$$

$g: y = x^2 + x$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}; D_g = \mathbb{R}$

$M = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

$\forall x \in M; f(x) = g(x)$

Funkce $g(x)$ je spojitá v ℝ, proto $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

$\lim_{x \to 1}(x^2 + x) = 1 + 1 = 2$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$f\colon \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$$

$$g\colon \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$$

[*f*: 0, *g*: $\frac{5}{3}$]

2) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$f\colon \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

$$g\colon \lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$$

[*f*: 6, *g*: $-\frac{2}{5}$]

3) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$f\colon \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$$

$$g\colon \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$$

[*f*: $\frac{2}{3}$, *g*: $\frac{1}{6}$]

4) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$f\colon \lim_{x\to 0}\frac{5\sin^2 x}{3x^2}$$

$$g\colon \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$$

[*f*: $\frac{5}{3}$, *g*: 4]

Limita funkce v bodě

Varianta C

Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 1} \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \right)$$

Výsledek řešení:

Racionální funkce

$$f: y = \frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x}$$

Není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} - \{0; -1\}$. Funkce je v bodě 1 definována, je v tomto bodě spojitá.

Využijeme věty o součtu limit:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} + \lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{1+1} + \frac{2 \cdot 1 + 1}{1} = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 1} \left(\frac{\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 6}{\boldsymbol{x} - 1} - \frac{\boldsymbol{x} - 2}{\boldsymbol{x}} \right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 2} \frac{\boldsymbol{x} - 2}{\boldsymbol{x}^2 - 3\boldsymbol{x} + 2} \cdot \sqrt{\boldsymbol{x} + 2}$$

[*f*: -3, *g*: 2]

2) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 3} \left(\frac{\boldsymbol{x}^2 - 9}{\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x} - 3} - \frac{3}{\boldsymbol{x} - 6} \right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to -3} \frac{\boldsymbol{x}^3 + 27}{\boldsymbol{x} + 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6 - \boldsymbol{x}}}$$

[*f*: $\frac{5}{2}$, *g*: 9]

3) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$$

[*f:* $\sqrt{2}$, *g:* 8]

4) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2 x}{x\cdot\sin x}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tgx}-\sin x}{\sin^3 x}$$

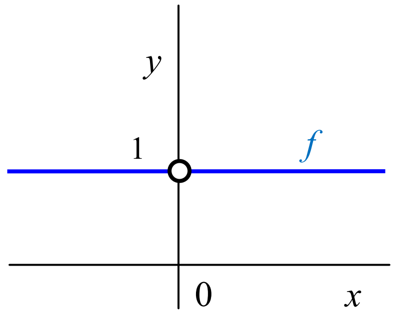
[*f:* 3, *g:* $\frac{1}{2}$]

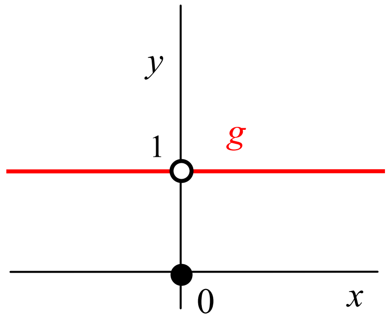
Diferenciální počet

Jednostranné limity funkce v bodě

Jako je funkce spojitá zprava a zleva, může existovat limita zprava a zleva.

Příklad:



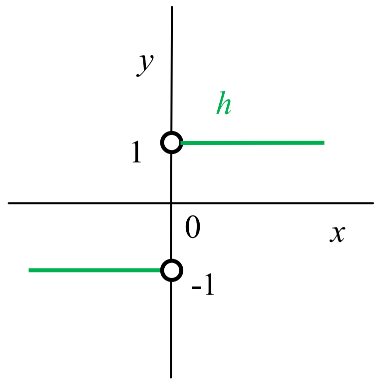


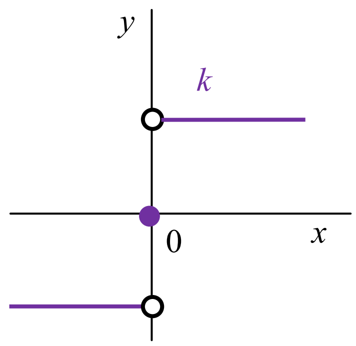
$f: y = \frac{x}{x}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$g: y = |sgnx|$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 1$





$h: y = \frac{|x|}{x}$

$\lim_{x \to 0} h(x) = neexistuje$

$k: y = sgnx$

$\lim_{x \to 0} k(x) = neexistuje$

Pro funkce *h(x), k(x)* limita v bodě 0 neexistuje, ale tyto funkce mají jednostranné limity.

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L* zleva, jestliže ke každému ε - okolí bodu ***L*** existuje levé δ okolí bodu ***a*** tak, že pro všechna $x \neq a$ z levého okolí bodu ***a*** patří funkcí hodnoty ***f(x)*** do ε - okolí bodu ***L***.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \in (a - \delta, a)$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L* zprava, jestliže ke každému ε - okolí bodu ***L*** existuje pravé δ okolí bodu ***a*** tak, že pro všechna $x \neq a$ z pravého okolí bodu ***a*** patří funkcí hodnoty ***f(x)*** do ε - okolí bodu ***L***.

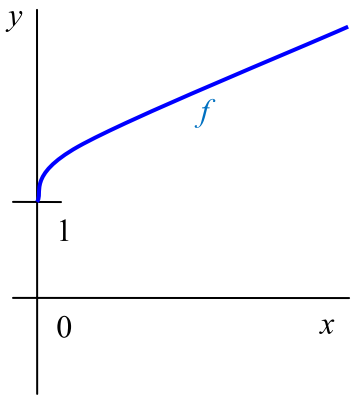
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \in (a, a + \delta)$

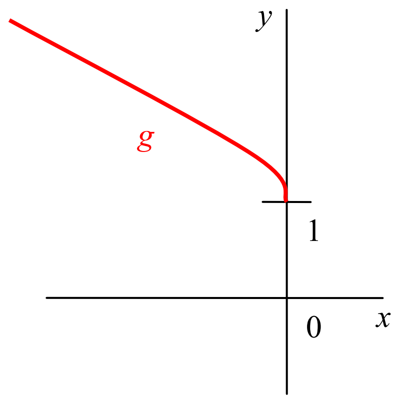
$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limita funkce *f* v bodě *a* existuje, právě když existují v bodě *a* limity zprava a zleva a jsou si rovny. Potom se limita funkce *f* v bodě *a* rovná společné hodnotě limit zprava a zleva.

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Příklady:





$f: y = 1 + \sqrt{x}, D_f = \langle 0, \infty)$

$\lim_{x \to 0^+}\left(1 + \sqrt{x}\right) = 1$

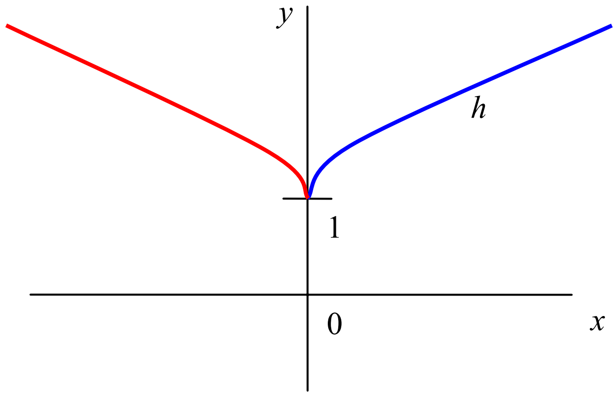
$g: y = 1 + \sqrt{-x}, D_g = (-\infty, 0\rangle$

$\lim_{x \to 0^-}\left(1 + \sqrt{-x}\right) = 1$

$h: y = 1 + \sqrt{|x|}, D_h = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \sqrt{|x|}\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 + \sqrt{|x|}\right) = 1$

$\lim_{x \to 0} \left(1 + \sqrt{|x|}\right) = 1$



Jednostranné limity funkce v bodě

Varianta A

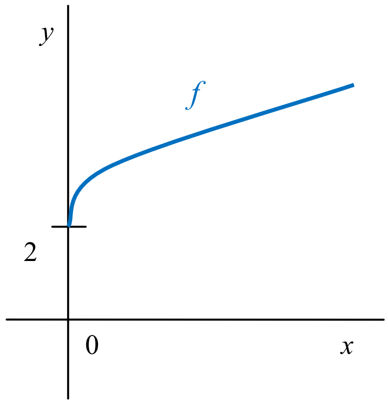
Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to 0} (2 + \sqrt{x})$

Výsledek řešení:

Funkce $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \langle 0, +\infty)$. Limitu této funkce můžeme určit pouze jednostranně (zprava).



$\lim\limits_{x \to 0^+} (2 + \sqrt{x}) = 2$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to 0} (1 + \sqrt{2x})$

$\boldsymbol{g}: \lim\limits_{x \to 1} (1 + \sqrt{x - 1})$

[*f*: 1, *g*: 1]

2) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 0}\left(3 + \sqrt{x}\right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to -1}\left(2 + \sqrt{x+1}\right)$$

[f: 3, g: 2]

3) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x^3}\right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to -1}\left(1 - \sqrt{(x+1)^5}\right)$$

[f: $\frac{1}{2}$, g: 1]

4) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 0}\left(\frac{5}{2} - \sqrt{x^5}\right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 1}\left(2 + \sqrt{(x-1)^3}\right)$$

[f: $\frac{1}{2}$, g: 2]

Jednostranné limity funkce v bodě

Varianta B

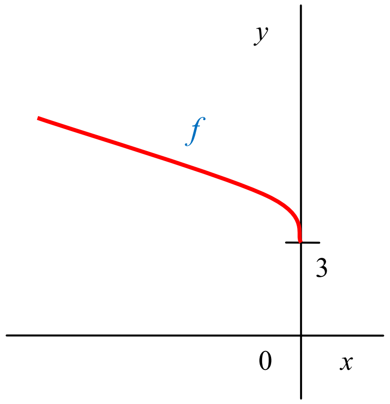
Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x\to 0}(3+\sqrt{-x})$

Výsledek řešení:

Funkce $f(x) = 3 + \sqrt{-x}$

není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = (-\infty, 0\rangle$. Limitu této funkce můžeme určit pouze jednostranně (zleva).



$\lim\limits_{x\to 0^-}(3+\sqrt{-x}) = 3$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x\to 0}(2+\sqrt{-3x})$

$\boldsymbol{g}: \lim\limits_{x\to 1}(1-\sqrt{2-2x})$

[*f*: 2, *g*: 1]

2) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4}+\sqrt{-x}\right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to -3}\left(1+\sqrt{-x-3}\right)$$

[f: $\frac{1}{4}$, g: 1]

3) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{5}+\sqrt{-x^3}\right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to 1}\left(1-\sqrt{-(x-1)^5}\right)$$

[f: $\frac{1}{5}$, g: 1]

4) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{-x^5}-\frac{5}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{-2(x-1)^3}\right)$$

[f: $-\frac{5}{2}$, g: 1]

Jednostranné limity funkce v bodě

Varianta C

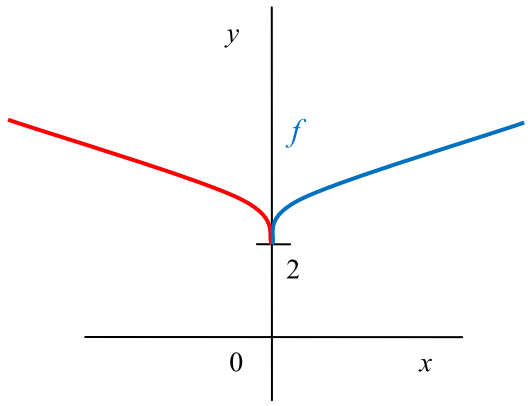
Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 0}\left(2+\sqrt{|x|}\right)$$

Výsledek řešení:

Funkce $f(x) = 2+\sqrt{|x|}$

je spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}$.



$$\lim_{x\to 0^-}\left(2+\sqrt{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(2+\sqrt{|x|}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2+\sqrt{|x|}\right) = 2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{|2-2x|}-2\right)$$

[f: -2,]

2) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to -1}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{|1+x|}\right)$$

[f: $\frac{3}{2}$,]

3) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}\colon \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{|(x-1)^5|}-4\right)$$

[f: -4,]

4) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}\colon \lim_{x\to 3}\left(2-\sqrt{|(x-3)^3|}\right)$$

[f: 2,]

Diferenciální počet

Nevlastní limity funkce v bodě

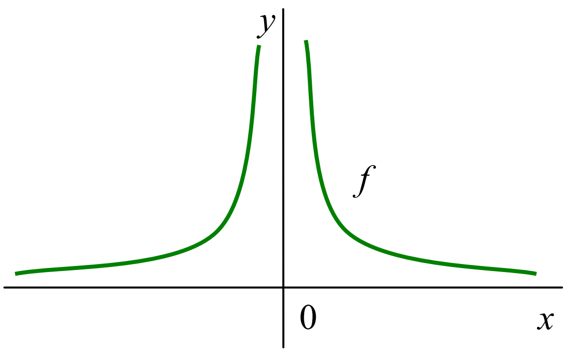
V případě, že funkce má limitu rovnu reálnému číslu, říkáme této limitě limita vlastní. Jestliže, jsou funkční hodnoty v absolutní hodnotě velké, říkáme, že funkce má v bodě a nevlastní limitu.

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$, z okolí $(a - \delta, a + \delta)$ bodu ***a*** je $f(x) > K$.

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta, f(x) > K$

- $f: y = \frac{1}{x^2}, D_f = \mathbb{R} - \{0\}, H_f = \mathbb{R}^+$



Funkční hodnoty funkce rostou nade všechny meze, ať se blížíme k nule zprava, nebo zleva.
Zvolím-li libovolné číslo K, vždy najdeme takové $\delta > 0$*, že pro všechna* $x \in (-\delta, \delta) - \{0\}$ *bude* $\frac{1}{x^2} > K$*. V tomto případě má funkce limitu v nekonečnu.*

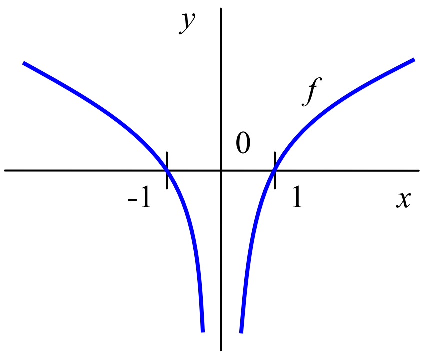
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \neq a$, z okolí $(a-\delta, a+\delta)$ bodu ***a*** je $f(x) < K$.

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta, f(x) < K$

- $f: y = ln|x|$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, H_f = \mathbb{R}$



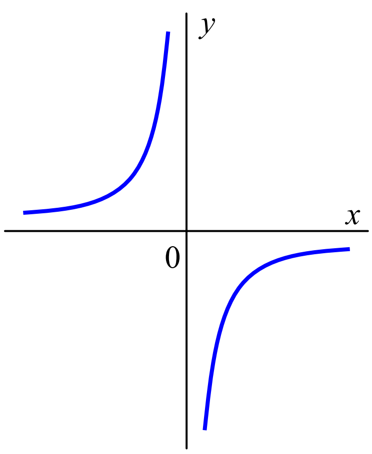
Čím blíže bude x k nule, tím bude větší funkční hodnota, ale záporná. $\lim_{x\to 0} ln|x| = -\infty$

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zleva, jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x) > K$.

$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, x \in (a-\delta, a), f(x) > K$

- $f: y = -\frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, H_f = \mathbb{R} - \{0\}$



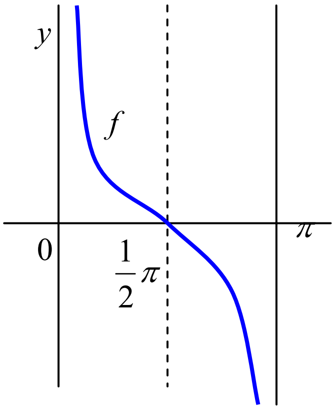
$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$ zleva, jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a-\delta, a)$ je $f(x) < K$.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, x \in (a-\delta, a), f(x) < K$

- $f: y = cotg\, x$, $D_f = \mathbb{R} - \{k \cdot \pi\}, H_f = \mathbb{R}$



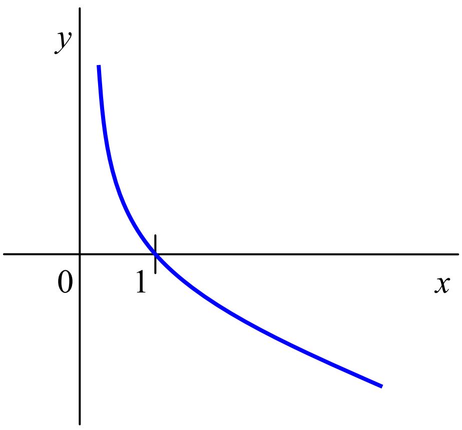
$$\lim_{x \to \pi^-} cotg\, x = -\infty$$

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$ zprava, jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a+\delta,)$ je $f(x) > K$.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, x \in (a, a+\delta,), f(x) > K$

- $f: y = \log_{\frac{1}{2}} x, D_f = (0, \infty), H_f = \mathbb{R}$



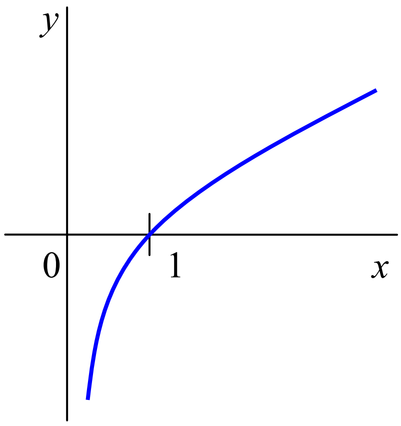
$$\lim_{x \to 0^+} \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) = +\infty$$

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$ zprava, jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ je $f(x) < K$.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, x \in (a, a+\delta), f(x) < K$

- $f: y = \log_4 x, D_f = (0, \infty), H_f = \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to 0^+} (\log_4 x) = -\infty$$

Nevlastní limity funkce v bodě

Varianta A

Vypočtěte limitu funkce:

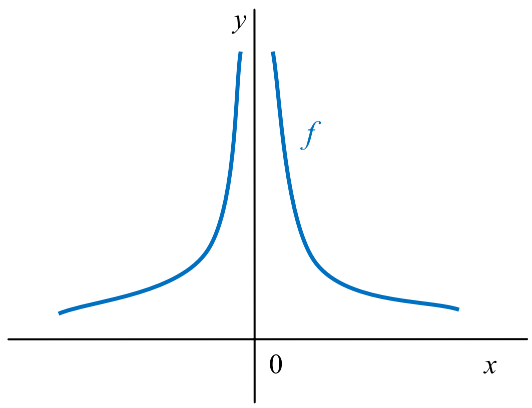
$$\boldsymbol{f}\colon \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2}$$

Výsledek řešení:

Funkce

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Nezáleží, zda se k bodu 0 přibližujeme zleva, či zprava v obou případech rostou funkční hodnoty nade všechny meze.



Zvolíme si $K = 1000$, pak stačí zvolit $\delta = 0{,}01$. Bude platit, že $\forall x \in (-0{,}01; 0) \cup (0; 0{,}01)$ je $\frac{3}{x^2} > 1000$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x^4}$

$\boldsymbol{g}: \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)$

[*f*: $+\infty$,*g*: $+\infty$]

2) Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to 0} \frac{7}{x^2}$

$\boldsymbol{g}: \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^6} + 3\right)$

[*f*: $+\infty$,*g*: $+\infty$]

3) Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^4}$

$\boldsymbol{g}: \lim\limits_{x \to 2} \log_{\frac{1}{2}} |x - 2|$

[*f*: $+\infty$,*g*: $+\infty$]

4) Vypočtěte limitu funkce:

$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^2}$

$\boldsymbol{g}: \lim\limits_{x \to 1} (-\log_2 |x - 1|)$

[*f*: $+\infty$,*g*: $+\infty$]

Nevlastní limity funkce v bodě

Varianta B

Vypočtěte limitu funkce:

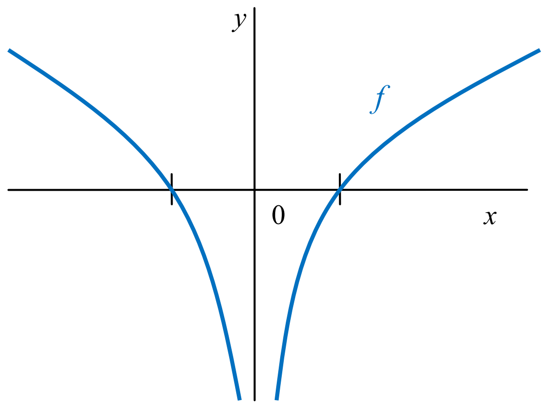
$\boldsymbol{f}: \lim\limits_{x \to 0} \log|x|$

Výsledek řešení:

Funkce

$f(x) = \log|x|$

není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Nezáleží, zda se k bodu 0 přibližujeme zleva, či zprava v obou případech rostou funkční hodnoty nade všechny meze, ale v záporných hodnotách.



Zvolíme si $K = -10$, pak stačí zvolit $\delta = 10^{-11}$.

Bude platit, že $\forall x \in (-10^{-11}; 0) \cup (0; 10^{-11})$ je $\log|x| > -10$

$\lim\limits_{x \to 0} \log|x| = -\infty$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 0} \ln|x|$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 3\right)$$

[f: $-\infty$,g:$-\infty$]

2) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^6} - 2\right)$$

[f: $-\infty$,g:$-\infty$]

3) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 1} \frac{2 - x^2}{(x-1)^2}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to -8} \log_5|x + 8|$$

[f: $-\infty$,g:$-\infty$]

4) Vypočtěte limitu funkce:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to -1} \frac{2x - x^2}{(x+1)^2}$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x \to -3} \left(-\log_{\frac{1}{4}}|x + 3|\right)$$

[f: $-\infty$,g:$-\infty$]

Nevlastní limity funkce v bodě

Varianta C

Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

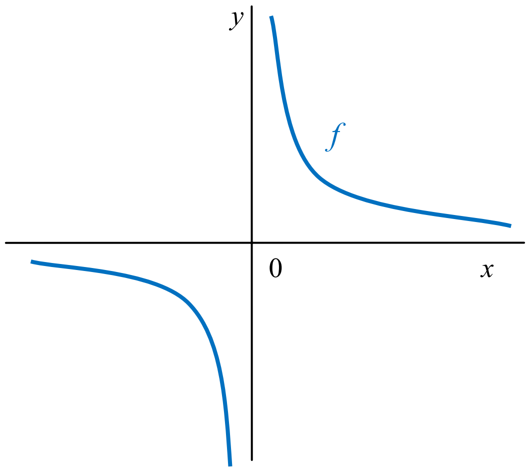
$$\boldsymbol{f}: \lim_{x \to 0} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^3}$$

Výsledek řešení:

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Záleží, zda se k bodu 0 přibližujeme zleva, či zprava v obou případech rostou funkční hodnoty nade všechny meze v kladných hodnotách i v záporných hodnotách.



Počítáme zde limitu zprava a limitu zleva.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^3}$$

[zleva $-\infty$, zprava$+\infty$]

2) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to -2} -\frac{1}{(x+2)^3}$$

[zleva $+\infty$, zprava$-\infty$]

3) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to -2} \left(\frac{2-x}{x+2}\right)$$

[zleva $-\infty$, zprava$+\infty$]

4) Vypočtěte limitu funkce ve vlastním bodě:

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to 4} \left(\frac{2-x}{x-4}\right)$$

[zleva $+\infty$, zprava$-\infty$]

Diferenciální počet

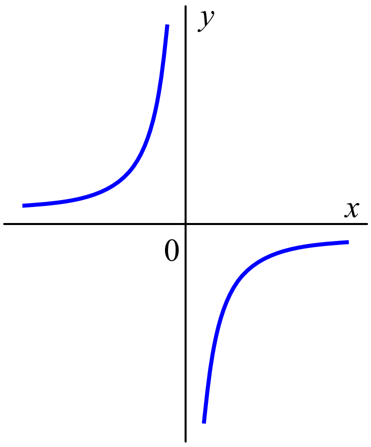
Limita funkce v nevlastním bodě

Funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ ***limitu L,*** jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový bod x_0, že pro všechna $x > x_0$ patří funkční hodnoty ***f (x) do*** okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

$\forall\varepsilon > 0, \exists x_0, x > x_0, |f(x) - L| < \varepsilon$

- $f: y = \frac{1}{x}, D_f = H_f = \mathbb{R} - \{0\}$



*Když **x** roste nade všechny meze, a blíží se k nekonečnu, funkční hodnoty jsou stále menší a blíží se k nule.*

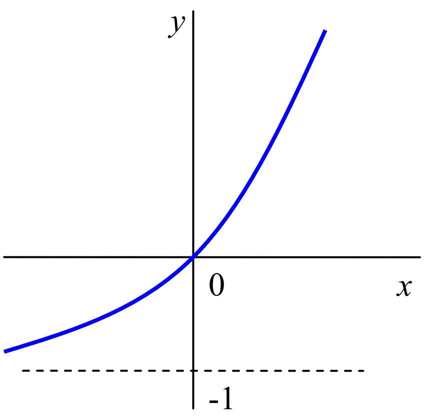
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ ***limitu L,*** jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takový bod x_0, že pro všechna $x < x_0$ patří funkční hodnoty ***f (x) do*** okolí $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

$\forall\varepsilon > 0, \exists x_0, x < x_0, |f(x) - L| < \varepsilon$

- $f: y = 2^x - 1, D_f = \mathbb{R}, H_f = (-1, \infty)$



*Když se **x** bude přibližovat k minus nekonečnu, budou se funkční hodnoty blížit k **-1**.*

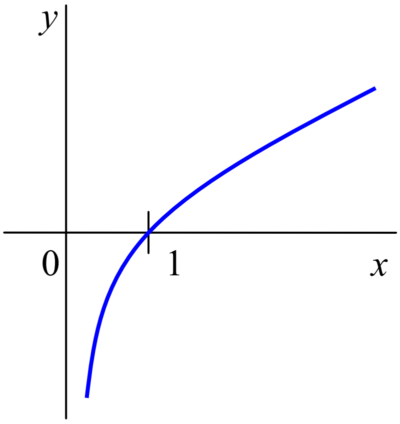
$\lim_{x\to-\infty}(2^x - 1) = -1$

Funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ ***limitu*** $+\infty$**,** jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x > x_0$ platí $f(x) > K$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists x_0, x > x_0, f(x) > K$

- $f: y = \ln x, D_f = \mathbb{R}^+, H_f = \mathbb{R}$



*Když **x** roste nade všechny meze, a blíží se k plus nekonečnu, funkční hodnoty se také přibližují k plus nekonečnu.*

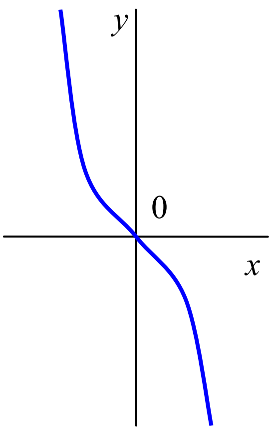
$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ ***limitu*** $-\infty$**,** jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x > x_0$ platí $f(x) < K$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists x_0, x > x_0, f(x) < K$

- $f: y = -x^3, D_f = H_f = \mathbb{R}$



*Když **x** roste nade všechny meze, a blíží se k plus nekonečnu, funkční hodnoty se přibližují k minus nekonečnu.*

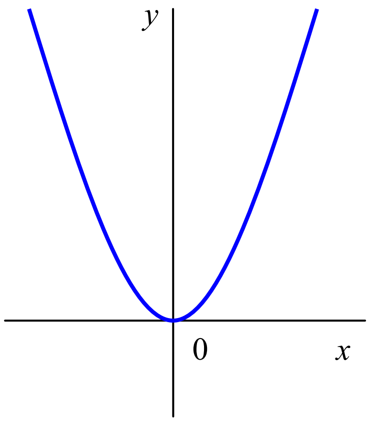
$\lim_{x\to+\infty}(-x^3) = -\infty$

Funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ ***limitu*** $+\infty$**,** jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x < x_0$ platí $f(x) > K$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists x_0, x < x_0, f(x) > K$

- $f: y = x^2, D_f = \mathbb{R},\ H_f = \mathbb{R}^+$



*Když **x** se blíží k minus nekonečnu, funkční hodnoty se přibližují k plus nekonečnu.*

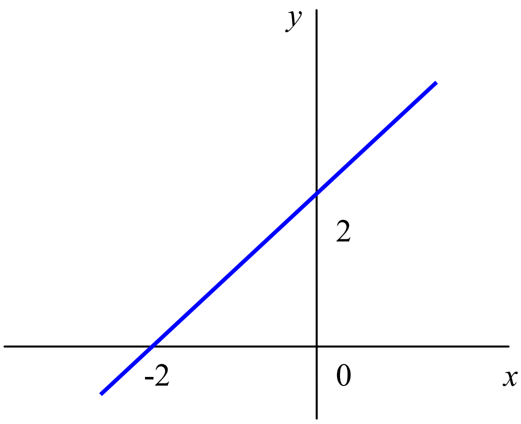
$\lim_{x\to-\infty}(x^2) = +\infty$

Funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ ***limitu*** $-\infty$**,** jestliže ke každému číslu ***K*** existuje takové číslo x_0, že pro všechna $x < x_0$ platí $f(x) < K$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists x_0, x < x_0, f(x) < K$

- $f: y = x + 2, D_f = H_f = \mathbb{R}$



*Když **x** se blíží k minus nekonečnu, funkční hodnoty se přibližují také k minus nekonečnu.*

$\lim_{x\to-\infty}(x + 2) = -\infty$

Celkem existuje 15 typů limit. Nevlastních limit je 10 typů.

Funkce může mít jeden z 5 typů vlastní limity, kdy limitou je reálné číslo.

Při výpočtu limit jsou důležité tzv. neurčité výrazy:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

u těchto výrazů není možné určit limitu pouhým dosazením.

Platí následující vztahy:

I)

$lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$lim_{x \to a} g(x) = +\infty$

$lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = +\infty$

$lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

$lim_{x \to a}[k \cdot f(x)] = +\infty, k > 0$

$lim_{x \to a}[k \cdot f(x)] = -\infty, k < 0$

II)

$lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

$lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = -\infty$

$lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

$lim_{x \to a}[k \cdot f(x)] = -\infty, k > 0$

$lim_{x \to a}[k \cdot f(x)] = +\infty, k < 0$

III)

$lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

$lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

$lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

Důležité limity

$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0, n\in\mathbb{N}$

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=neexistuje$

Je-li $a\in(0,1)$

$\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}a^x=0$

$\lim_{x\to0^+}(\log_a x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(\log_a x)=-\infty$

Je-li $a\in(1,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty}a^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

$\lim_{x\to0^+}(\log_a x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(\log_a x)=+\infty$

$\lim_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\sin x=neexistuje$

$\lim_{x\to-\infty}\sin x=neexistuje$

$\lim_{x\to+\infty}\cos x=neexistuje$

$\lim_{x\to-\infty}\cos x=neexistuje$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-}(tg\ x)=+\infty$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^+}(tg\ x)=-\infty$

$\lim_{x\to0^-}(cotg\ x)=-\infty$

$\lim_{x\to0^+}(tg\ x)=+\infty$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{tg\ x}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Limita funkce v nevlastním bodě

Varianta A

Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2}$$

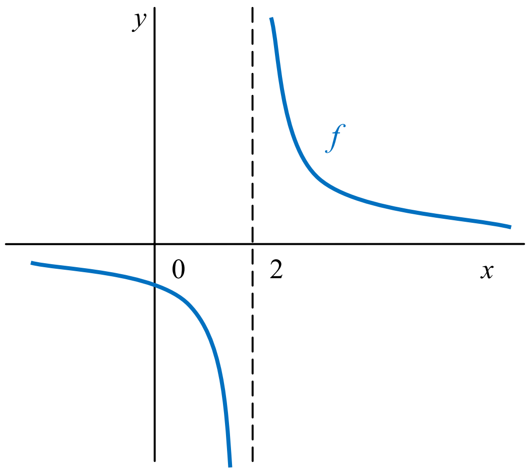
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2}$$

Výsledek řešení:

Funkce

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

není spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Záleží, zda se hodnoty pro x přibližují k $-\infty$ nebo k $+\infty$ v obou případech se funkční hodnoty přibližují k ose x (funkční hodnoty jdou k nule).



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} + 3$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+2} - 2$$

[*f*: 3, *g*: −2]

2) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-x} - 1$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+1} + 4$$

[*f*: −1, *g*: 4]

3) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to-\infty} 2^x + 1$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

[*f*: 1, *g*: 0]

4) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\boldsymbol{f}: \lim_{x\to-\infty} -4^x + 3$$

$$\boldsymbol{g}: \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$$

[*f*: 3, *g*: 0]

Limita funkce v nevlastním bodě

Varianta B

Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x - 3)$$

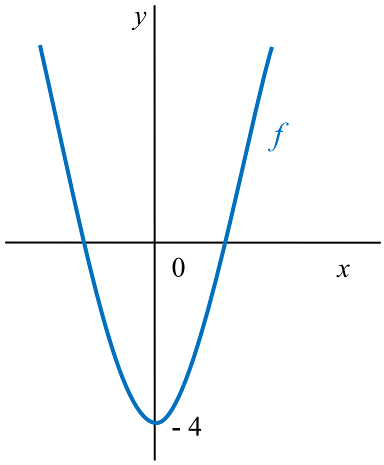
$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x - 3)$$

Výsledek řešení:

Funkce

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

Je spojitá v $\mathbb{R}$, definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}$. Záleží, zda se hodnoty pro x přibližují k $-\infty$ nebo k $+\infty$ v obou případech funkční hodnoty rostou do plus nekonečna.



Při výpočtu limit v nevlastních bodech postupujeme tak, že vytýkáme člen s nejvyšší mocninou, který určuje výsledek limity.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) =$$

$$= +\infty \cdot (1 + 0 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) =$$

$$= +\infty \cdot (1 + 0 - 0) = +\infty$$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$f\colon \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$$

$$g\colon \lim_{x\to+\infty} x^2-x^4-x$$

[f: $+\infty$, g: $-\infty$]

2) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$f\colon \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5-x^3+x^2-x}{1-x^3}$$

$$g\colon \lim_{x\to+\infty} 3x^6+2x^2-9x$$

[f: $-\infty$, g: $+\infty$]

3) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$f\colon \lim_{x\to+\infty} \log_5 x+1$$

$$g\colon \lim_{x\to+\infty} -(e)^{x+1}$$

[f: $+\infty$, g: $-\infty$]

4) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$f\colon \lim_{x\to-\infty} \log_5(2-x)$$

$$g\colon \lim_{x\to-\infty} (e)^{-x}-2$$

[f: $+\infty$, g: $+\infty$]

Limita funkce v nevlastním bodě

Varianta C

Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)$$

Výsledek řešení:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-3}+x}{\sqrt{x^2-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3-x^2}{\sqrt{x^2-3}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{x^2-3}+x}=\frac{-3}{+\infty+\infty}=0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklad k procvičení*:**

1) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$f\colon \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^4-3x^3+2x^2-1}{-8x^3-3x^2+2}$$

$$g\colon \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}+\frac{2x}{x+1}\right)$$

[f: $+\infty$, g: $+\infty$]

2) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$f\colon \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5-9x^3-10}{x^3+x^2-12}$$

$$g\colon \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2}{4-2x}+\frac{5}{x-1}\right)$$

[f: $+\infty$, g: $-\infty$]

3) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\boldsymbol{f}\text{: } \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{x^2+1}} - \boldsymbol{x} \right)$$

$$\boldsymbol{g}\text{: } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\boldsymbol{3x^2 + \mathrm{arctg}x}}{\boldsymbol{x^2-1}} \right)$$

[f: 0, g: 3]

4) Vypočtěte limitu v nevlastním bodě.

$$\boldsymbol{f}\text{: } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\boldsymbol{x^3+2x}}{\boldsymbol{x^2+1}} - \boldsymbol{3x} \right)$$

$$\boldsymbol{g}\text{: } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{x}-3x}}{\boldsymbol{x^2-1}} \right)$$

[f: $-\infty$, g: 0]

Diferenciální počet

Užití limit funkce

Asymptoty grafu funkce

S asymptotami funkce se setkáváme hlavně u hyperbol, ale i u elementárních funkcí (exponenciální, logaritmická, tangens). Ne každá funkce má své asymptoty. Asymptoty nám umožňují sestrojení grafu funkce, neboť funkce se k asymptotě přibližuje.

Máme dva druhy asymptot, asymptoty se směrnicí, asymptoty bez směrnice.

Asymptoty se směrnicí mají vyjádření ve tvaru $y = ax + b$.

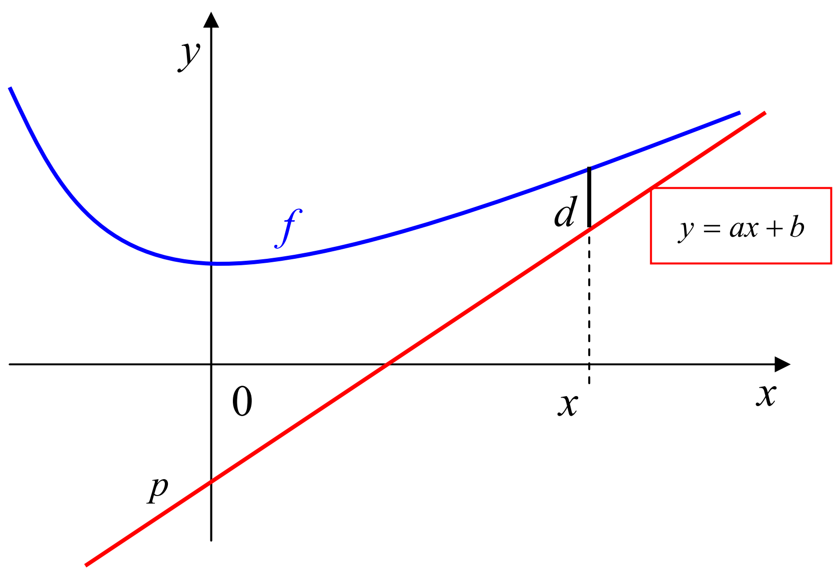
Asymptoty bez směrnice mají vyjádření ve tvaru $x = c$, kde bod *c* je bod, v němž není funkce definována, ale je definována v $(c - \delta, c)$ nebo v $(c, c + \delta)$.

Asymptota se směrnicí

Je dána funkce *f*, jejíž graf je na obrázku a přímka *p*. Co musí být splněno pro přímku *p*, aby byla asymptotou grafu funkce?

Jestliže se *x*, které náleží definičnímu oboru funkce blíží k hodnotám $+\infty$, případně $-\infty$, pak se velikost rozdílu $d = f(x) - (ax + b)$ bude blížit k nule.

Toto vyjádření mnohem přesněji popisuje limita funkce.



Přímku nazveme asymptotou grafu funkce, jestliže pro x blížící se k $+\infty$ nebo $-\infty$ se rozdíl $f(x) - (ax + b)$ bude blížit k nule.

$lim_{x \to +\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$

$lim_{x \to +\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$

Jak určíme konstanty a, b v rovnici $y = ax + b$?

$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\qquad$ $a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim_{x \to +\infty}[f(x) - ax]$ $\qquad$ $b = \lim_{x \to -\infty}[f(x) - ax]$

Asymptota bez směrnice

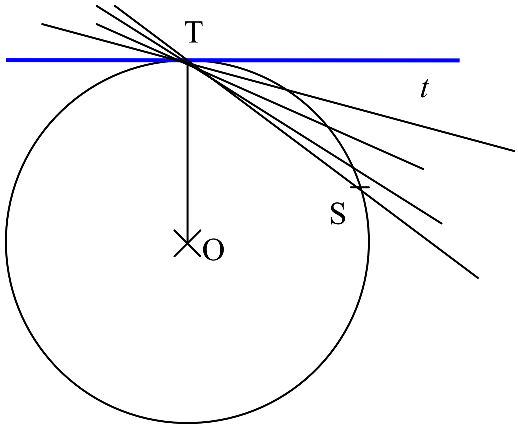
Jsou to přímky rovnoběžné s ***osou y.*** Tato asymptota nemůže nikdy protnout graf funkce, jinak by to nebyla funkce, tzn., že graf funkce se pouze přibližuje k této asymptotě.

Nechť je funkce definována v $\cup(a, \delta) - \{a\}$. Přímka o rovnici $x = a$ se nazývá asymptota bez směrnice grafu funkce *f*, právě když má funkce *f* v bodě *a* aspoň jednu jednostrannou nevlastní limitu.

Body, ve kterých mohou být asymptoty bez směrnice, jsou takové body, ve kterých není funkce definována. V těchto bodech vyšetřujeme jednostranné nevlastní limity. Pokud existuje aspoň jedna taková limita, pak přímka $x = a$ je asymptotou bez směrnice.

Tečna grafu funkce

Tečna je přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod. Tečna je kolmá ke spojnici středu ***O*** a bodu dotyku ***T***. Prochází-li přímka dvěma různými body ***S, T*** kružnice, je přímka TS sečnou kružnice. Čím blíže zvolíme bod ***S*** k bodu ***T***, tím méně se poloha sečny ***TS*** liší od polohy tečny *t* kružnice v bodě ***T***. Říkáme, že tečna ***t*** je mezní nebo též limitní polohou sečny ***TS***, blíží-li se bod ***S*** po kružnici k bodu ***T***.



Úloha:

Mějme zadanou parabolu $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. Na této parabole leží bod $T\left[1, \frac{3}{2}\right]$. Tento bod bude dotykový bod pro tečnu této paraboly.

Zvolme na parabole bod ***S***, vyjádřeme přímku ***ST*** (sečnu). Pokusme se najít vyjádření tečny, která prochází bodem ***T*** s využitím limity funkce.

Bod ***S*** má souřadnice $S\left[1 + \Delta x, \frac{3}{2} + \Delta y\right]$.

Δy je přírůstek funkce $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, odpovídající přírůstku Δx argumentu $\boldsymbol{x}$.

$\Delta y = \left[\frac{1}{2}(1 + \Delta x)^2 + 1\right] - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(2\Delta x + \Delta x^2)$

Směrnice k_S přímky ***ST*** se rovná podílu:

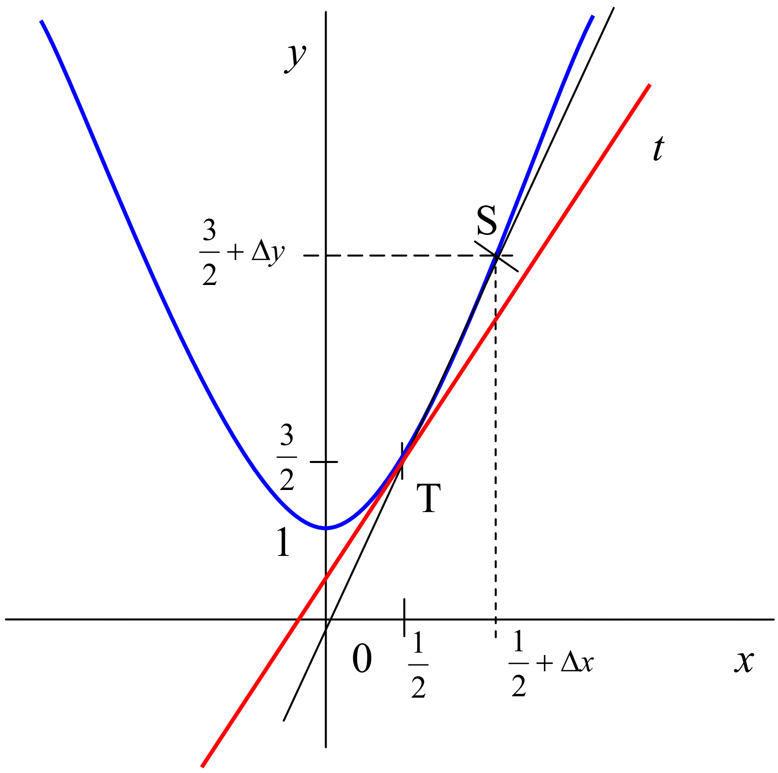
$$k_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}(2 + \Delta x)$$

Pro $\Delta x \to 0$, se bod ***S*** blíží k bodu ***T***, limitní polohou přímky ***ST*** je tečna ***t*** v bodě ***T***, která má směrnici:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} k_S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{2}(2 + \Delta x)\right] = 1$$

Tečna t má rovnici:

$y - \frac{3}{2} = 1 \cdot (x - 1)$ $\qquad$ $y = x + \frac{1}{2}$



Graf funkce $y = f(x)$ má v bodě $T[x_0, y_0]$ který náleží funkci *f* tečnu se směrnicí k_T právě když v bodě x_0 existuje vlastní limita:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pak tečna procházející bodem $T[x_0, y_0]$ je přímka o rovnici:

$$y - y_0 = k_T(x - x_0)$$

Užití limit funkce

Varianta A

Určete asymptoty grafu funkce

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2 + 1}{x + 3}}$$

Výsledek řešení:

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

Asymptota bez směrnice má vyjádření: $x = -3$

Asymptoty se směrnicí: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+1}{x+3} - 1x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+1-x^2-3x}{x+3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{-3x+1}{x+3}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x\left(1-\frac{1}{3x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = -3$$

Asymptoty se směrnicí: $y = x - 3$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete asymptoty grafu funkce

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x^2 - 4}}{\boldsymbol{x - 2}}$$

[$x = 2;\ y = x + 2$]

2) Určete asymptoty grafu funkce

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x^4 - x}}{\boldsymbol{x^3 + 1}}$$

[$x = -1;\ y = x$]

3) Určete asymptoty grafu funkce

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{3x - 5}}{\boldsymbol{2x + 2}} + \boldsymbol{x}$$

[$x = -1;\ y = x + \frac{3}{2}$]

4) Určete asymptoty grafu funkce

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{4 - 2x}}{\boldsymbol{x - 5}} - \boldsymbol{x}$$

[$x = 5;\ y = -x - 2$]

Užití limit funkce

Varianta B

Najděte rovnici tečny grafu funkce v bodě T, který má danou souřadnici *x*.

$\boldsymbol{f: y = x^3, T = [2, y_0].}$

Výsledek řešení:

Tečna ke grafu funkce má rovnici: $y - y_0 = k_T \cdot (x - x_0)$

Směrnice tečny má vyjádření:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - {x_0}^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{x_0}^3 + 3{x_0}^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - {x_0}^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3{x_0}^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 3{x_0}^2$$

$k_T = 3{x_0}^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$

Souřadnice y_0 bodu T: $y_0 = 2^3 = 8$

$y - y_0 = k_T \cdot (x - x_0)$

$y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$

Tečna má rovnici:

$\mathbf{12x - y - 16 = 0}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Najděte rovnici tečny grafu funkce v bodě $\boldsymbol{T = [1, y_0]}$.

$$\boldsymbol{f\colon y = \frac{x-1}{x+1}}$$

$[x - 2y - 1 = 0]$

2) Najděte rovnici tečny grafu funkce v bodě $T = [-3, y_0]$.

$$\boldsymbol{f\colon y = \frac{x^2}{x-1}}$$

$[15x - 16y + 9 = 0]$

3) Najděte rovnici tečny grafu funkce v bodě $T = [1, y_0]$.

$$\boldsymbol{f\colon y = 2^x}$$

$[x - y = 0]$

4) Najděte rovnici tečny grafu funkce v bodě $T = [0, y_0]$.

$$\boldsymbol{f\colon y = e^x - e^{-x}}$$

$[2x - y = 0]$

Užití limit funkce

Varianta C

Najděte rovnici tečny k dané křivce, v bodě $\boldsymbol{T} = \left[-\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}},;\mathbf{2}\right]$

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 12}$

Výsledek řešení:

Rovnici křivky si vyjádříme jako funkci jedné proměnné:

$y = \sqrt{12-x^2}$

Směrnice tečny má vyjádření:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{12+(x-\Delta x)^2} - \sqrt{12-x^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{12-(x+\Delta x)^2} - \sqrt{12-x^2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{12-(x+\Delta x)^2} + \sqrt{12-x^2}}{\sqrt{12-(x+\Delta x)^2} + \sqrt{12-x^2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12-(x+\Delta x)^2 - 12+x^2}{\Delta x \cdot \sqrt{12-(x+\Delta x)^2} + \sqrt{12-x^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x - \Delta x}{\sqrt{12-(x-\Delta x)^2} + \sqrt{12-x^2}} =$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}$$

$$k_T = \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{12-x^2}} = \frac{-2 \cdot \left(-2\sqrt{2}\right)}{2 \cdot \sqrt{12-\left(-2\sqrt{2}\right)^2}} = \sqrt{2}$$

$y - y_0 = k_T \cdot (x - x_0)$

$y - 2 = \sqrt{2} \cdot \left(x + 2\sqrt{2}\right)$

Tečna má rovnici:

$\boldsymbol{\sqrt{2}x - y + 6 = 0}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Najděte rovnici tečny k dané křivce, v bodě $\boldsymbol{T} = [\mathbf{3}; \mathbf{1}]$

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = 8}$$

$[3x - y - 8 = 0]$

2) Najděte rovnici tečny k dané křivce, v bodě $\boldsymbol{T} = [\mathbf{-5}; \mathbf{2}]$

$$\boldsymbol{x^2 - 5y^2 = 5}$$

$[x + 2y + 1 = 0]$

3) Vypočítej odchylku tečen grafu dané funkce v bodech $\boldsymbol{T_1} = [\mathbf{0}; \mathbf{3}], \boldsymbol{T_2} = [\mathbf{2}; \mathbf{1}]$

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x^2 - 3}}{\boldsymbol{x - 1}}$$

$[\propto = 0°]$

4) Vypočítej odchylku tečen grafu dané funkce v bodech $\boldsymbol{T_1} = \left[\mathbf{-2}; -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right], \boldsymbol{T}_2 = \left[\mathbf{-4}; -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}}\right]$

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2 - 1}}$$

$[\propto = 24°44']$

Diferenciální počet

Derivace funkce v bodě

Derivace funkce patří k infinitezimálnímu počtu. Slouží k vyšetřování průběhu funkce, určování maxim a minim, k sestrojování grafů funkcí. Má mnoho aplikací ve fyzice, chemii.

Mějme funkci f definovanou v jistém okolí bodu $\boldsymbol{x_0}$.

Existuje-li vlastní limita:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nazýváme ji derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x_0}$.

Derivace funkce *f* v bodě x_0 značíme symbolem $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Další obměny výpočtu derivace:

$\Delta x = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Kromě symbolu $f'(x_0)$ se pro označení derivace používá také $y'(x_0)$.

<u>Geometrická interpretace derivace funkce v bodě:</u>

Pro směrnici k_T tečny v bodě $T[x_0, y_0]$.

$$k_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tato limita je definována jako derivace funkce *f* v bodě x_0, a proto lze psát $k_T = f'(x_0)$.

Rovnici tečny grafu funkce *f* v bodě $T[x_0, y_0]$ můžeme psát jako:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Funkce f má v intervalu (a, b) derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$.

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.

Mějme funkci f definovanou v jistém levém, resp. Pravém okolí bodu x_0.

Existuje-li

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nazýváme ji derivací funkce *f* v bodě x_0 zleva $f'_-(x_0)$.

Existuje-li

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nazýváme ji derivací funkce *f* v bodě x_0 zprava $f'_+(x_0)$.

Funkce f má v intervalu $\langle a, b \rangle$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a má derivaci zprava a v bodě b má derivaci zleva.

Derivace funkce v bodě

Varianta A

Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$$\boldsymbol{f: y = x^2 + 1}$$

Výsledek řešení:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - ({x_0}^2 + 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{x_0}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + 1 - {x_0}^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$\boldsymbol{f: y = 2x^2 + x}$ $[f'(x_0) = 4x_0 + 1]$

2) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$\boldsymbol{f: y = 3x^2 + 2x}$ $[f'(x_0) = 6x_0 + 2]$

3) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$\boldsymbol{f: y = x^3 + 2x^2}$ $[f'(x_0) = 3{x_0}^2 + 4x_0]$

4) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$\boldsymbol{f: y = 2x^3 + x^2}$ $[f'(x_0) = 6{x_0}^2 + 2x_0]$

Derivace funkce v bodě

Varianta B

Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$$

Výsledek řešení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \cdot \frac{1}{x - x_0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \cdot \left(\frac{-1}{x_0 - x}\right)\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x \cdot x_0} = \frac{-1}{x_0 \cdot x_0} = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x} + \mathbf{2}}$$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 + 2)^2}$$

2) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$$

$$f'(x_0) = -\frac{1}{4{x_0}^2}$$

3) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}$$

$$f'(x_0) = \frac{2}{(x_0 + 1)^2}$$

4) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě x_0.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}$$

$$f'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}$$

Derivace funkce v bodě

Varianta C

Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě $x_0 = 5$.

$\boldsymbol{f: y = \sqrt{x-1}}$

Výsledek řešení:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x_0 - 1}}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x_0 - 1}}{x - x_0} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x_0 - 1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x_0 - 1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-1) - (x_0 - 1)}{(x - x_0) \cdot \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x_0 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0) \cdot \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x_0 - 1}\right)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x_0 - 1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{x_0 - 1} + \sqrt{x_0 - 1}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0 - 1}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5 - 1}} = \frac{1}{4}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě $x_0 = 2$.

$\boldsymbol{f: y = \sqrt{2x}}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}; \frac{1}{2}$$

2) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě $x_0 = 0$.

$\boldsymbol{f: y = \sqrt{4x+4}}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt{x_0+1}}; \frac{1}{4}$$

3) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě $x_0 = 8$.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \sqrt[3]{\boldsymbol{x^2}}$

$$f´(x_0) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x_0}}; \frac{1}{3}$$

4) Pomocí limity funkce, vypočtěte derivaci funkce v bodě $x_0 = 4$.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \sqrt[3]{\boldsymbol{x - 3}}$

$$f´(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_0 - 3)^2}}; \frac{1}{3}$$

Diferenciální počet

Derivace elementárních funkcí

1) Pro konstantní funkci $f: y = c, c \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{y' = 0}$

2) Pro funkci $f: y = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$\boldsymbol{y' = n \cdot x^{n-1}}$

3) Pro funkci $f: y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{y' = \cos x}$

4) Pro funkci $f: y = \cos x, x \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{y' = -\sin x}$

5) Pro funkci $f: y = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

6) Pro funkci $f: y = \operatorname{cotg} x, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boldsymbol{y' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

7) Pro funkci $f: y = x^n, x \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{Z}^-$

$\boldsymbol{y' = n \cdot x^{n-1}}$

$$\boldsymbol{(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}}$$

8) Pro funkci $f: y = x^n, x \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{R}$

$\boldsymbol{y' = n \cdot x^{n-1}}$

Derivace elementárních funkcí

Varianta A

Vypočtěte první derivaci funkce $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Výsledek řešení:

Jde o derivaci mocninné funkce $y' = n \cdot x^{n-1}$

$$f': y' = 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 12x^2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}$

$f' = 8x^3$

$g' = \frac{1}{2}x^4$

2) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \mathbf{5}\boldsymbol{x}^{\mathbf{6}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$

$f' = 30x^5$

$g' = 2x^2$

3) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}^2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{3}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}$

$$f' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$g' = 3\cos x$$

4) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \sqrt[4]{\boldsymbol{x}^5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{2}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$

$$f' = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

$$g' = -2\sin x$$

Derivace elementárních funkcí

Varianta B

Vypočtěte první derivaci funkce $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x^3} \cdot \boldsymbol{sin\,x}$ v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Výsledek řešení:

Jedná se o derivaci dvou funkcí v součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$(x^3 \cdot sin\,x)' = 3x^2 \cdot sin\,x + x^3 \cdot cos\,x$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{2x^2 \cdot tg\,x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{4x^5 + x \cdot \sin x}$

$$f' = 4x \cdot tg\,x + \frac{2x^2}{\cos^2 x}$$

$$g' = 20x^4 + \sin x + x \cdot \cos x$$

2) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{5x^3 \cdot cotg\,x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{3x^3 + \sqrt{x} \cdot \cos x}$

$$f' = 15x^2 \cdot cotg\,x - \frac{5x^3}{\sin^2 x}$$

$$g' = 9x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \sin x$$

3) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \left(\boldsymbol{x}^5 - \boldsymbol{x}\right) \cdot \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{4}\boldsymbol{x}^5 + \boldsymbol{x}^3 - \mathbf{2}\boldsymbol{x}^2 \cdot \mathbf{sin}\, \boldsymbol{x}$

$$f' = (5x^4 - 1) \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{(x^5 - x)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g' = 20x^4 + x^2 - 4x \cdot sin\, x - 2x^2\, cos\, x$$

4) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}) \cdot \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \cdot \sqrt{\boldsymbol{x}}$

$$f' = \frac{(3x^2 + 1)}{\sqrt{x}} - \frac{(x^3 + x)}{2\sqrt{x^3}}$$

$$g' = 3x^2 - 3 - \sqrt{x} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivace elementárních funkcí

Varianta C

Vypočtěte první derivaci v libovolném bodě definičního oboru funkce

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2}{\cos x}}$$

Výsledek řešení:

Jedná se o derivaci dvou funkcí v podílu

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos x}\right)' = \frac{2x \cdot \cos x - x^2 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f: y = \frac{4x}{tgx}}$ $\boldsymbol{g: y = x^4 + \frac{\sqrt{x}}{\sin x}}$

$$f' = \frac{4}{tgx} - \frac{4x}{\sin^2 x}$$

$$g' = 4x^3 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin x} - \frac{\sqrt{x} \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

2) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2}{cotgx}}$ $\boldsymbol{g: y = x^3 - \frac{\sin x}{x}}$

$$f' = \frac{2x}{cotgx} + \frac{x^2}{\cos^2 x}$$

$$g' = 3x^2 - \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}$$

3) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$$\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x^2 \cdot \cos x}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}}$$

$$f' = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos x - \sqrt{x^3} \cdot \sin x - \frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot \cos x$$

4) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$$\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{x}}}{\boldsymbol{x^2 \cdot \sin x}}$$

$$f' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5} \cdot \sin x} - \frac{\cos x}{\sqrt{x^3} \cdot \sin^2 x}$$

Diferenciální počet

Derivace funkcí v součtu, v součinu, podílu a rozdílu

Jestliže funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i součet, rozdíl a součin funkcí $u(x)$ a $v(x)$ a pro $v(x) \neq 0$ i podíl $\frac{u(x)}{v(x)}$:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}'$$

$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{v}'$$

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}{\boldsymbol{v}^2}$$

Pro funkci $f: y = c \cdot u(x), c \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$$

Diferenciální počet

Derivace složené funkce

Většina funkcí je složena z funkcí elementárních, jejichž derivace již známe. Derivaci složené funkce provedeme následovně.

Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = f\big(g(x)\big)$ derivaci v bodě x_0 a platí:

$$\boldsymbol{\left[f\big(g(x_0)\big)\right]' = f' g(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

Derivace složené funkce $y = f(z)$, kde $z = g(x)$ v bodě x_0 je součinem dvou čísel, hodnoty derivace vnější funkce $f(z)$, podle z v bodě $z_0 = g(x_0)$ a hodnoty derivace vnitřní funkce $g(x)$ podle x v bodě x_0.

Derivace exponenciální a logaritmické funkce

Pro funkci $f: y = e^x, x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{y' = e^x}$$

Pro funkci $f: y = a^x, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+$

$$\boldsymbol{y' = a^x \cdot \ln a}$$

Pro funkci $f: y = \ln x, x \in \mathbb{R}^+$

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{x}}$$

Pro funkci $f: y = \log_a x, x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

Derivace složené funkce

Varianta A

Vypočtěte první derivaci v libovolném bodě definičního oboru funkce

$$\boldsymbol{f: y = x^2 \cdot \log_5 x}$$

Výsledek řešení:

Jedná se o derivaci dvou funkcí v součinu

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$(x^2 \cdot \log_5 x)' = 2x \cdot \log_5 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 5} = 2x \cdot \log_5 x + \frac{x}{\ln 5}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f: y = \frac{x}{\ln x}}$ $\boldsymbol{g: y = \log x + 2^x}$

$$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$g' = \frac{1}{x \cdot \ln 10} - 2^x \cdot \ln 2$$

2) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2}{e^x}}$ $\boldsymbol{g: y = 5^x - \frac{\ln x}{x}}$

$$f' = \frac{(2x - x^2)}{e^x}$$

$$g' = 5^x \cdot \ln 5 - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

3) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{\log_3 x}{x^2} - 3^x}$$

$$f' = \frac{1}{x^3 \cdot \ln 3} - \frac{2\log_3 x}{x^3} - 3^x \cdot \ln 3$$

4) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{1}{6^x} - e^x \cdot \log_{0,4} x}$$

$$f' = -\frac{\ln 6}{6^x} - e^x \cdot \log_{0,4} x - \frac{e^x}{x \cdot \ln 0{,}4}$$

Derivace složené funkce

Varianta B

Vypočtěte první derivaci v libovolném bodě definičního oboru funkce

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x^4 - 3x^2 - \sin x})^3$$

Výsledek řešení:

Jedná se o derivaci složené funkce

$$[f(g(x_0))]' = f'g(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$y = g(x_0) = x^4 - 3x^2 - \sin x$$

$$f(y) = (g(x_0))^3$$

$$[(x^4 - 3x^2 - \sin x)^3]' = 3 \cdot (x^4 - 3x^2 - \sin x)^2 \cdot (4x^3 - 6x - \cos x)$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\sin^3(x^4 + 2x^2)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{2^{(5x^3 - 3x)}}$

$$f' = 3 \cdot \sin^2(x^4 + 2x^2) \cdot \cos(x^4 + 2x^2) \cdot (4x^3 + 4x)$$

$$g' = 2^{(5x^3 - 3x)} \cdot \ln 2 \cdot (15x^2 - 3)$$

2) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\cos(x^4 + 2x^2)^5}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\sqrt[5]{(x^4 - 4x)}}$

$$f' = 20 \sin(x^4 + 2x^2)^5 \cdot (x^4 + 2x^2)^4 \cdot (x^3 + x)$$

$$g' = \frac{4}{5} \cdot \frac{x^3 - 1}{\sqrt[5]{(x^4 - 4x)^4}}$$

3) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \left(\mathbf{5}\boldsymbol{e}^{\mathbf{5}\boldsymbol{x}}\right)^{\mathbf{5}}$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{log_2} \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}}$

$$f' = 5 \cdot (5e^{5x})^4 \cdot 5e^{5x} \cdot 5 = 25 \cdot (5e^{5x})^5$$

$$g' = \frac{x}{(x^2 + 2) \cdot \ln 2}$$

4) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{tg}^{\mathbf{2}}(\mathbf{6}\boldsymbol{x} - \mathbf{5})^{\mathbf{3}}$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \mathbf{4}\,\mathbf{ln}^{\mathbf{2}}(\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1})^{\mathbf{2}}$

$$f' = 2 \cdot tg(6x-5)^3 \frac{1}{\cos^2(6x-5)^3} \cdot 3 \cdot (6x-5)^2 \cdot 6 = \frac{36(6x-5)^2 \cdot tg(6x-5)^3}{\cos^2(6x-5)^3}$$

$$g' = \frac{32 \ln(2x-1)^2}{2x-1}$$

Derivace složené funkce

Varianta C

Vypočtěte první derivaci v libovolném bodě definičního oboru funkce

$$\boldsymbol{f: y = 2^{(3x-2)} \cdot \sin(x^2 - 2x)^2}$$

Výsledek řešení:

Jedná se o derivaci složených funkcí v součinovém tvaru.

$$\left[2^{(3x-2)} \cdot \sin(x^2 - 2x)^2\right]' =$$

$$= 2^{(3x-2)} \cdot \ln 2 \cdot 3 \cdot \sin(x^2 - 2x)^2 + 2^{(3x-2)} \cdot \cos(x^2 - 2x)^2 \cdot 2 \cdot (x^2 - 2x) \cdot (2x - 2) =$$

$$= 3 \ln 2 \cdot 2^{(3x-2)} \cdot \sin(x^2 - 2x)^2 + 2^{(3x-1)} \cdot (x^2 - 2x) \cdot (2x - 2) \cdot \cos(x^2 - 2x)^2$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f: y = \ln(4x) \cdot \mathrm{tg}^2(x^2)}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{g: y = e^{(x^3 - x)} \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

$$f' = \frac{tg^2(x^2)}{x} + \frac{4x \ln(4x) \cdot tg(x^2)}{\cos^2(x^2)}$$

$$g' = e^{(x^3-x)} \cdot (3x^2 - 1) \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{2e^{(x^3-x)}}{3\sqrt[3]{x}}$$

2) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f: y = 5^{(2x-3)} \cdot cotg\sqrt{2x-1}}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{g: y = \sqrt[5]{x(\log_8 x)}}$

$$f' = 2 \cdot 5^{(2x-3)} \cdot \ln 5 \cdot cotg\sqrt{2x-1} - \frac{5^{(2x-3)}}{\sqrt{2x-1} \cdot \cos^2\sqrt{2x-1}}$$

$$g' = \frac{1}{5} \cdot \frac{\log_8 x + \frac{1}{\ln 8}}{\sqrt[5]{\left(x(\log_8 x)\right)^4}}$$

3) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{e^{2x} \cdot x}}{\boldsymbol{\ln x}}$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\log_2(2x)}}{\boldsymbol{2x}}$

$$f' = \frac{e^{2x} \cdot (2x+1)}{\ln x} - \frac{e^{2x}}{x \cdot \ln x}$$

$$g' = \frac{1}{2x^2 \cdot \ln 2} - \frac{\log_2 2x}{2x^2}$$

4) Vypočtěte první derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\cos^3 x}}{\boldsymbol{1 - x^2}}$ $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{(x^3-3)^2}}{\boldsymbol{\cos 4x}}$

$$f' = \frac{2x \cdot \cos^3 x}{(1-x^2)^2} - \frac{2 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x}{1 - x^2}$$

$$g' = \frac{6x^2 \cdot (x^3 - 3)}{\cos 4x} + \frac{4(x^3-3)^2 \cdot \sin 4x}{\cos^2 4x}$$

Diferenciální počet

Průběh funkce

Vyšetřujeme průběh funkce. Základem jsou věty pro zkoumání průběhu funkcí, které objasňují vlastnosti funkcí. Tyto vlastnosti určujeme pomocí diferenciálního počtu.

Rolleova věta:

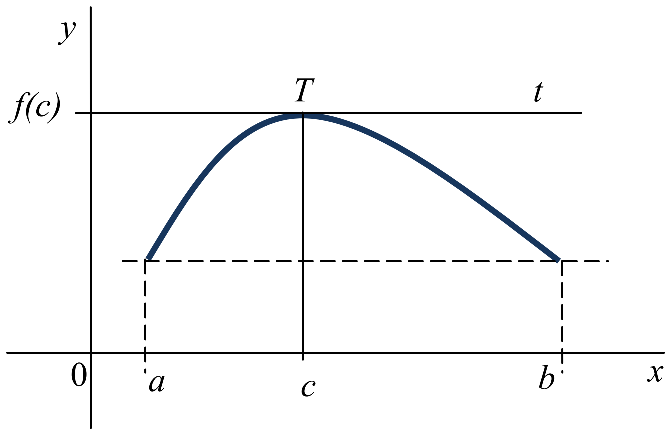
Mějme funkci *f*, která má tyto vlastnosti:

a) je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.

b) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) má derivaci

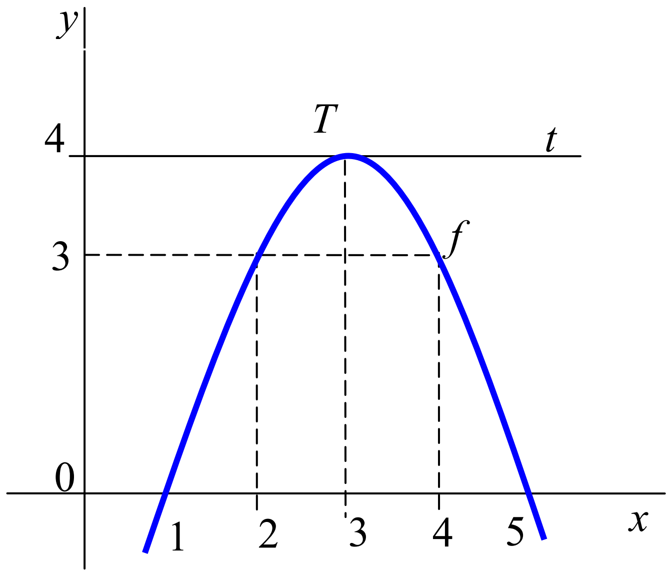
c) $f(a) = f(b)$

Potom existuje v otevřeném intervalu (a, b) aspoň jeden bod *c*, v němž $f^{'}(c) = 0$.



funkce je spojitá v uzavřeném intervalu a hodnoty $f(a) = f(b)$. Graf má v každém bodě tečnu. Mezi těmito tečnami bude aspoň jedna rovnoběžná s osou *x*. Dotykový bod *T* má souřadnice $[c, f(c)]$.

Příklad: *Zjisti, zda tato funkce vyhovuje předpokladům Rolleovy věty.*



$$f: y = -x^2 + 6x - 5, x \in \langle 2,4 \rangle$$

$$f': y = -2x + 6$$

$$f(2) = f(4) = 3$$

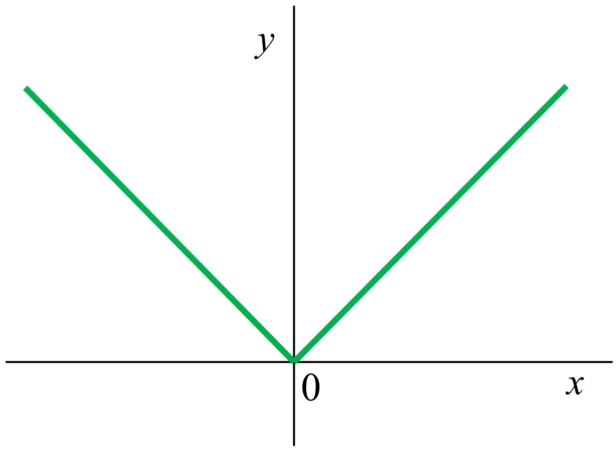
Existuje aspoň jedno $c \in \langle 2,4 \rangle$,

v němž

$$f'(c): -2c + 6 = 0$$

$$c = 3$$

Příklad: *Zjisti, zda tato funkce vyhovuje předpokladům Rolleovy věty.*



$f: y = |x|, x \in \langle -2,2 \rangle$

Funkce je spojitá v uzavřeném intervalu, $f(-2) = f(2) = 2$, ale funkce nemá derivaci v každém bodě otevřeného intervalu ($x = 0$ – derivace neexistuje).

<u>Lagrangeova věta o střední hodnotě</u>

umožňuje odhadnout přírůstek funkce na základě její derivace.

Mějme funkci *f*, která má tyto vlastnosti:

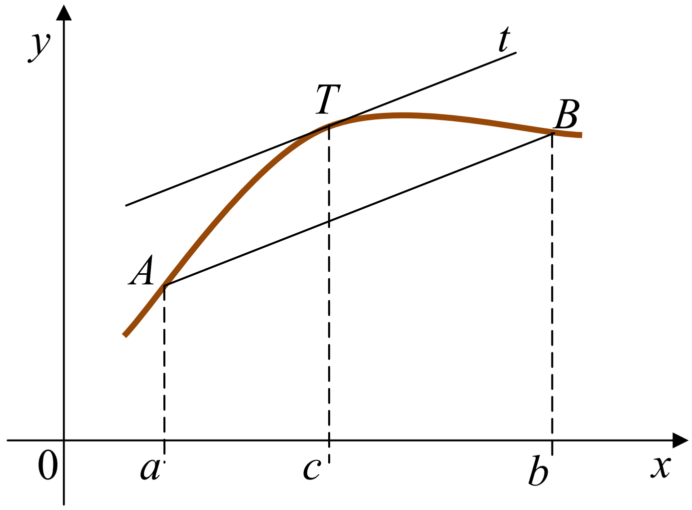
a) je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$

b) v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) má derivaci

Potom existuje v otevřeném intervalu (a, b) ***aspoň jeden bod c, pro který platí:***

$$\frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}} = \boldsymbol{f'(c)}$$

$$\boldsymbol{f(b)-f(a)} = \boldsymbol{(b-a)\cdot f'(c)}$$



Graf funkce, která splňuje podmínky Lagrangeovy věty, má v každém bodě $x \in (a, b)$ tečnu.

Tětiva spojující body $A[a, f(a)], B[b, f(b)]$ grafu má směrnici

$$\boldsymbol{k = tg\alpha} = \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}}$$

Podle Lagrangerovy věty existuje aspoň jedna tečna, která má stejnou směrnici.

Existuje aspoň jeden bod $T[c, f(c)]$ grafu dané funkce, v němž je tečna *t* rovnoběžná s tětivou *AB*.

Platí-li $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ ***pro každé*** $x \in (a, b)$***, potom f je konstantní funkce.***

<u>Monotónnost funkce a derivace</u>

Jde o zjištění monotónnosti funkce (rostoucí, klesající) pomoci derivace.

Má-li funkce f v každém bodě intervalu (a, b) ***kladnou derivaci, je v tomto intervalu rostoucí.***

Máli funkce f v každém bodě intervalu (a, b) ***zápornou derivaci, je v tomto intervalu klesající.***

Důkaz: Jsou-li x_1, x_2 dva libovolné různé body intervalu (a, b), je uzavřený interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ částí intervalu (a, b). Podle Lagrangeovy věty existuje takové číslo $c \in (x_1, x_2)$, že platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Je-li $f'(c) > 0$. Protože $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Tzn., že funkce je rostoucí.

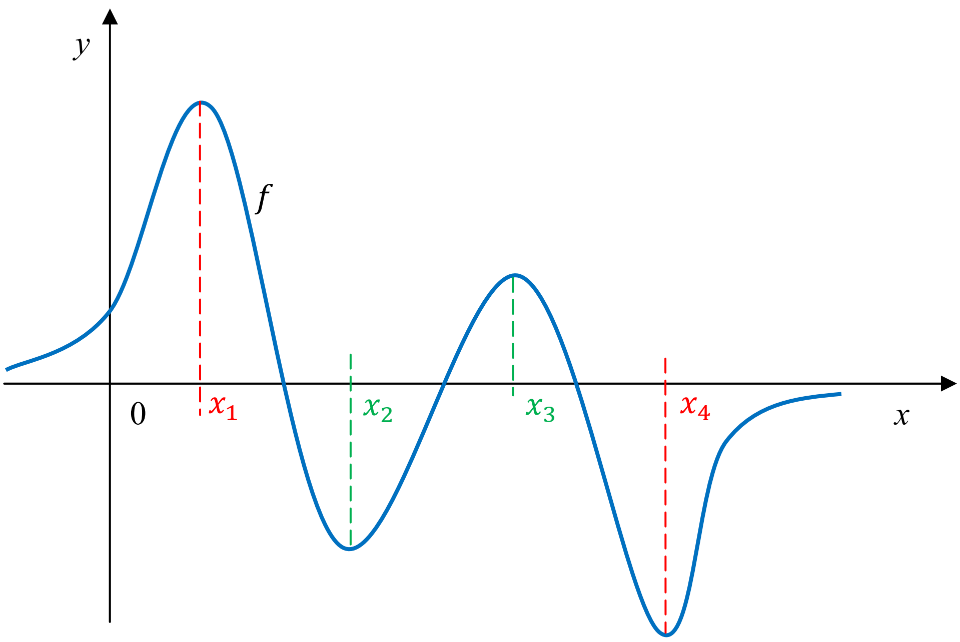
Je-li $f'(c) < 0$. Protože $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Tzn., že funkce je klesající.

Intervaly, ve kterých je funkce rostoucí nebo klesající, se nazývají ***intervaly monotónnosti.***

Extrémy funkce a 1. derivace

Extrémy funkce jsou maxima a minima funkce, (největší a nejmenší hodnota funkce) na dané množině. Touto množinou je nejčastěji definiční obor funkce nebo nějaký uzavřený interval, který je podmnožinou tohoto definičního oboru.



Funkce *f* nabývá na svém definičním oboru (množina reálných čísel) největší hodnoty v bodě x_1, nejmenší hodnoty v bodě x_4 . V bodech x_2 , x_3 nabývá funkce hodnot, které již nejsou nejmenší a největší na celém definičním oboru. Jsou to lokální minima a lokální maxima. V bodech x_1 , x_4 nabývá funkce globálního maxima a minima.

Lokální maximum, případně minimum, kterých funkce nabývá v jistém uzavřeném intervalu, nemusí být vždy největší, případně nejmenší hodnotou funkce v tomto intervalu. Pokud interval omezíme jinak, potom se můžou funkční hodnoty funkce změnit, většinou to bývají krajní body intervalu, kde funkce dosahuje globální extrémy.

Funkce f má v bodě x_0 lokální maximum, existuje-li takové okolí $\cup(x_0)$bodu x_0, že pro všechna x z $\cup(x_0) \cap D(f)$ platí: $f(x) \leqq f(x_0)$.

Funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, existuje-li takové okolí $\cup(x_0)$ bodu x_0, že pro všechna x z $\cup(x_0) \cap D(f)$ platí: $f(x) \geqq f(x_0)$.

Pokud platí ostrá nerovnost $\boldsymbol{f(x)} < f(\boldsymbol{x_0})$, $\boldsymbol{f(x)} > f(\boldsymbol{x_0})$ jde o ostré lokální extrémy.

Má-li funkce f v bodě $\boldsymbol{x_0}$ lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $\boldsymbol{f'(x_0)}$, pak platí: $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

Obrácená věta neplatí, to znamená, že pokud má funkce v bodě derivaci, která je nulová $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$**,** nemusí mít v tomto bodě extrém (bod je pouze podezřelý z extrému).

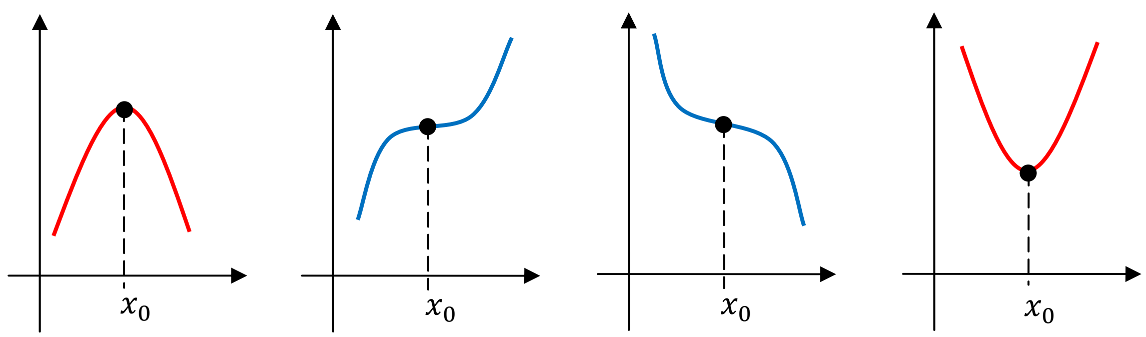
Stacionární body

Jak postupujeme při určování lokálních extrémů funkce. Z podmínky $f'(x_0) = 0$ nemusí nutně vyplývat, že funkce má v bodě x_0 lokální extrém.

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme nulovým bodem 1. derivace nebo také ***stacionárním bodem.*** Tyto stacionární body jsou řešením rovnice $f'(x_0) = 0$. V těchto bodech může, ale nemusí mít funkce lokální extrémy. Tyto body jsou pouze podezřelé z extrémů.

Nechť $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$. Jestliže existuje takové okolí $\cup(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{\delta})$, že v intervalech $(\boldsymbol{x_0 - \delta, x_0})$ a $(\boldsymbol{x_0, x_0 + \delta})$ má $\boldsymbol{f'(x)}$ různá znaménka, má funkce f v bodě $\boldsymbol{x_0}$ ostrý lokální extrém.
Mění-li se znaménko derivace z plus na minus, má funkce v bodě $\boldsymbol{x_0}$ lokální maximum, mění-li se znaménko derivace z minus na plus, má funkce v bodě $\boldsymbol{x_0}$ lokální minimum.

Nemění-li se znaménko, lokální extrém v bodě x_0 nenastává. Možnosti průběhu funkce okolo stacionárního bodu znázorňují obrázky. Krajní grafy ukazují možnost extrému funkce.



Průběh funkce – monotónnost funkce

Varianta A

Pomocí první derivace určete intervaly monotónnosti funkce.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1}$$

Výsledek řešení:

Hledáme intervaly, ve kterých je $f'(x) > 0$, a ve kterých je $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) > 0$$

$$3x^2 - 6x - 9 > 0 \Rightarrow 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) > 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

Funkce $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ **je rostoucí** v intervalu $(-\infty, -1)$ a $(3, +\infty)$.

$$f'(x) < 0$$

$$3x^2 - 6x - 9 < 0 \Rightarrow 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) < 0$$

$$x \in (-1,3)$$

Funkce $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ **je klesající** v intervalu $(-1,3)$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí první derivace určete intervaly monotónnosti funkce.

$\boldsymbol{f: y = 2x^2 + 4x - 16}$

$$g: y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

[*f:* rostoucí v $\left(-1, +\infty\right)$, klesající v $\left(-\infty, -1\right)$

g: rostoucí v $\left(-\infty, -1\right)$ a $(2, +\infty)$ klesající v $(-1,2)$]

2) Pomocí první derivace určete intervaly monotónnosti funkce.

$f: y = -x^2 + 8x - 15$

$$g: y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 2$$

[*f:* rostoucí v $\left(-\infty, 4\right)$, klesající v $(4, +\infty)$

g: rostoucí v $\left(-\infty, -3\right)$ a $(1, +\infty)$ klesající v $(-3,1)$]

3) Pomocí první derivace určete intervaly monotónnosti funkce.

$$f: y = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$$

$g: y = \ln(2x - 4)^2$

[*f:* klesající v $(-\infty, -1), (-1,1), (1, +\infty)$

g: rostoucí v $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$, klesající v $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$]

4) Pomocí první derivace určete intervaly monotónnosti funkce.

$$f: y = -\frac{2x}{x^2 - 4}$$

$g: y = \log_2(x - 1)^2$

[*f:* rostoucí v $(-\infty, -2), (-2,2), (2, +\infty)$

g: rostoucí v $(2, +\infty)$, klesající v $(1,2)$]

Průběh funkce – extrémy funkce

Varianta B

Pomocí vlastností funkce a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 1}$$

Výsledek řešení:

$$f = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 1$$

$$f' = 6x^2 - 30x + 36$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 6x^2 - 30x + 36 \Rightarrow 6(x-2)\cdot(x-3) = 0$$

Stacionární body jsou $x_1 = 2;\ x_2 = 3$, jsou to body podezřelé z extrémů funkce. Zkoumejme vlastnost funkce kolem těchto bodů:

$$\boldsymbol{f(2) = 2\cdot 2^3 - 15\cdot 2^2 + 36\cdot 2 - 1 = 27}$$

$$f(0) = 2\cdot 0^3 - 15\cdot 0^2 + 36\cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow f(0) < f(2)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 15\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 36\cdot\left(\frac{5}{2}\right) - 1 = 26{,}5 \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) < f(2)$$

$$f(x) < f(x_1)$$

Funkční hodnoty funkce *f* v okolí bodu 2 jsou menší než funkční hodnota funkce v bodě 2.

Funkce má v bodě $x_1 = 2$ maximum.

$$\boldsymbol{f(3) = 2\cdot 3^3 - 15\cdot 3^2 + 36\cdot 3 - 1 = 26}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 15\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 36\cdot\left(\frac{5}{2}\right) - 1 = 26{,}5 \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) > f(3)$$

$$f(10) = 2\cdot(10)^3 - 15\cdot(10)^2 + 36\cdot(10) - 1 = 859 \Rightarrow f(10) > f(3)$$

$$f(x) > f(x_2)$$

Funkční hodnoty funkce *f* v okolí bodu 3 jsou větší než funkční hodnota funkce v bodě 3.

Funkce má v bodě $x_2 = 3$ minimum.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí vlastností funkce a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 3\,x^2 - 24\,x + 1}$$

[*f*: maximum v bodě $x = -2$, minimum v bodě $x = 4$]

2) Pomocí vlastností funkce a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = 2x^3 - 21\,x^2 - 180x + 30}$$

[*f*: maximum v bodě $x = -3$, minimum v bodě $x = 10$]

3) Pomocí vlastností funkce a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = -2x^3 - 24\,x^2 - 72x + 6}$$

[*f*: maximum v bodě $x = -2$, minimum v bodě $x = -6$]

4) Pomocí vlastností funkce a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = -2x^3 + 247x^2 - 84x + \sqrt{2}}$$

[*f*: maximum v bodě $x = 7$, minimum v bodě $x = 2$]

Průběh funkce – extrémy funkce

Varianta C

Pomocí první derivace a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - x^2 - 21x + 45}$$

Výsledek řešení:

$$f = x^3 - x^2 - 21x + 45$$

$$f' = 3x^2 - 2x - 21$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 3x^2 - 2x - 21 \Rightarrow 3(x-3) \cdot \left(x + \frac{7}{3}\right) = 0$$

Stacionární body jsou $x_1 = 3;\ x_2 = -\frac{7}{3}$, jsou to body podezřelé z extrémů funkce.

Zkoumejme vlastnost funkce kolem těchto bodů pomocí první derivace:

$$\boldsymbol{x_1 = 3}$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 21 = -21 \Rightarrow f'(0) < 0$$

$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 - 21 = 19 \Rightarrow f'(0) > 0$$

V okolí stacionárního bodu $\boldsymbol{x_1 = 3}$ mění první derivace znaménko z minus na plus.

Funkce se mění z klesající na rostoucí, proto v bodě $x_1 = 3$ existuje minimum.

$$\boldsymbol{x_2 = -\frac{7}{3}}$$

$$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 21 = 35 \Rightarrow f'(0) > 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 21 = -21 \Rightarrow f'(0) < 0$$

V okolí stacionárního bodu $\boldsymbol{x_2 = -\frac{7}{3}}$ mění první derivace znaménko z plus na minus.

Funkce se mění z rostoucí na klesající, proto v bodě $x_2 = -\frac{7}{3}$ existuje maximum.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí první derivace a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 147x + 10}$$

[*f:* maximum v bodě $x = -7$, minimum v bodě $x = 7$]

2) Pomocí první derivace a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = -x^3 + 6x^2 + 15x - 4}$$

[*f:* maximum v bodě $x = 5$, minimum v bodě $x = -1$]

3) Pomocí první derivace a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^3}{x^2 - 3}}$$

[*f:* maximum v bodě $x = -3$ minimum v bodě $x = 3$]

4) Pomocí první derivace a stacionárního bodu určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2}{x - 3}}$$

[*f:* maximum v bodě $x = 0$ minimum v bodě $x = 6$]

Diferenciální počet

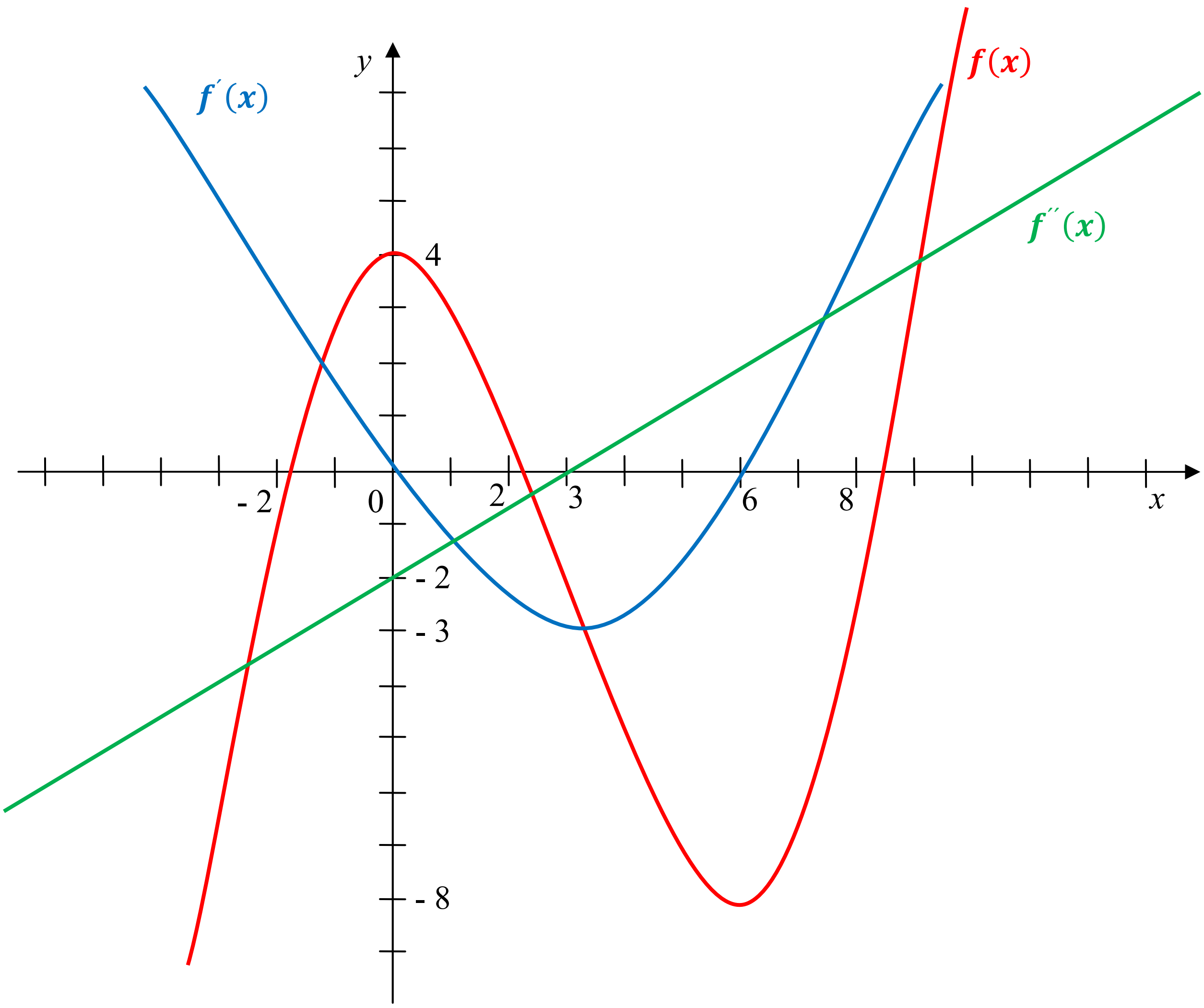
Průběh funkce

<u>Extrémy funkce a 2. derivace</u>

Pomocí 1. derivace lze určovat extrémy funkce, pokud vyšetříme vlastnosti funkce v okolí stacionárního bodu. Pokud dochází ke změně znaménka první derivace funkce v okolí stacionárního bodu, pak v tomto bodě existuje extrém.

Lokální extrém lze určit pomocí 2. derivace, pokud je to výhodné a jednodušší než znaménkové změny pomocí 1. derivace. Pokud je výpočet 2. derivace jednodušší než určování znaménkové změny.

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 4$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x$ $\quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$



Z grafu funkce $f^{'}(x)$, lze určit, kde nabývá funkce kladných hodnot, kde záporných, kde je rovna nule. Podle tohoto průběhu můžeme určit, kde je funkce $f(x)$ monotónní a její lokální extrémy.

Pomocí grafu $f^{''}(x) = \frac{2}{3}x - 2$ určíme extrémy funkce $f(x)$.

$\forall x \in (-\infty, 3)$ je $f^{''}(x) < 0$ - $f(x)$ má v tomto intervalu maximum.

$\forall x \in (3, +\infty)$ je $f^{''}(x) > 0$ - $f(x)$ má v tomto intervalu minimum.

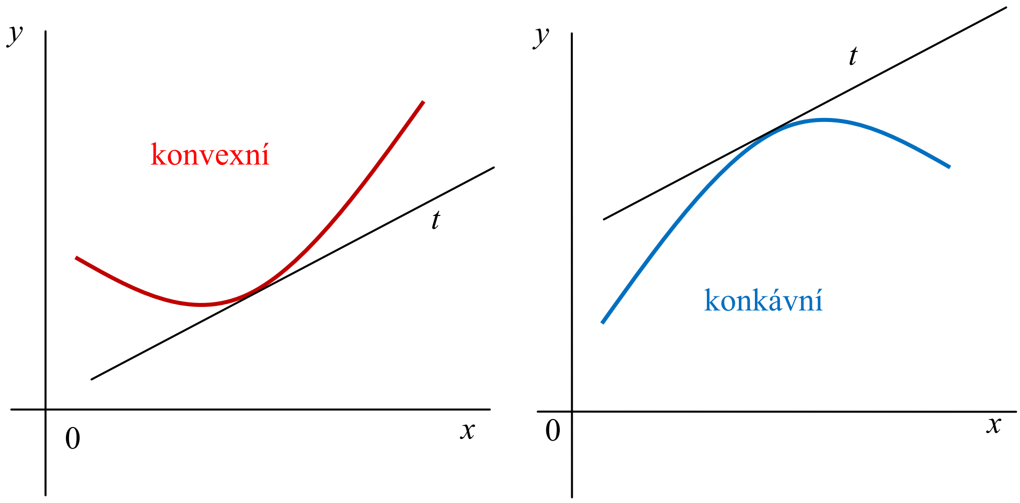
Nechť $f^{'}(x) = 0$ ***a nechť existuje v bodě*** x_0 ***druhá derivace.***

Je-li $f^{''}(x) < 0$***, má funkce f v bodě*** x_0 ***ostré lokální maximum, je-li*** $f^{''}(x) > 0$***, má funkce f v bodě*** x_0 ***ostré lokální minimum.***

Je-li $f^{''}(x) = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Potom je třeba zjistit existenci extrému funkce pomocí znaménkové změny 1. derivace v okolí bodu x_0.

Konvexnost a konkávnost funkce

Grafy funkcí mohou být na svém definičním oboru, nebo na podmnožině tohoto definičního oboru konkávní, nebo konvexní.



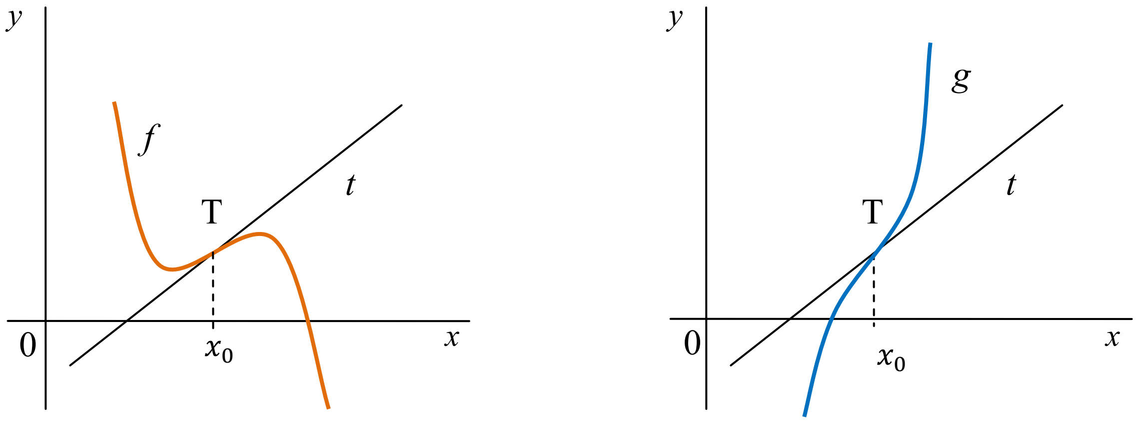
Kdybychom sestrojovali k těmto grafům tečny v libovolných bodech, pak v prvním případě vždy leží graf funkce nad tečnou, ve druhém případě vždy leží graf funkce pod tečnou.
Obě dvě funkce jsou rostoucí, ale z hlediska tečen jsou opačné.

Funkce f, která má derivaci v bodě x_0, je v bodě $[x_0, f(x_0)]$ konvexní, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu x_0, že $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$ leží body grafu funkce f nad tečnou sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
Funkce f, která má derivaci v bodě x_0, je v bodě $[x_0, f(x_0)]$ konkávní, existuje-li takové okolí $U(x_0)$ bodu x_0, že $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$ leží body grafu funkce f pod tečnou sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Je-li $f''(x) > 0$, pak je funkce f v bodě x_0 konvexní.
Je-li $f''(x) < 0$, pak je funkce f v bodě x_0 konkávní.

Jestliže v každém bodě intervalu platí, že $f''(x) > 0$, pak je funkce f v intervalu konvexní.
Jestliže v každém bodě intervalu platí, že $f''(x) < 0$, pak je funkce f v intervalu konkávní.

Inflexní body



Oba grafy funkce mají tečnu. Graf funkce *f* přechází z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou. V levém okolí bodu x_0 je funkce *f* konvexní, a v pravém okolí bodu x_0 je konkávní. Graf funkce g přesně naopak.

Bod *T* je významným bodem grafů obou funkcí, protože je bodem, ve kterém grafy obou funkcí mění výrazně svůj průběh.

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivaci. Přechází-li v tomto bodě graf funkce f z polohy nad tečnou do polohy pod tečnou nebo z polohy pod tečnou do polohy nad tečnou nazýváme bod x_0 inflexní bod funkce f.

V okolí inflexního bodu x_0 bude 2. derivace funkce $f''(x)$ měnit znaménko, pokud bude existovat.

$f''(x)$ se mění z plus na minus – konvexní na konkávní.

$f''(x)$ se mění z minus na plus – konkávní na konvexní.

Hodnota 2. derivace v inflexním bodě bude rovna 0.

Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce f a má-li funkce f v tomto bodě druhou derivaci, pak $f''(x) = 0$.

Obrácená věta neplatí. Řešením rovnice $f''(x) = 0$ získáme body, které by mohly být body inflexními. Jistotu získáme až po zjištění znaménkových změn druhé derivace v okolí těchto bodů.

Nechť funkce f má druhou derivaci v každém bodě v okolí bodu $\mathrm{U}(x_0, \delta)$. Nechť tato druhá derivace $f''(x)$ má v intervalech $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ různá znaménka, pak bod x_0 je inflexním bodem funkce f.

Průběh funkce – extrémy funkce pomocí 2. derivace

Varianta A

Pomocí druhé derivace určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f : y = x^4 - x^3}$$

Výsledek řešení:

$$f = x^4 - x^3$$

$$f' = 4x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = 4x^3 - 3x^2$$

$$\boldsymbol{x^2} \cdot (4x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{3}{4}$$

Stacionární body jsou $x_1 = 0; x_2 = \frac{3}{4}$ jsou to body podezřelé z extrémů funkce. Pomocí druhé derivace zkoumejme vlastnosti těchto bodů:

$$f'' = 12x^2 - 6x$$

$$\boldsymbol{x_1 = 0}$$

$$f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$$

Na základě vlastnosti 2. derivace nemůžeme rozhodnout, zda v tomto bodě je maximum, nebo minimum a musíme si pomoci první derivací:

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -7 \Rightarrow f'(-1) < 0$$

$$f'(0{,}5) = 4 \cdot (0{,}5)^3 - 3 \cdot (0{,}5)^2 = -0{,}25 \Rightarrow f'(0{,}5) < 0$$

První derivace funkce nemění v okolí bodu $x_1 = 0$ znaménko, proto v tomto bodě funkce nenabývá žádného extrému.

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{3}{4}}$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} \Rightarrow f''(0) > 0$$

Druhá derivace funkce nabývá v bodě $\boldsymbol{x_2 = \frac{3}{4}}$ kladných hodnot, proto funkce nabývá v tomto bodě minima.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Pomocí druhé derivace určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = 2x^3 - 21x^2 - 48x + \sqrt{10}}$$

[*f*: maximum v bodě $x = -1$, minimum v bodě $x = 8$]

2) Pomocí druhé derivace určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = 6x^3 - 12x + 3}$$

[*f*: maximum v bodě $x = -\sqrt{2}$, minimum v bodě $x = \sqrt{2}$]

3) Pomocí druhé derivace určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{2x^2}{x - 1}}$$

[*f*: maximum v bodě $x = 0$ minimum v bodě $x = 2$]

4) Pomocí druhé derivace určete maxima a minima funkce.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{3x^2}{x - 4}}$$

[*f*: maximum v bodě $x = 8$ minimum v bodě $x = 0$]

Průběh funkce – konvexnost a konkávnost funkce

Varianta B

Určete, ve kterých bodech a intervalech je funkce konvexní a konkávní.

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x-4}}$$

Výsledek řešení:

Pro určení konvexnosti a konkávnosti funkce potřebujeme znát nulové body druhé derivace a hodnoty druhé derivace funkce v okolí těchto bodů.

$$f' = \frac{2x \cdot (x-4) - x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

$$f'' = \frac{(2x-8) \cdot (x-4)^2 - (x^2-8x) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{32}{(x-4)^3}$$

$$f'' = \frac{32}{(x-4)^3}; x \neq 4$$

$$f'' = 0$$

$$\frac{32}{(x-4)^3} = 0 \Rightarrow x = \emptyset$$

Nulové body druhé derivace neexistuji, ale od $x = 4$, ve kterém není druhá derivace funkce definována rozděluje reálnou osu na dva intervaly s odlišnými vlastnostmi funkce.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti.

$$\boldsymbol{x \in (-\infty; 4)}$$

$f''(1) = \frac{32}{(1-4)^3} = -\frac{32}{27} < 0 \Rightarrow$ **v tomto intervalu je funkce konkávní.**

$$\boldsymbol{x \in (4; +\infty)}$$

$f''(5) = \frac{32}{(5-4)^3} = 32 > 0 \Rightarrow$ **v tomto intervalu je funkce konvexní.**

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete, ve kterých bodech a intervalech je funkce konvexní a konkávní.

$$\boldsymbol{f: y = -x^3 + 9x + 1}$$

[*f*: konkávní v intervalu $(-\infty; 0)$, konvexní v intervalu$(0; +\infty)$]

2) Určete, ve kterých bodech a intervalech je funkce konvexní a konkávní.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}}$$

[*f*: konkávní v intervalu $(-\infty; 1)$, konvexní v intervalu$(1; +\infty)$]

3) Určete, ve kterých bodech a intervalech je funkce konvexní a konkávní.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{\ln x}{x^2}}$$

[*f*: konkávní v intervalu $\left(0; \sqrt[6]{e^5}\right)$, konvexní v intervalu$\left(\sqrt[6]{e^5}; +\infty\right)$]

4) Určete, ve kterých bodech a intervalech je funkce konvexní a konkávní.

$$\boldsymbol{f: y = e^{-2x^2}}$$

[*f*: konkávní v intervalu $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, konvexní v intervalu$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ a $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$]

Průběh funkce – inflexní body funkce

Varianta C

Určete inflexní body funkce, pokud existují.

$$\boldsymbol{f: y = 2x^3 - 3x^2 - 336x + 1}$$

Výsledek řešení:

Nechť funkce f má druhou derivaci v každém bodě v okolí bodu $\boldsymbol{\cup(x_0, \delta)}$***. Nechť tato druhá derivace*** $\boldsymbol{f''(x)}$ ***má v intervalech*** $\boldsymbol{(x_0 - \delta, x_0)}$ ***a*** $\boldsymbol{(x_0, x_0 + \delta)}$ ***různá znaménka, pak bod*** $\boldsymbol{x_0}$ ***je inflexním bodem funkce f.***

$$f' = 6x^2 - 6x - 336$$

$$f'' = 12x - 6$$

$$f'' = 0$$

$$12x - 6 = 0 \Rightarrow 6 \cdot (2x - 1) = 0$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

$$f''(0) = 12 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$f''(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Bod $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$ je inflexním bodem funkce.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete inflexní body funkce, pokud existují.

$$\boldsymbol{f: y = 4x^4 - 2x^2 - 36x}$$

[inflexní body funkce $x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}; x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$]

2) Určete inflexní body funkce, pokud existují.

$$\boldsymbol{f: y = -x^4 - x^3 - 6x}$$

[inflexní body funkce $x = -\frac{1}{2}; x = 0$]

3) Určete inflexní body funkce, pokud existují.

$$\boldsymbol{f: y = \sin(2x - 4)}$$

[inflexní body funkce $x = 2 + k\pi;\ x = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) + k\pi$]

4) Určete inflexní body funkce, pokud existují.

$$\boldsymbol{f: y = \cos(4x - 2)}$$

[inflexní body funkce $x = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) + k \cdot \frac{\pi}{2};\ x = \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}\right) + k \cdot \frac{\pi}{2}$]

Diferenciální počet

Průběh funkce

Vyšetřování průběhu funkce

1. určení definičního oboru, vlastnost sudé, liché a periodické funkce.
2. body, ve kterých není funkce definována, ale má v nich jednostranné limity, výpočet těchto limit, limity v nevlastních bodech, intervaly spojitosti.
3. průsečíky s osami *x, y,* znaménka funkčních hodnot.
4. výpočet 1. derivace, nulové body 1. derivace a body, ve kterých není definována 1. derivace.
5. lokální extrémy, intervaly monotónnosti.
6. výpočet 2. derivace, nulové body 2. derivace a body, ve kterých není definována 2. derivace.
7. inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti.
8. asymptoty.
9. obor hodnot.
10. graf funkce.

<u>Užití derivace při výpočtu některých limit</u>

L´Hospitalovo pravidlo 1:

Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{\prime}(x)}{g^{\prime}(x)}$$

Potom existuje také

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{\prime}(x)}{g^{\prime}(x)}$$

L´Hospitalovo pravidlo 2:

Nechť $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje vlastní nebo nevlastní

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{\prime}(x)}{g^{\prime}(x)}$$

Potom existuje také

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a platí:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{\prime}(x)}{g^{\prime}(x)}$$

O $\lim_{x\to a} f(x)$ nepředpokládáme nic, ani existenci této limity.

Průběh funkce

Varianta A

Vyšetři průběh funkce: $\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$

1) Definiční obor, sudost lichost, periodičnost.

$$D(f) = R$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x)$$

$$-f(x) = -(x^3 - 2x) = -x^3 + 2x$$

$$-f(x) = f(-x) \Rightarrow lichá\ funkce$$

Funkce není periodická.

2) Body, ve kterých není funkce definována, ale má v nich jednostranné limity, výpočet těchto limit, limity v nevlastních bodech, intervaly spojitosti.

Funkce je definovaná na všech reálných číslech. Není třeba určovat jednostranné limity. Je spojitá.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\right] = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\right] = -\infty \cdot (1 - 0) = -\infty$$

3) Průsečíky s osami x, y. Znaménka funkčních hodnot.

Průsečíky s osou x:

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$0 = x^3 - 2x$$

$$0 = x \cdot (x^2 - 2)$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{2};\ x_3 = +\sqrt{2}$$

Průsečík s osou y:

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$y = 0^3 - 2 \cdot 0 = 0$$

Znaménka funkčních hodnot mezi nulovými body:

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \Rightarrow f(-10) = (-10)^3 - 2 \cdot (-10) = -980 < 0$$

$$\left(-\sqrt{2}; 0\right) \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = 1 > 0$$

$$\left(0; \sqrt{2}\right) \Rightarrow f(1) = (1)^3 - 2 \cdot (1) = -1 < 0$$

$$\left(\sqrt{2}; +\infty\right) \Rightarrow f(10) = (10)^3 - 2 \cdot (10) = 980 > 0$$

4) Výpočet 1. derivace, nulové body 1. derivace a body, ve kterých není definována 1. derivace.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$f' = 3x^2 - 2$$

$$0 = 3x^2 - 2 \Rightarrow 3x^2 = 2$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}};\ x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

5) Lokální extrémy, intervaly monotónnosti.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$f' = 3x^2 - 2$$

$$\left(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow rostoucí$$

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow f(0) = 3 \cdot (0)^3 - 2 = -2 < 0 \Rightarrow klesající$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; + \infty\right) \Rightarrow f(1) = 3 \cdot (1)^3 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow rostoucí$$

Extrémy:

$$f'' = 6x$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0 \Rightarrow maximum\ funkce$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 6 \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0 \Rightarrow minimum\ funkce$$

6) Výpočet 2. derivace, nulové body 2. derivace a body, ve kterých není definována 2. derivace.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$f'' = 6x$$

$$0 = 6x \Rightarrow x = 0$$

7) Inflexní body, intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Z druhé derivace vyplývá, že inflexním bodem je bod $x = 0$.

$$(-\infty; 0) \Rightarrow f''(-1) = 6 \cdot (-1) < 0 \Rightarrow konkávní$$

$$(0; +\infty) \Rightarrow f''(1) = 6 \cdot (1) > 0 \Rightarrow konvexní$$

8) Asymptoty

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x}$$

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3 - 2x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\right] = +\infty$$

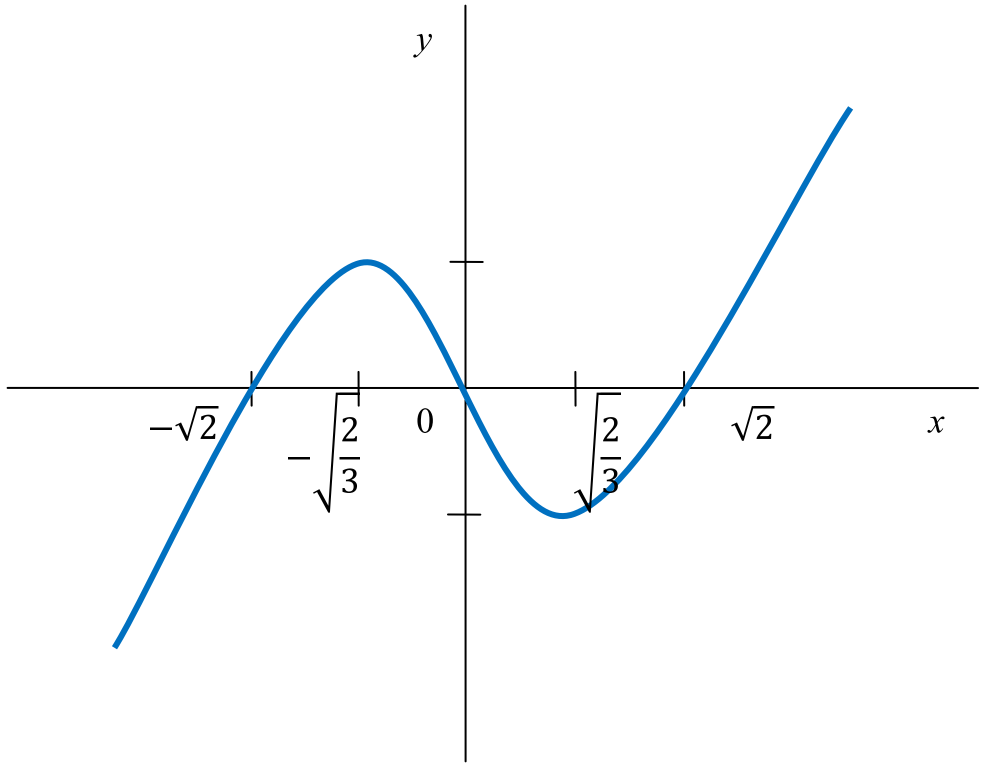
Asymptota se směrnicí neexistuje.

Asymptota bez směrnice také neexistuje.

9) Obor hodnot

$$H(f) = R$$

10) Graf funkce



***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

***Příklady k procvičení*:**

1) Určete průběh funkce a pokuste se nakreslit graf funkce.

$$\boldsymbol{f: y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

1) *$D(f) = R$, ani sudá ani lichá, funkce není periodická.*

2) *Funkce je spojitá.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

3) $x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3;\ y = 6$

$$(-\infty; -2) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$(-2; 1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(1; 3) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$(3; +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$$

4) $f' = 3x^2 - 4x - 5$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{19}}{3};\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{19}}{3}$$

5)

$$\left(-\infty; \frac{2 - \sqrt{19}}{3}\right) \Rightarrow rostoucí$$

$$\left(\frac{2 - \sqrt{19}}{3}; \frac{2 + \sqrt{19}}{3}\right) \Rightarrow klesající$$

$$\left(\frac{2 + \sqrt{19}}{3} + \infty\right) \Rightarrow rostoucí$$

Extrémy:

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \Rightarrow maximum\ funkce$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{19}}{3} \Rightarrow minimum\ funkce$$

6) $f'' = 6x - 4 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

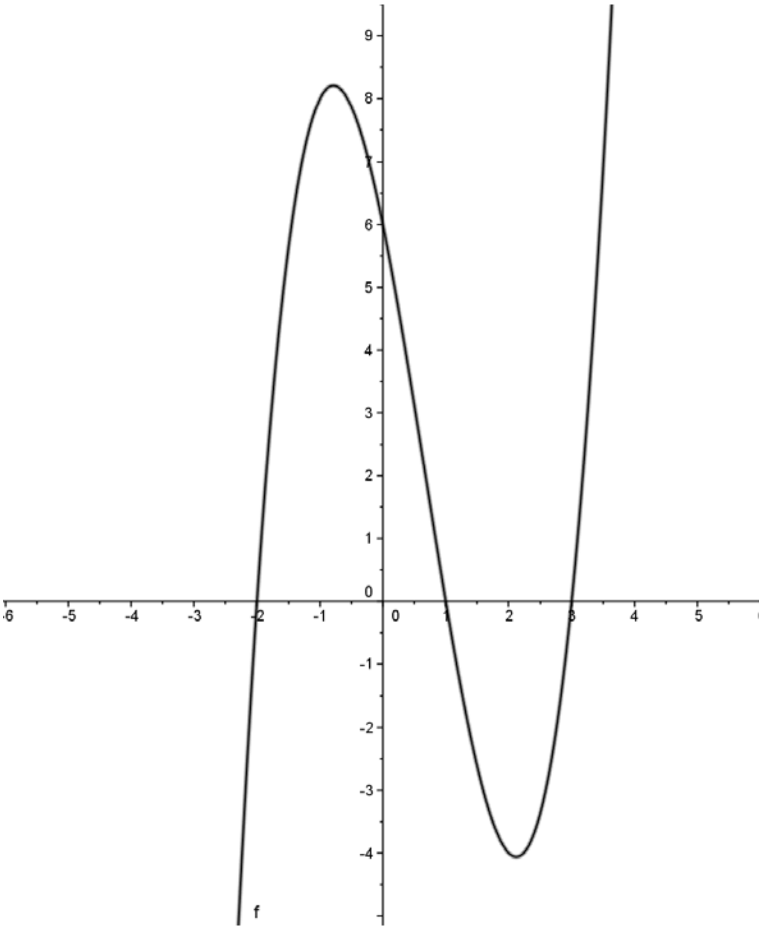
7) Inflexní bod je $x = \frac{2}{3}$.

$$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow konkávní$$

$$\left(\frac{2}{3}; +\infty\right) \Rightarrow konvexní$$

8) *Asymptota se směrnicí neexistuje. Asymptota bez směrnice také neexistuje.*

9) $H(f) = R$



2) Určete průběh funkce a pokuste se nakreslit graf funkce.

$$\boldsymbol{f\colon y = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6}$$

1) *$D(f) = R$, ani sudá ani lichá, funkce není periodická.*

2) *Funkce je spojitá.*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

3) $x_1 = -3;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2;\ y = 6$

$$(-\infty; -3) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(-3; -1) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$(-1; 2) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(2; +\infty) \Rightarrow f(x) < 0$$

4) $f' = -3x^2 - 4x + 5$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3};\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}$$

5)

$$\left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{19}}{3}\right) \Rightarrow klesající$$

$$\left(\frac{-2 - \sqrt{19}}{3}; \frac{-2 + \sqrt{19}}{3}\right) \Rightarrow rostoucí$$

$$\left(\frac{-2 + \sqrt{19}}{3}; +\infty\right) \Rightarrow klesající$$

Extrémy:

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{19}}{3} \Rightarrow minimum\ funkce$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{3} \Rightarrow maximum\ funkce$$

6) $f'' = -6x - 4 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

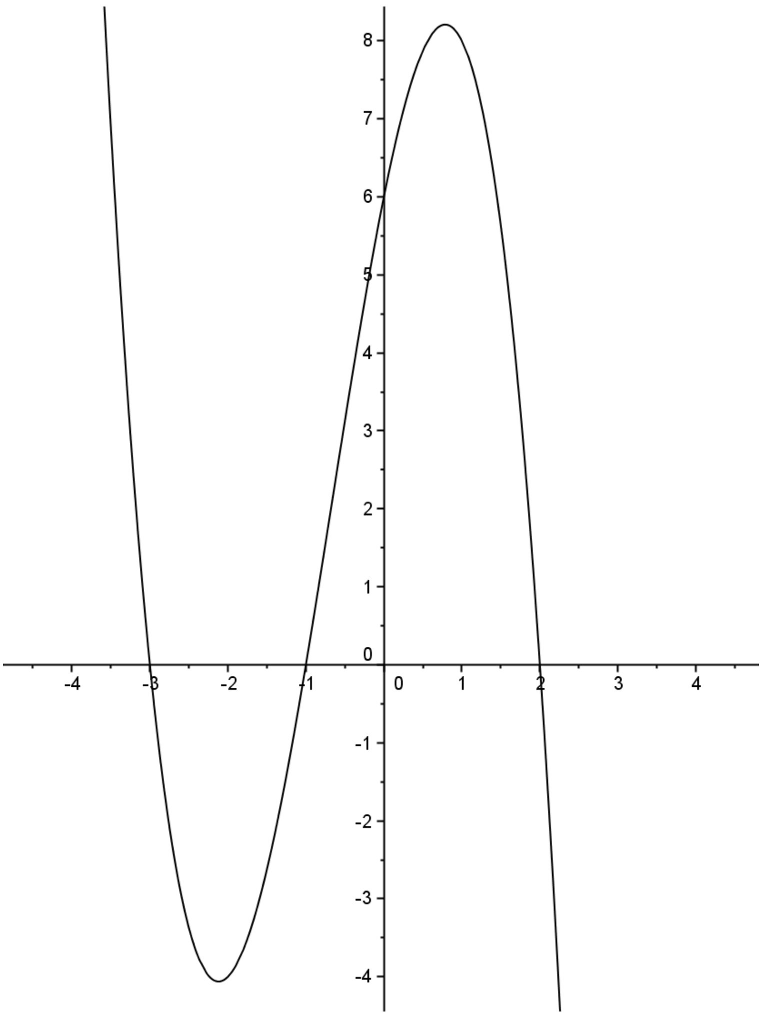
7) Inflexní bod je $x = -\frac{2}{3}$.

$$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow konvexní$$

$$\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right) \Rightarrow konkávní$$

8) *Asymptota se směrnicí neexistuje. Asymptota bez směrnice také neexistuje.*

9) $H(f) = R$



3) Určete průběh funkce a pokuste se nakreslit graf funkce.

$$\boldsymbol{f: y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}$$

1) $D(f) = R - \{-1\}$*, Ani sudá ani lichá, funkce není periodická.*

2) *Funkce není spojitá. Bod nespojitosti je* $x = -1$*. Intervaly spojitosti jsou* $(-\infty;\ -1), (-1; +\infty)$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

3) $x_1 = 1;\ y = 1$

$$(-\infty; -1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(-1; 1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(1; +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$$

4)

$$f' = \frac{4x-4}{(x+1)^3}$$

$$x \neq -1;\ x_1 = 1$$

5)

$$(-\infty; -1) \Rightarrow rostoucí$$

$$(-1; 1) \Rightarrow klesající$$

$$(1; +\infty) \Rightarrow rostoucí$$

Extrémy:

$$x_1 = 1 \Rightarrow minimum\ funkce$$

6)

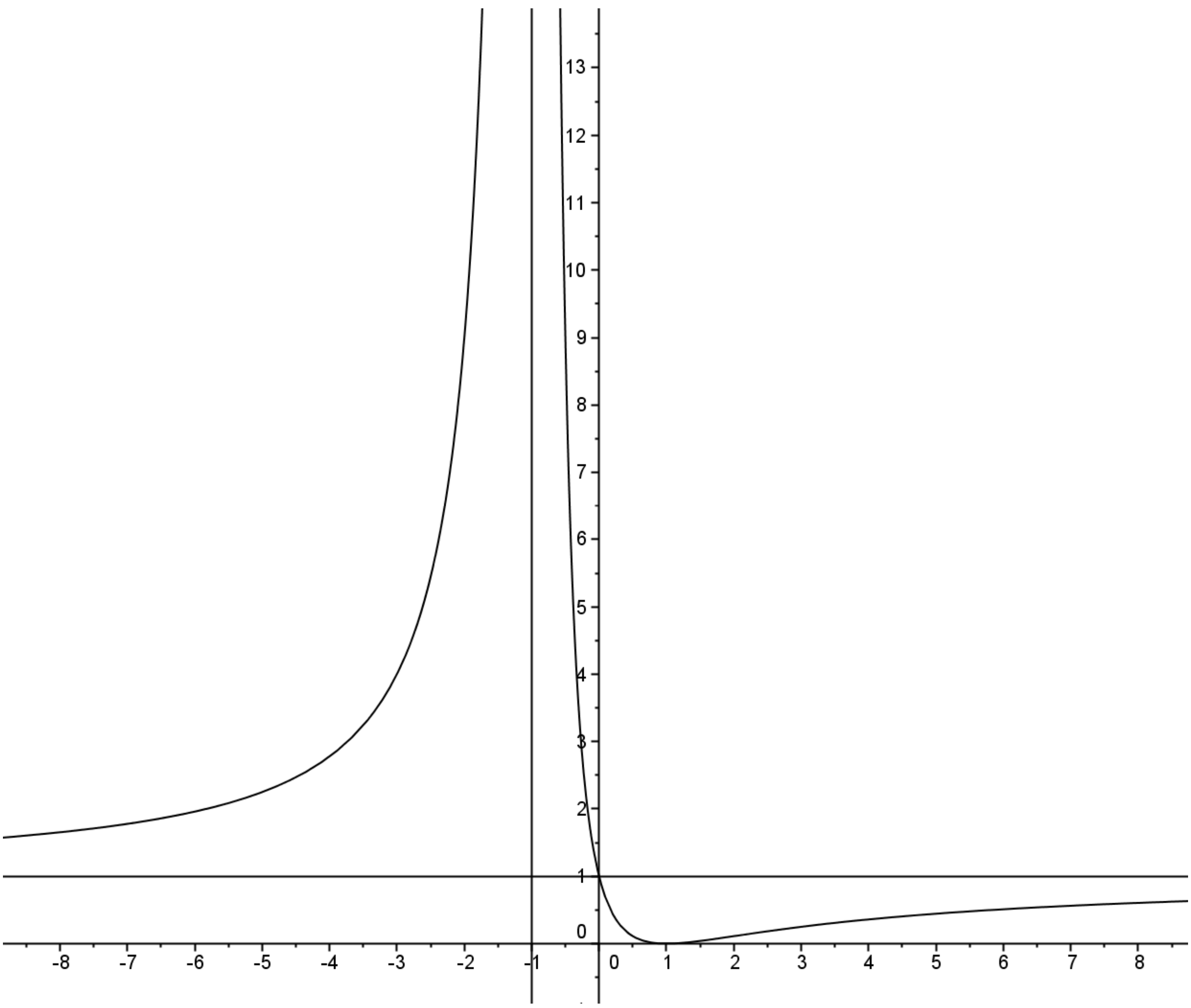
$$f'' = \frac{16 - 8x}{(x+1)^4}; x \neq -1;\ x_1 = -2$$

7) Inflexní bod není.

$$(-\infty; -2) \Rightarrow konvexní$$
$$(-2; +\infty) \Rightarrow konvexní$$

8) *Asymptota se směrnicí je* $y = 1$. *Tato asymptota protne graf funkce v jednom bodě. Asymptota bez směrnice je* $x = -1$.

9) $H(f) = \langle 0; +\infty)$



4) Určete průběh funkce a pokuste se nakreslit graf funkce.

$$\boldsymbol{f: y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$

1) *$D(f) = R$. Ani sudá ani lichá, funkce není periodická.*

2) *Funkce je spojitá.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

3) $x_1 = 1;\ y = 1$

$$(-\infty; 1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$(1; +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$$

4)

$$f' = \frac{2 \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = 1$$

5)

$$(-\infty; -1) \Rightarrow rostoucí$$

$$(-1; 1) \Rightarrow klesající$$

$$(1; +\infty) \Rightarrow rostoucí$$

Extrémy:

$$x_1 = -1 \Rightarrow maximum\ funkce$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow mimimum\ funkce$$

6)

$$f'' = \frac{4x \cdot (3-x^2)}{(x^2+1)^3};\ x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = 0$$

7) Inflexní body jsou $x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = \sqrt{3};\ x_3 = 0$

$$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \Rightarrow konvexní$$

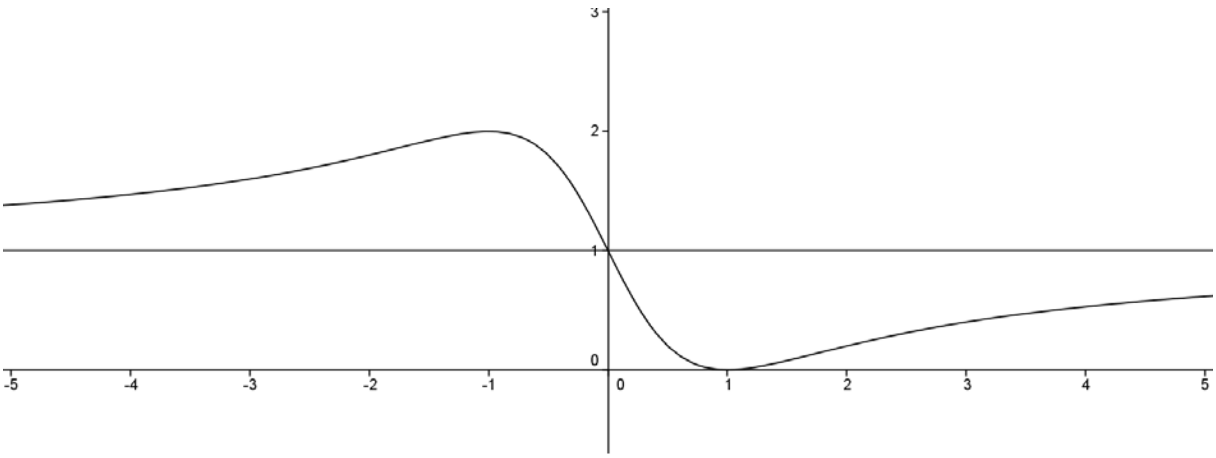
$$\left(-\sqrt{3}; 0\right) \Rightarrow konkávní$$

$$\left(0; \sqrt{3}\right) \Rightarrow konvexní$$

$$\left(\sqrt{3}; +\infty\right) \Rightarrow konkávní$$

8) *Asymptota se směrnicí je* $y = 1$*.Tato asymptota protne graf funkce v jednom bodě. Asymptota bez směrnice neexistuje.*

9) $H(f) = \langle 0; 2\rangle - \{1\}$



Průběh funkce

Varianta B

Vypočtěte následující limitu podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$$

Výsledek řešení:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0}$$

Po dosazení za proměnnou x, dostáváme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$. Pro výpočet limity použijeme prvního L´Hopitalova pravidla.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} x = 1$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-8x+15}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$$

$[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

2) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x + \ln x - 2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x \cdot \sin x}$$

$[\frac{1}{3}; 0]$

3) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{(e^x - 1) \cdot x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\sin^3 x}$$

$[\frac{1}{2}; \frac{1}{6}]$

4) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \ln x - x + 1}{(x - 1) \cdot \ln x}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

$[\frac{1}{2}; 0]$

Průběh funkce

Varianta C

Vypočtěte následující limitu podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{x\cdot\ln x}}{\boldsymbol{x^2+x+1}}$$

Výsledek řešení:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

Po dosazení za proměnnou x, dostáváme neurčitý výraz $\frac{+\infty}{+\infty}$. Pro výpočet limity použijeme druhého L´Hopitalova pravidla.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f´(x)}{g´(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x+1}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

L´Hopitalova pravidlo použijeme ještě jednou.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{\ln x}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}}$$

[0]

2) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}$$

[0]

3) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$$

[1]

4) Vypočtěte následující limity podle L´Hopitalova pravidla

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}$$

$[\frac{1}{3}]$

Diferenciální počet

Užití diferenciálního počtu

Tečna a normála grafu funkce

Nalezení rovnice tečny a normály grafu dané funkce pomocí diferenciálního počtu. Tečna a normála grafu funkce jsou k sobě kolmé.

Mají-li přímky ***p, q*** po řadě směrnice k_1, k_2 pak platí:

$p \perp q \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

Označíme-li k_t směrnici tečny a k_n směrnici normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v jeho bodě $[x_0, y_0]$ pak platí:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$f'(x_0) \neq 0$$

Pro rovnici tečny dostáváme:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Pro rovnici normály dostáváme:

$$y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Obsahy a obvody rovinných útvarů

U rovinných útvarů se setkáváme se dvěma typy úloh.

1) Hledáme útvar, který má při daném obvodu maximální obsah.

2) Vepisujeme do daného útvaru jiný útvar maximálního obsahu.

Povrchy a objemy těles

U těles hledáme tvar tělesa, které bude mít minimální povrch při daném objemu. Nebo nalezení tělesa s maximálním objemem při daném povrchu. Případně vepsat danému tělesu jiné těleso maximálního objemu.

Užití diferenciálního počtu

Varianta A

Ve kterém bodě má graf funkce $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - 4}$ tečnu se směrnicí 2? Napište rovnici tečny a normály v tomto bodě.

Výsledek řešení:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{4}}$$

$$f'(x_0) = 2$$

$$f' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2 - 4}} = 2 \Rightarrow x_0 = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Hledanou souřadnicí bodu x_0 je

$$x_0 = +\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$y_0 = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tečný bod, který leží na grafu funkce $f: y = \sqrt{x^2 - 4}$ je, $T = \left[\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$.

Rovnice tečny:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \left(x - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$y = 2x - \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2x - y - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Rovnice normály:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + 2y - \frac{8}{\sqrt{3}} = 0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Ve kterém bodě má graf funkce $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$ tečnu se směrnicí 3? Napište rovnici tečny a normály v tomto bodě.

$[y = 3x - 1; 3y + x - 7 = 0; T[1; 2]]$

2) Ve kterém bodě má graf funkce $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{y} = \mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ tečnu se směrnicí -6? Napište rovnici tečny a normály v tomto bodě.

$[y = -6x; 2x - 12y + 37 = 0; T\left[-\frac{1}{2}; 1\right]]$

3) Určete rovnici tečny a normály v bodě $x_1 = -1$, křivky

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{2}(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}}$$

$[y = 2x + 2; x + 2y + 1 = 0; T[-1; 0]]$

4) Určete rovnici tečny a normály v bodě $x_1 = 2$, křivky

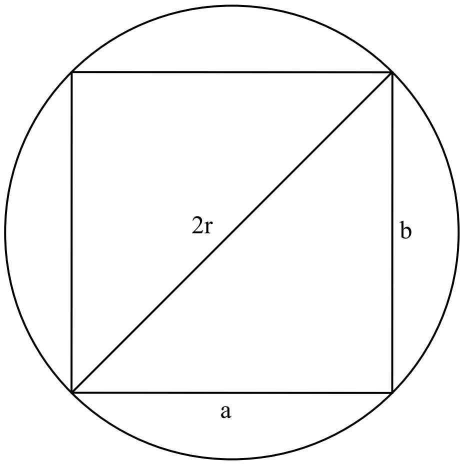
$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})}{\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}$$

$[9y = 7x - 8; 2x - 12y + 37 = 0; T\left[2; \frac{2}{3}\right]]$

Užití diferenciálního počtu

Varianta B

Do kruhu o poloměru $r = 10cm$ vepište obdélník největšího obsahu.



$$a^2 = 4r^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

Výsledek řešení:

Obvod kruhu $O = 2\pi \cdot r$

Obsah obdélníku $S = a \cdot b$

$$a^2 = 4r^2 - b^2$$

Vzorec pro výpočet obsahu obdélníků je předpis funkce, která obsahuje dvě neznámé, a, b kdy jednu proměnnou musíme nahradit pomocí známých veličin, abychom dostali funkci jedné neznámé.

$$S = \sqrt{4r^2 - b^2} \cdot b$$

Postupujeme při výpočtu, jako bychom hledali maximum dané funkce (obsah má být co největší), neznámá je strana b.

$$S' = \sqrt{4r^2 - b^2} + b \cdot \frac{-b}{\sqrt{4r^2 - b^2}} = \frac{4r^2 - 2b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

$$\frac{4r^2 - 2b^2}{\sqrt{4r^2 - b^2}} = 0$$

$$4r^2 = 2b^2 \Rightarrow b = r \cdot \sqrt{2}$$

Ověříme, zda stacionární bod je opravdu bodem maxima.

$$S''(b) = \frac{-12br^2 + 2b^3}{\sqrt{4r^2 - b^2} \cdot (4r^2 - b^2)}$$

$$S''(r\cdot\sqrt{2}) = \frac{-12(r\cdot\sqrt{2})r^2 + 2(r\cdot\sqrt{2})^3}{\sqrt{4r^2-(r\cdot\sqrt{2})^2}\cdot\left(4r^2-(r\cdot\sqrt{2})^2\right)} < 0$$

$$\Rightarrow v\ bodě\ b = r\cdot\sqrt{2}\ existuje\ maximum$$

$$a^2 = 4r^2 - b^2$$

$$a^2 = 4r^2 - (r\cdot\sqrt{2})^2 \Rightarrow a = r\cdot\sqrt{2}$$

Obdélník největšího obsahu bude čtverec o straně $a = 10\cdot\sqrt{2}$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Do kruhu o poloměru $r = 5cm$ vepište obdélník největšího obvodu.

[Obdélní největšího obvodu bude čtverec o straně $a = 5\cdot\sqrt{2}$]

2) Do půlkruhu o poloměru $r = 6cm$ vepište obdélník největšího obsahu.

[Obdélní největšího obsahu o stranách$a = 3\cdot\sqrt{2};\ b = 6\cdot\sqrt{2}$]

3) Určete rozměry obdélníkového dvora s co největším obsahem, máme-li k oplocení $200\ m$ pletiva a jednu stranu dvora tvoří stěna budovy.

[$a = 50\ m;\ b = 100\ m$]

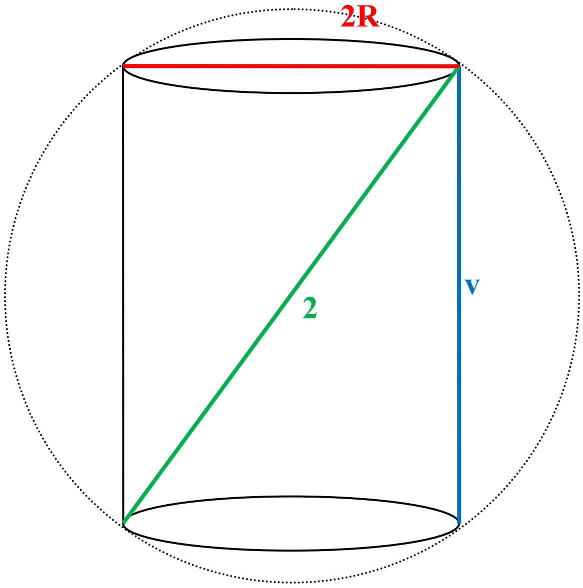
4) Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníku a půlkruhu. Obvod půdorysu je 40 m. Určete rozměry půdorysu, víte-li, že byly stanoveny tak, aby obsah půdorysu jeviště byl co největší.

[$r = v = \frac{40}{4+\pi}m$]

Užití diferenciálního počtu

Varianta C

Do koule o poloměru $r = 10cm$ vepište válec největšího povrchu.



Výsledek řešení:

Povrch válce $S = 2\pi \cdot R^2 + 2\pi \cdot R \cdot v = 2\pi \cdot R \cdot (R + v)$

$$r^2 = R^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 = r^2 - \frac{v^2}{4}$$

Vzorec pro výpočet povrchu válce je předpis funkce, která obsahuje dvě neznámé, R, v kdy jednu proměnnou musíme nahradit pomocí známých veličin, abychom dostali funkci jedné neznámé.

$$S = 2\pi \cdot \left(r^2 - \frac{v^2}{4}\right) + 2\pi \cdot v\sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}} = 2\pi \cdot r^2 - \frac{\pi v^2}{2} + 2\pi \cdot v\sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}}$$

Postupujeme při výpočtu, jako bychom hledali maximum dané funkce (povrch má být co největší), neznámá je výška válce *v*.

$$S' = -\pi v + \frac{2\pi \cdot \left(r^2 - \frac{v^2}{2}\right)}{\sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}}}$$

$$-\pi v + \frac{2\pi \cdot \left(r^2 - \frac{v^2}{2}\right)}{\sqrt{r^2 - \frac{v^2}{4}}} = 0$$

$$5v^4 - 20r^2v^2 + 16r^4 = 0 \Rightarrow v_{1,2}^2 = 2r^2 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}r^2$$

$$v_{1,2}^2 = 50 \pm 10\sqrt{5}$$

Ověříme, zda stacionární bod je opravdu bodem maxima.

$$v_1^2 = 50 + 10\sqrt{5}$$

$$S'(8) = -8\pi + \frac{2\pi \cdot (25 - 32)}{\sqrt{25 - 16}} = -\frac{38}{3}\pi < 0$$

$$S'(9) = -9\pi + \frac{2\pi \cdot (25 - 40{,}5)}{\sqrt{25 - 20{,}25}} > 0$$

$$\Rightarrow v\ bodě\ v_1^2 = 50 + 10\sqrt{5}\ neexistuje\ maximum$$

$$v_2^2 = 50 - 10\sqrt{5}$$

$$S'(4) = -4\pi + \frac{2\pi \cdot (25 - 8)}{\sqrt{25 - 4}} > 0$$

$$S'(6) = -6\pi + \frac{2\pi \cdot (25 - 18)}{\sqrt{25 - 9}} < 0$$

$$\Rightarrow v\ bodě\ v_2^2 = 50 - 10\sqrt{5}\ existuje\ maximum$$

$$R^2 = r^2 - \frac{v^2}{4}$$

$$R = 12{,}5 + \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Válec největšího povrchu bude o rozměrech

$$v_2^2 = 50 - 10\sqrt{5};\ R = 12{,}5 + \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

***Příklady k procvičení*:**

1) Do koule o poloměru $r = 10cm$ vepište rotační kužel největšího objemu.

$$[v = \frac{40}{3}cm, R = \frac{20\sqrt{2}}{3}cm]$$

2) Drát délky 5 m rozdělte na dva díly. Z jednoho dílu udělejte kružnici, z druhého čtverec. Vypočtěte poměr délek obou dílů drátu, má-li být součet obsahů kruhu a čtverce největší.

$$[x: (5 - x) = 4: \pi]$$

3) Z kmene tvaru rotačního komolého kužele délky 20 m a průměrů 1 m a 0,5 m máme vytesat trám čtvercového průřezu tak, aby měl největší objem.

$$[a = \frac{\sqrt{2}}{4}m]$$

4) Plechový žlab má průřez rovnoramenného lichoběžníku. Menší základna a obě ramena mají stejnou délku 30 cm. Jak široký musí být žlab nahoře, aby pojal co nejvíce vody.

$$[60cm]$$