ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Gymnázium Jiřího Wolkera v Prostějově

Výukové materiály z matematiky pro vyšší gymnázia

Autoři projektu Student na prahu 21. století - využití ICT ve vyučování matematiky na gymnáziu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Prostějov 2010

Úvod

Vytvořený výukový materiál pokrývá předmět matematika, která je vyučována v osnovách a tematických plánech na gymnáziích nižšího a vyššího stupně. Mohou ho však využít všechny střední a základní školy, kde je vyučován předmět matematika, a které mají dostatečné technické vybavení a zázemí.

Cílová skupina:

Podle chápání a schopností studentů je stanovena úroveň náročnosti vzdělávacího plánu a výukových materiálů. Zvláště výhodné jsou tyto materiály pro studenty s individuálním studijním plánem, kteří se nemohou pravidelně zúčastňovat výuky. Tito studenti mohou s pomocí našich výukových materiálů částečně kompenzovat svou neúčast ve vyučovaném předmětu matematika, formou e-learningového studia.

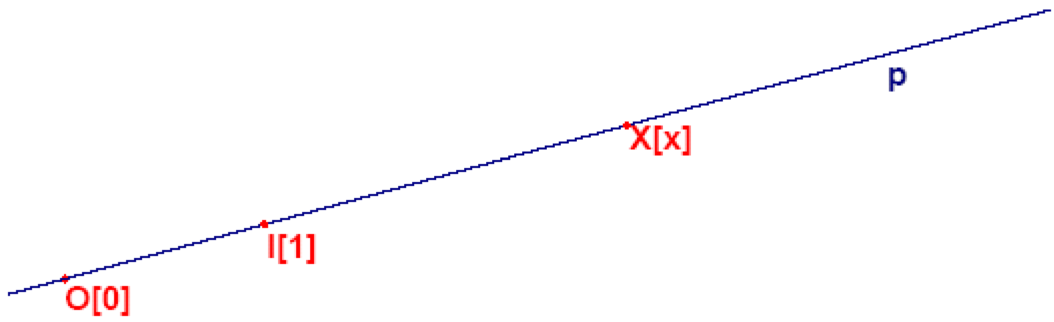
Obsah

Analytická geometrie

Souřadnice

Soustava souřadnic na přímce

Na libovolné přímce p zvolíme bod O a bod I tak, aby $|OI|=1$. Pak každému bodu X této přímky přiřadíme reálné číslo $x = |OX|$, pokud bod X leží na polopřímce OI, nebo číslo $x = -|OX|$, pokud bod X leží na polopřímce opačné. Tuto přímku nazýváme ČÍSELNOU OSOU, bod O se nazývá počátek soustavy souřadnic na přímce p.



Soustava souřadnic v rovině

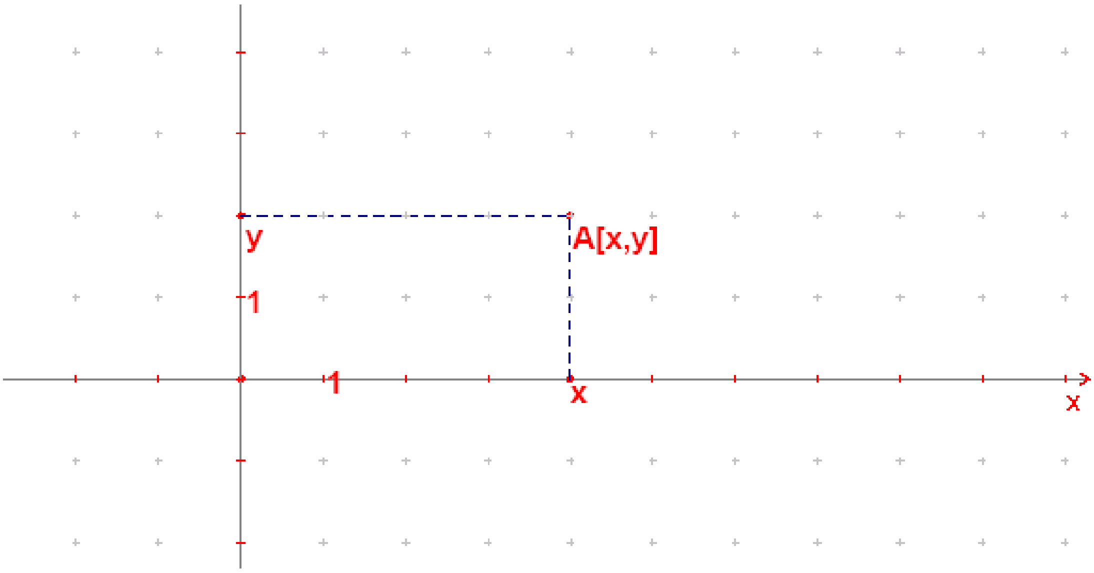
Dvojice číselných os x, y v rovině, pro které platí

– obě osy jsou navzájem kolmé

– jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0,

se nazývá KARTÉZSKÁ SOUSTAVA souřadnic v rovině a označuje se O_{xy}. Bod O je počátek kartézské soustavy souřadnic, přímky x, y se nazývají souřadnicové osy.

$A[x; y]$ dvojice je uspořádaná $\Rightarrow$ souřadnice nelze zaměnit!



Soustava souřadnic v prostoru

Trojice číselných os ***x, y, z*** v prostoru takových, že

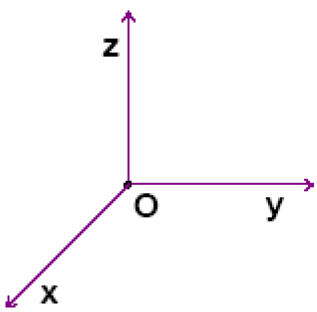
– každé dvě osy jsou navzájem kolmé

– všechny procházejí jedním bodem

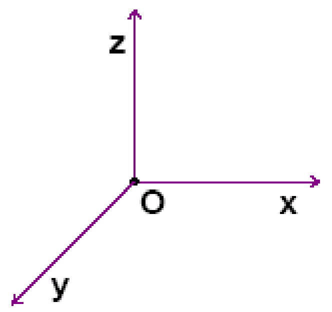
– na všech osách je bodu O přiřazeno číslo 0,

se nazývá kartézská soustava souřadnic O_{xyz}. Bod O nazýváme počátek, přímky ***x; y; z*** se nazývají souřadnicové osy. Roviny určené dvojicemi souřadnicových os se nazývají souřadnicové roviny.

Pravotočivá soustava souřadnic:



Levotočivá soustava souřadnic:

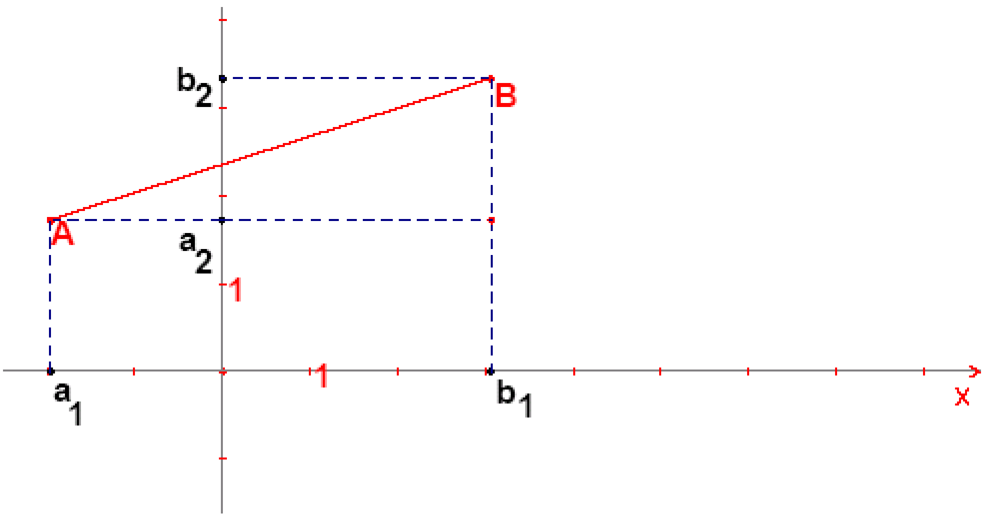


Vzdálenost bodů v rovině

$A[a_1;\ a_2]; B[b_1;\ b_2]$

Podle Pythagorovy věty: $|AB|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$

$\Rightarrow \boxed{|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$



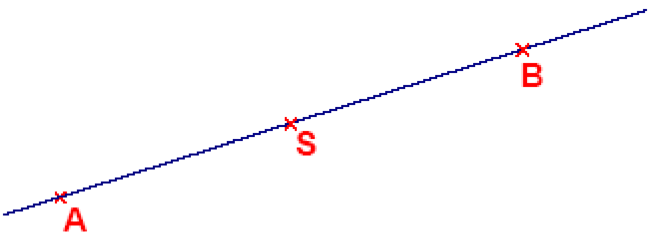
Vzdálenost bodů v prostoru

$A[a_1;\ a_2;\ a_3]; B[b_1;\ b_2;\ b_3]$

$\Rightarrow \boxed{|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}}$

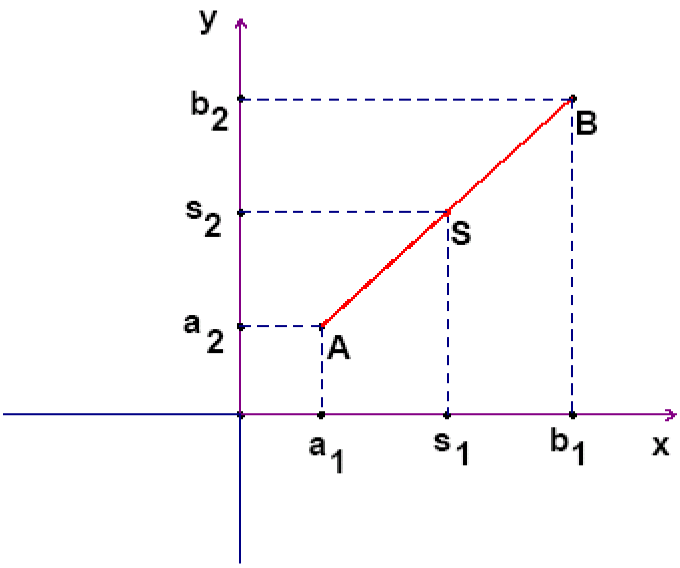
<u>Střed úsečky</u>

dělí úsečku na 2 stejné části



$S = \frac{A+B}{2}$

v rovině: $S\left[\frac{a_1+b_1}{2};\ \frac{a_2+b_2}{2}\right]$



v prostoru:

$S\left[\frac{a_1+b_1}{2};\ \frac{a_2+b_2}{2};\ \frac{a_3+b_3}{2}\right]$

Souřadnice

Varianta A

Vypočítejte souřadnice středu úsečky AB: $A[3; 6;\ -2]; B[-1; 2; 8]$

***Příklad*:**

Řešení:

$S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}; \frac{a_3+b_3}{2}\right]$

$S\left[\frac{3-1}{2}; \frac{6+2}{2}; \frac{-2+8}{2}\right]$

$S[1; 4; 3]$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $S[1; 4; 3]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte vzdálenost bodů C; D: $C[4; 2;\ -1]; D[-1; 0; 3]$

Řešení: $|CD| = 3\sqrt{5}$

2.) Vypočítejte vzdálenost bodů A, B: $A[2; 9]; B[-2; 6]$

Řešení: $|AB| = 5$

3.) Vypočítejte délky stran trojúhelníku ABC a rozhodněte, zda je pravoúhlý.

$A[1; 2;\ -3]; B[4;\ -2;\ -3]; C[1; 3;\ -5]$

Řešení: $|AB| = 5;\ |AC| = \sqrt{5};\ |BC| = \sqrt{38} \Rightarrow$ trojúhelník není pravoúhlý

(neplatí Pythagorova věta).

4.) Určete, který z bodů A; B; C má nejmenší vzdálenost od bodu K.

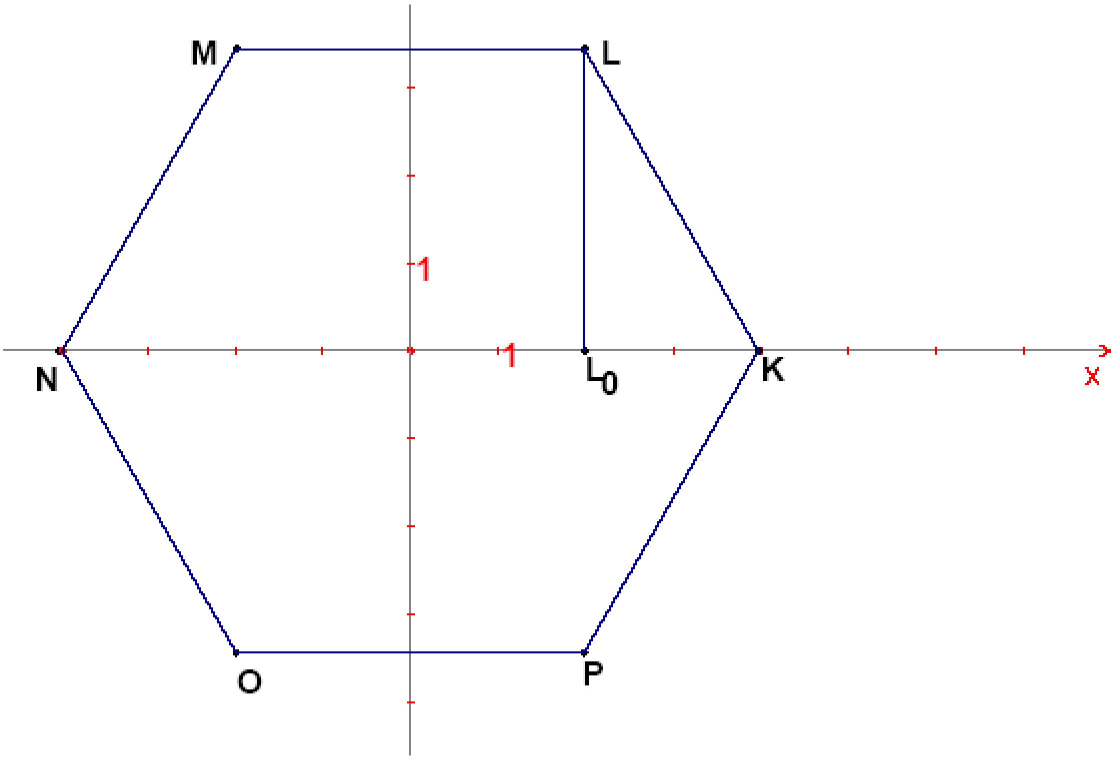
$A[3; 1;\ -6]; B[4; 5;\ -10]; C[7; 1;\ -3]; K[0;\ -1;\ -3]$

Řešení: Bod A.

Souřadnice

Varianta B

Sestrojte pravidelný šestiúhelník KLMNOP tak, aby střed kružnice byl v počátku O kartézské soustavy souřadnic, aby první vrchol byl bod K[4;0] a aby pro bod L [l_1; l_2]
platilo l_2>O. Určete souřadnice všech vrcholů šestiúhelníku.
Řešení:



$$|KL|^2 = |LL_0|^2 + |L_0K|^2$$

$$|LL_0| = \sqrt{|KL|^2 - |L_0K|^2}$$

$$|LL_0| = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

$L[2; 2\sqrt{3}]; M[-2; 2\sqrt{3}]; N[-4; 0]; O[-2;\ -2\sqrt{3}]; P[2;\ -2\sqrt{3}]$

***Příklady k procvičení*:**

1.)Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli ABCDEFGH;

$A[0; 4; 0]$; $B[4; 4; 0]$; $C[4; 0; 0]$. Zapište souřadnice ostatních vrcholů krychle.

Řešení: $D[0; 0; 0]$; $E[0; 4; 4]$; $F[4; 4; 4]$; $G[4; 0; 4]$; $H[0; 0; 4]$

2.) Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte kvádr ABCDEFGH;

$A[2; -2; 0]$; $B[2; 4; 0]$; $C[-1; 4; 0]$, jeho výška je 6. Určete souřadnice zbývajících vrcholů.

Řešení: $D[-1; -2; 0]$; $E[2; -2; 6]$; $F[2; 4; 6]$; $G[-1; 4; 6]$; $H[-1; -2; 6]$

3.) Určete obraz bodu K ve středové souměrnosti se středem S; $S[2; 5; 3]$; $K[4; 2; -1]$

Řešení: $M'[0; 8; 7]$

4.) Vypočítejte délku těžnice t_c trojúhelníku ABC. $A[-5; -3]$; $B[3; -1]$; $C[2; 4]$

Řešení: $|t_c| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Souřadnice

Varianta C

Určete číslo r tak, aby vzdálenost bodů

$C[2m-2;2;1]; D[2;m+5;\ -1]$ byla $2\sqrt{11}$.

***Příklad*:**

$\sqrt{(2-2m+2)^2+(m+5-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{11}$

$16-16m+4m^2+m^2+6m+9+4=44$

$5m^2-10m-15=0$

$m^2-2m-3=0 \Rightarrow m=3\ \vee m=-1$

Varianta A
Varianta B
Varianta C

Výsledek řešení: $m=3\ \vee m=-1$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Na ose y určete bod Y tak, aby jeho vzdálenost od bodu $A[3;5]$ byla $\sqrt{10}$.

Řešení: $Y_1[0;6];\ Y_2[0;4]$

2.) Na ose x najděte bod X tak, aby měl od bodu A dvakrát větší vzdálenost než od bodu B. $A[-3;2;2]; B[2;1;\ -2]$.

Řešení: $X_1[1;0\ 0\ ];\ X_2\left[\frac{19}{3};0;0\right]$

3.) V kartézské soustavě souřadnic O_{xyz} zakreslete pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, jehož výška je 6 a zapište souřadnice bodu V. $A[0;4;0]; B[4;4;0]; D[0;0;0]$

Řešení: $V[2;2;6]$

4.) Jsou dány body S_1; S_2. K libovolnému bodu A určete jeho obraz A_1 ve středové souměrnosti se středem S_1. Pak najděte obraz bodu A_1 ve středové souměrnosti se středem S_2 a tento obraz označte A_2. Určete vzdálenost bodů A; A_2.

$S_1[5;\ -3;2];\ S_2[6;1;\ -1]; A[x;y;z]$

Řešení: $A_1[10-x;\ -6-y;4-z];\ A_2[x+2;y+8;z-6] \Rightarrow\ |AA_2|=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

Vektory

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$ je úsečka *AB*, jejíž krajní body mají určené pořadí. Bod *A* je počáteční bod, bod *B* je koncový bod orientované úsečky. Velikost orientované úsečky je vzdálenost bodů *A*, *B*. Nulová orientovaná úsečka má počáteční bod totožný s koncovým bodem. Její velikost je nula.

Nenulový **vektor** je množina všech nenulových orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr.

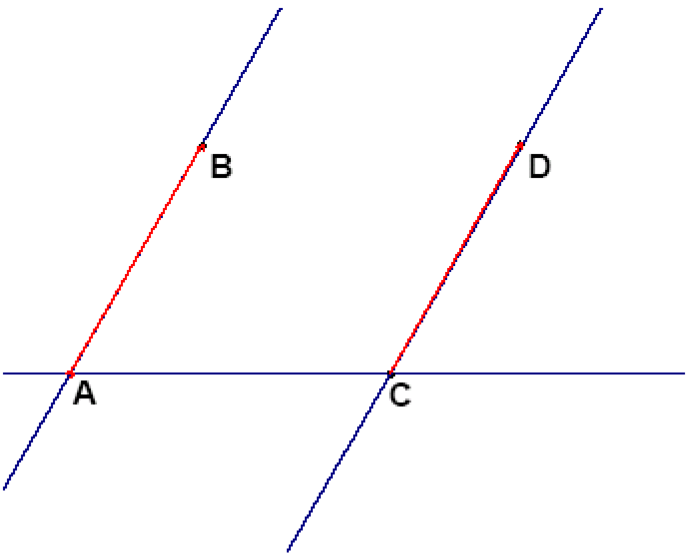
Dva vektory $\vec{u} = B - A;\ \vec{v} = D - C$ mají stejný směr, jestliže

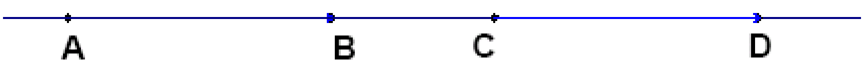
a) polopřímky $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}$ jsou rovnoběžné a obě leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *AC*.

b) přímky $\overleftrightarrow{AB};\ \overleftrightarrow{CD}$ jsou totožné a průnikem polopřímek $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}$ je opět polopřímka.

Nulový vektor je množina všech nulových orientovaných úseček, značíme ho $\vec{o}$.

Každou orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$, která představuje vektor $\vec{u}$, nazýváme umístěním vektoru $\vec{u}$.

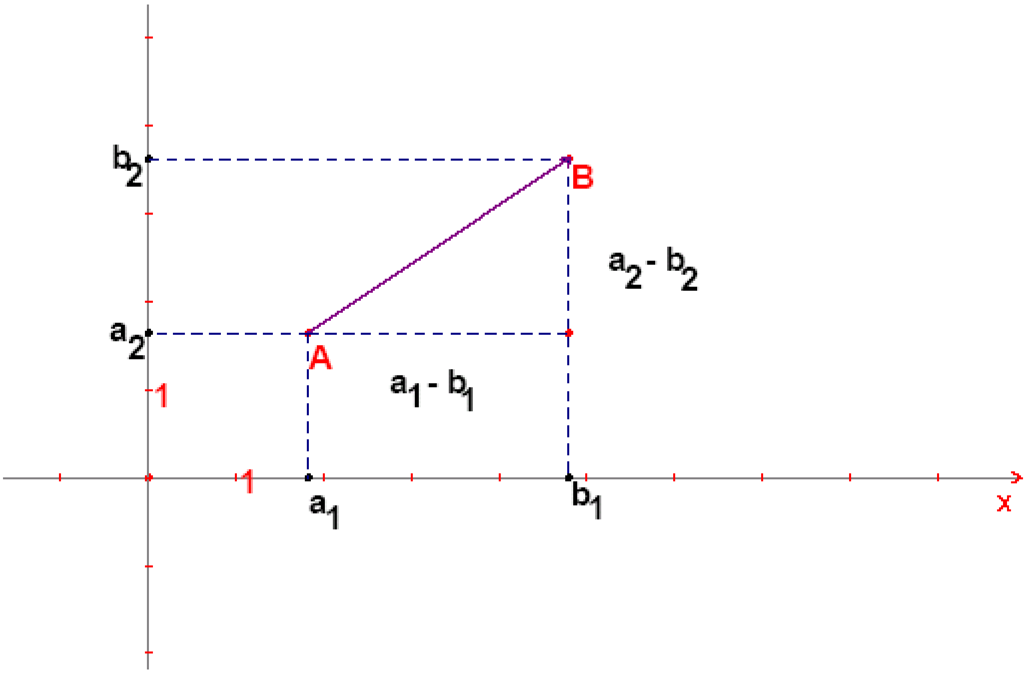




<u>Souřadnice vektoru</u>

Je-li vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, pak $\vec{u} = B - A$.

$B[b_1;\ b_2;]; A[a_1;\ a_2]\quad \vec{u}(u_1;\ u_2) = (b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$

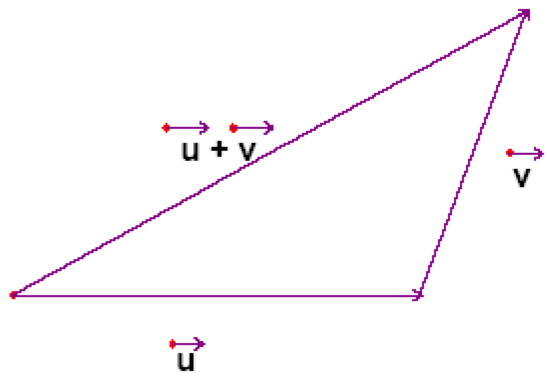


$B = A + \vec{u}$

<u>Operace s vektory</u>

<u>Součet vektorů</u>

$\vec{u} = B - A; \vec{v} = C - B\ ;\ \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = C - A$



Pro každé dva vektory v rovině nebo prostoru platí:

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Pro každé tři vektory v rovině nebo prostoru platí:

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Sčítání vektorů ke komutativní a asociativní.

Je-li $\vec{u} = B - A$, pak vektor $A - B$ je opačný k $\vec{u}$ a značíme ho $-\vec{u}$.

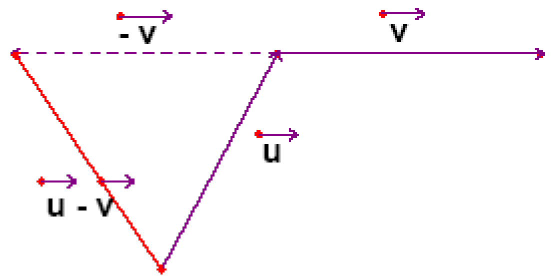
$\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

<u>Rozdíl vektorů</u>

$\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$

$\vec{v} - \vec{u} = (v_1 - u_1;\ v_2 - u_2)$



Násobení vektoru číslem

Násobek nenulového vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ reálným číslem k je vektor $\overrightarrow{AC}$, kde C je bod, pro který platí:

a) $|AC| = k \cdot\ |AB|$

b) je-li $k \geq 0$, leží bod C na polopřímce AB

Je-li $k \leq 0$, leží bod C na polopřímce opačné k polopřímce AB

$\vec{v} = k\vec{u} = (ku_1; ku_2)$

Platí: pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ a každé $k, l \in$ R

$0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

$(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

$k \cdot (l \cdot \vec{u}) = (kl) \cdot \vec{u}$ asociativnost násobení vektoru číslem

$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ distributivnost násobení součtu vektorů číslem

$(k + l) \cdot \vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$ distributivnost násobení vektoru součtem čísel

Lineární kombinace vektorů

Lineární kombinací vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ je vektor $a \cdot \vec{u} +\ b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$, kde $a, b, c \in R$. Lze vytvořit lineární kombinaci libovolného počtu vektorů. Lineární kombinace jednoho vektoru je jeho reálný násobek.

Vektory se nazývají lineárně závislé právě tehdy, když lze jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Nejsou-li vektory lineárně závislé, nazývají se lineárně nezávislé.

Skalární součin vektorů

Velikost vektoru $\vec{u}$ je velikost kterékoliv orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, která je jeho umístěním. Platí:

$|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}| = |B - A|$. Jednotkový vektor má velikost 1, nulový vektor má velikost 0.

Pro každý vektor $\vec{u} = (\overrightarrow{u_1};\ \overrightarrow{u_2})$ v rovině platí:$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Pro každý vektor $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$ v prostoru platí: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Skalární součin $\vec{u}\ \cdot\ \vec{v}$ dvou nenulových vektorů je reálné číslo, které je rovno součinu velikostí těchto vektorů a kosinu velikosti úhlu φ, který tyto vektory svírají.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\varphi$

Pravidlo pro výpočet skalárního součinu vektorů $\vec{u} = (\overrightarrow{u_1};\ u_2)$; $\vec{v} = (v_1;\ v_2)$ v rovině:

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2}$

Pravidlo pro výpočet skalárního součinu vektorů $\vec{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3)$; $\vec{v} = (v_1;\ v_2;\ v_3)$ v prostoru:

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$

<u>Vlastnosti skalárního součinu</u>

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ komutativnost skalárního součinu vektorů

$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ asociativnost skalárního součinu vzhledem k násobení číslem

$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ distributivnost skalárního součinu vzhledem ke sčítání vektorů

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$

Velikost úhlu dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ lze určit použitím skalárního součinu:

$$cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}} \quad \vee \quad cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

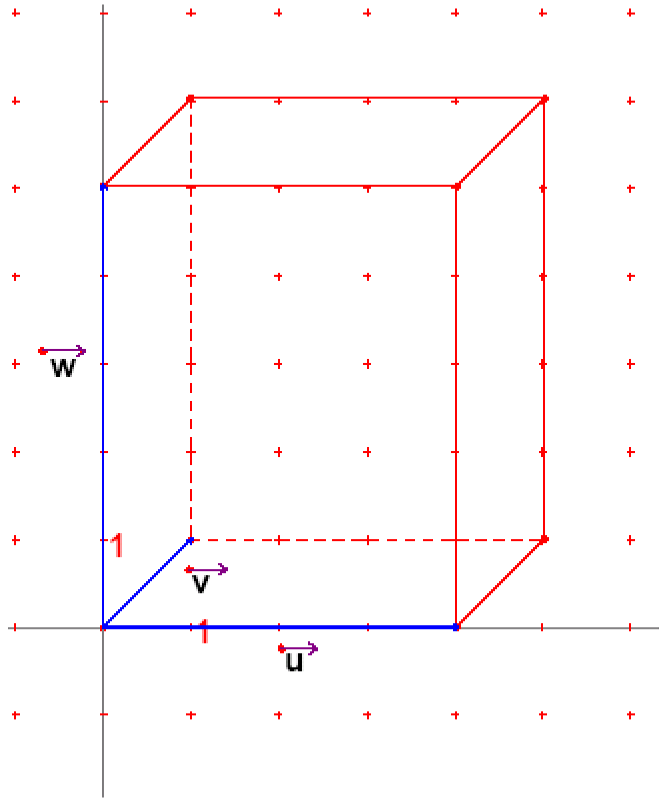
<u>Vektorový součin</u>

Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, které neleží v jedné přímce, je vektor $\vec{w}$, pro který platí:

a) vektor $\vec{w}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$

b) vektor $\vec{w}$ je orientován vůči vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ pravotočivě, tedy podle pravidla pravé ruky

c) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sin\varphi$, kde φ je úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.



Vektorový součin dvou vektorů, které leží v jedné přímce, je nulový vektor.

Vektorový součin $\vec{u}\ x\ \vec{v} = \vec{w} = (u_2v_3 - u_3v_2;\ u_3v_1 - u_1v_3;\ u_1v_2 - u_2v_1)$

Příklad: $\vec{u}(3; 2; 1)$; $\vec{v}(-2; 4; 6)$

$\vec{u}\ x\ \vec{v} = (2 \cdot 6 - 4 \cdot 1; 1 \cdot (-2) - 6 \cdot 3; 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 2) = (8;\ -20; 16) \sim (2;\ -5; 4)$

Užití vektorového součinu:

1. při určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům
2. při výpočtu obsahu rovnoběžníku ABCD, popř. trojúhelníku ABC

   Obsah rovnoběžníku ABCD je $S = |\vec{u}\ x\ \vec{v}|$

   Obsah trojúhelníku ABC je $S = \frac{1}{2}|\vec{u}\ x\ \vec{v}|$

Smíšený součin

Smíšený součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ v tomto pořadí je číslo, které vypočteme $(\vec{u}\ x\ \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Užití smíšeného součinu:

Pro objem rovnoběžnostěnu ABCDEFGH platí:

$V_{ABCDEFGH} = |(\vec{u}\ x\ \vec{v}) \cdot \vec{w}|$, kde $\vec{u} = \overrightarrow{AB};\ \vec{v} = \overrightarrow{AC};\ \vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

Objem trojbokého hranolu je roven polovině objemu rovnoběžnostěnu.

Objem trojbokého jehlanu je roven třetině objemu rovnoběžnostěnu.

Objem čtyřstěnu je roven šestině objemu rovnoběžnostěnu.

Vektory

Varianta A

Jsou dány body $A[3;3]; B[5;4]; C[7;5]$.

a) Rozhodněte, zda body A, B, C leží na přímce

b) Určete číslo $y_D \in R$ tak, aby bod $D[-3;\ y_D]$ ležel na přímce AB.

***Příklad*:**

a) Leží-li body A, B, C na jedné přímce, musí platit, že $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC} = (4;2);\ \overrightarrow{AB} = (2;1) \Rightarrow\ \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ body A; B; C leží v jedné přímce

b) Má-li bod D ležet na přímce AB, musí platit $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = (2;1);\ \overrightarrow{AD} = (-6;\ y_D - 3) \Rightarrow \frac{-6}{2} = \frac{y_D - 3}{1} \Rightarrow y_D = 0$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $a)$ body A; B; C leží v jedné přímce b) $y_D = 0$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vektor $\vec{z} = (2;10)$ zapište jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u} = (1;3);\ \vec{v} = (-2;2)$.

Řešení: $\vec{z} = 3\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

2.) Určete číslo $y \in R$ tak, aby velikost vektoru $\vec{z} = (6;y)$ byla 10.

Řešení: $y_1 = 8 \vee y_2 = -8$

3.) V trojúhelníku ABC označte vektory $\vec{u} = C - B;\ \ \vec{v} = C - A$. Jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u};\ \vec{v}$ zapište následující vektory:

a) $\overrightarrow{w_1} = B - A$

b)$\overrightarrow{w_2} = A_1 - A$, kde A_1 je střed strany BC.

Řešení: a) $\overrightarrow{w_1} = -\vec{u} + \vec{v}$; b) $\overrightarrow{w_2} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$

4.) Je dán vektor $\vec{x} = (-1;2;3)$. Určete $p \in R$ tak, aby vektor $\vec{y} = (17;p;3)$ byl kolmý k vektoru $\vec{x}$.

Řešení: $p = 4$

Vektory

Varianta B

Je dán vektor $\vec{u} = (\sqrt{3};\ -1)$. Určete souřadnice vektoru $\vec{v}$, který svírá s vektorem $\vec{u}$ úhel 60° a jehož velikost je 4.

***Příklad*:**

$$cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$cos60° = \frac{\sqrt{3}\cdot v_1 - v_2}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}} \ \wedge\ \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} = 4$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot v_1 - v_2}{8} \ \Rightarrow\ v_2 = \sqrt{3}\cdot v_1 - 4$$

Dosadíme do vztahu pro velikost vektoru $\vec{v}$

$$\sqrt{{v_1}^2 + \left(\sqrt{3}\cdot v_1 - 4\right)^2} = 4\ |^2$$

$${v_1}^2 + 3{v_1}^2 - 8\sqrt{3}v_1 + 16 = 16$$

$${v_1}^2 - 2\sqrt{3}v_1 = 0$$

$$v_1\cdot\left(v_1 - 2\sqrt{3} = 0\right)\ \Rightarrow\ v_1 = 0\ \vee\ v_1 = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{v_1} = (0;\ -4);\ \vec{v_2} = \left(2\sqrt{3}; 2\right)$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\vec{v_1} = (0;\ -4);\ \vec{v_2} = \left(2\sqrt{3}; 2\right)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Je dán vektor $\vec{a} = (3; 2)$. Určete $n \in R$ tak, aby pro vektor $\vec{b} = (6; n)$ platilo $|\vec{b} - \vec{a}| = 5$.

Řešení: $n_1 = -2;\ n_2 = 6$

2.)Určete vektor $\vec{e}$ tak, aby platilo $\vec{e} \perp \vec{f}\ \wedge\ |\vec{e}| = 4\sqrt{5}$, kde $\vec{f} = (3; 6)$.

Řešení: $\vec{e_1} = (8;\ -4);\ \vec{e_2} = (-8; 4)$

3.) Jsou dány body $A[4; 1]; S[6; 2]$. Určete souřadnice bodů B, C, D tak, aby čtyřúhelník ABCD byl čtverec. Bod S je střed čtverce.

Řešení: $B[7; 0]; C[8; 3]; D[5; 4]

4.) Jsou dány body $A[3;1]$; $B[-1;3]$. Určete bod C tak, aby platilo:

a) bod C leží na ose x a $|\sphericalangle ACB| = 90°$

b) bod C leží na ose y a $|\sphericalangle BAC| = 90°$

Řešení: a) $C_1[0;0]$; $C_2[2;0]$; b) $C_1[0;\ -5]$

Vektory

Varianta C

Jsou dány body $A[1; 2; 3]; B[-4; 5; 6]; C[4; 3; 2]$.

a) Dokažte, že body A, B, C tvoří trojúhelník.

b) Určete reálná čísla m, n, k, l tak, aby body $K[0; m; n]; L[k; l; 6]$ ležely na přímce AB.

***Příklad*:**

a) Body A, B, C tvoří trojúhelník, jestliže vektor $\overrightarrow{AC}$ není násobkem vektoru $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}(-5; 3; 3)$; $\overrightarrow{AC}(3; 1; -1)$. Vektor $\overrightarrow{AC}$ není násobkem vektoru $\overrightarrow{AB}$, proto body A, B, C tvoří trojúhelník.

b) $\overrightarrow{AK}$ musí být násobek vektoru $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}(-5; 3; 3)$; $\overrightarrow{AK}(-1; m-2; n-3)$

$\frac{-1}{-5} = \frac{m-2}{3} = \frac{n-3}{3} \Rightarrow m = \frac{13}{5}, n = \frac{18}{5}$

$\overrightarrow{AL}$ musí být násobek vektoru $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AL}(k-1;\ l-2;\ 3)$

$\frac{k-1}{-5} = \frac{l-2}{3} = 1 \Rightarrow k = -4, l = 6$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $m = \frac{13}{5}, n = \frac{18}{5}; k = -4, l = 6$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Jsou dány vektory $\vec{u}(2; 3; 4)$; $\vec{v}(-2; m;\ 0)$. Určete hodnotu parametru $m \in R$ tak, aby platilo $|\vec{u}\ x\ \vec{v}| = 4\sqrt{6}$.

Řešení: $m_1 = -1, m_2 = -\frac{1}{5}$

2.) Na ose z určete bod V tak, aby objem čtyřstěnu ABCDV, kde $A[2;\ -3; 1], B[1; 0; 3], C[3; 1;\ -1]$ byl 14.

Řešení: $Z_1[0; 0; 7], Z_2[0; 0; 17]$

3.) Na ose y určete bod C tak, aby obsah trojúhelníku ABC byl 10. $A[2;1;0], B[2;2;3]$.

Řešení: $C_1\left[0;1+2\sqrt{10};0\right], C_2\left[0;1-2\sqrt{10},0\right]$

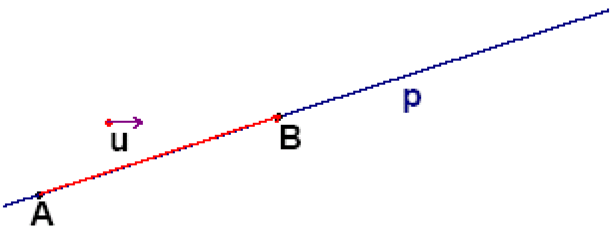
4.) Je dán vektor $\vec{a}(3;2)$. Určete $p \in R$ tak, aby pro vektor $\vec{b}(p;\ -2)$ platilo $\left|3\vec{a}+\vec{b}\right| = 5$.

Řešení: $p_1 = -12, p_2 = -6$

Přímka

Přímka je dána dvěma různými body A, B.

Vektor $\vec{u} = B - A$ se nazývá směrový vektor přímky AB.



Přímka má nekonečně mnoho směrových vektorů, lze ji totiž určit pomocí nekonečného počtu dvojic bodů.

1.) **Parametrická rovnice přímky**

Parametrická rovnice přímky *AB* je rovnice

$$\boxed{X = A + t\vec{u}, t \in R}$$

Proměnná t se nazývá parametr. Každé hodnotě parametru t odpovídá jeden bod přímky *AB*.

Je-li t z množiny všech nezáporných čísel, jde o vyjádření polopřímky *AB*, je-li $t \in \langle 0; 1 \rangle$, jde o vyjádření úsečky *AB*, je-li t z množiny všech nekladných čísel, jde o polopřímku opačnou k polopřímce *AB*.

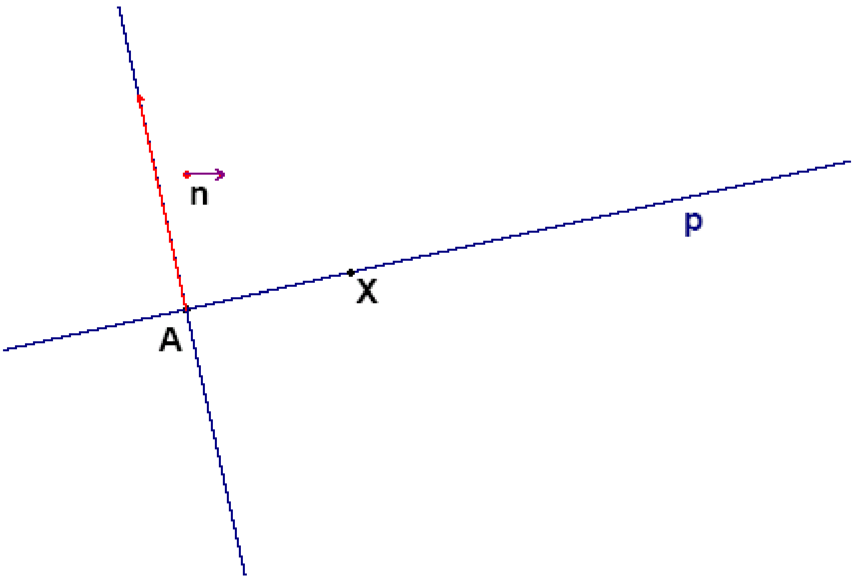
Mějme v rovině body $A[a_1; a_2]; X[x; y]$ a vektor $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$. Rovnici přímky $X = A + t\vec{u}; t \in R$ lze rozepsat do soustavy rovnic s parametrem t:

$x = a_1 + tu_1$

$y = a_2 + tu_2; t \in R$

2.) **Obecná rovnice přímky**

Obecná rovnice přímky má tvar $ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in R$ a alespoň jedna z konstant a, b je nenulová.



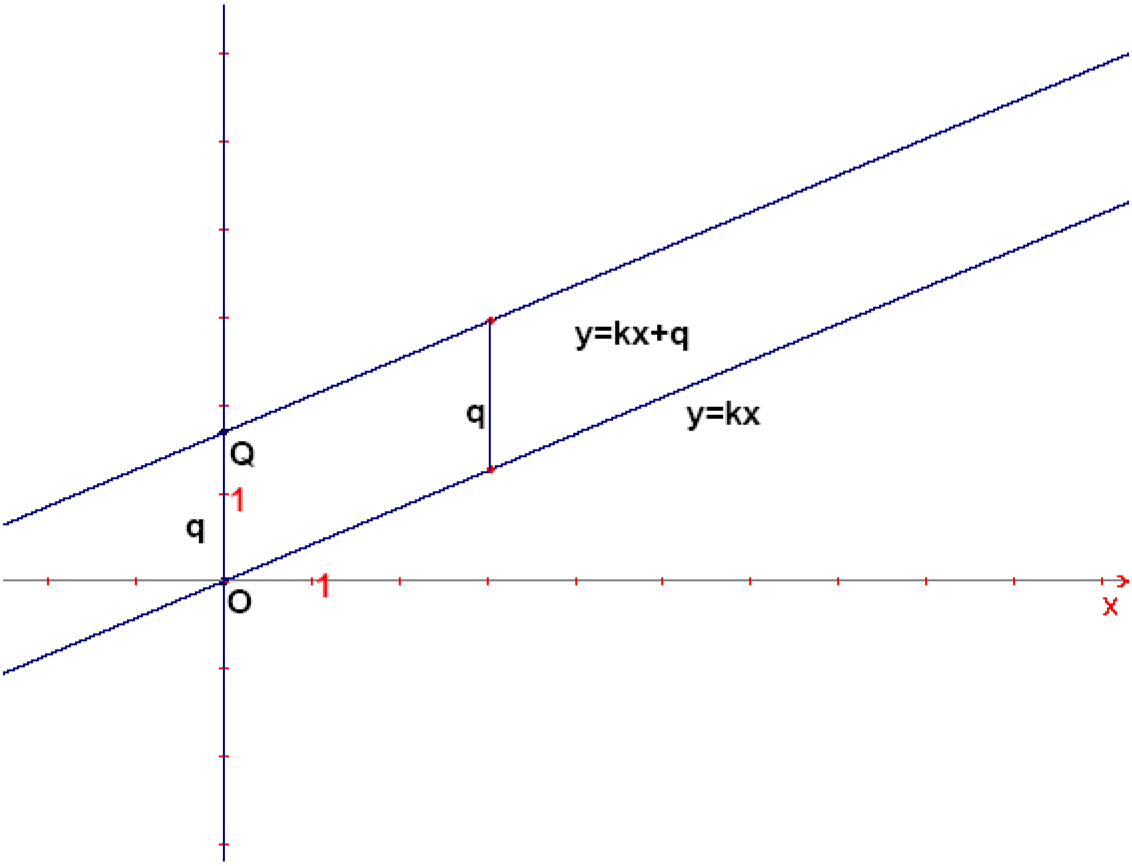
$\vec{n}(a; b)$ je normálový vektor = je kolmý na směrový vektor přímky ⇒ skalární součin $\vec{n}$ a $\vec{u}$ je nula.

$\Rightarrow \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$

$a(x - a_1) + b(y - a_2) = 0$

$ax + by - aa_1 - ba_2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{ax + by + c = 0}$, kde $c = -aa_1 - ba_2$

3.) **Směrnicový tvar rovnice přímky**



Rovnice $\boxed{y = kx + q}$ se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky. Číslo k je směrnice přímky.

$k = -\frac{a}{b}, q = -\frac{c}{b}$

Směrnice přímky je rovna $tg\varphi$, kde φ je odchylka přímky od kladné poloosy x.

Přímka rovnoběžná s osou y nemá žádnou směrnici, směrnicový tvar neexistuje.

Přímka se směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$ má směrnici $k = \frac{u_2}{u_1}$.

Přímka kolmá na přímku $y = kx + q$ má směrnici $\frac{1}{k}$.

Dvě přímky jsou rovnoběžné právě tehdy, jsou-li buď obě rovnoběžné s osou y, nebo jsou obě různoběžné s osou y a mají stejnou směrnici.

4.) **Úsekový tvar rovnice přímky**

Získáme z obecné rovnice přímky tak, že ji vydělíme číslem $-c \neq 0$.

$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, p \neq O \wedge q \neq 0}$, kde $P[p; 0]; Q[O; q]$ jsou průsečíky s osami soustavy souřadnic.

Přímka

Je dána přímka p . Sestavte její parametrické rovnice, obecnou rovnici, zapište ji ve směrnicovém a úsekovém tvaru, pokud existují.

a) Přímka p je daná bodem $A[5;3]$ a směrovým vektorem $\vec{u} = (2;1)$.

b) Přímka p je daná bodem $B[3;0]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (3;\ -2)$.

***Příklad*:**

Řešení:

a) <u>parametrické rovnice</u>: $x = 5 + 2t$

$y = 3 + t; t \in R$

<u>obecná rovnice</u>: normálový vektor $\vec{n} = (1;\ -2) \Rightarrow x - 2y + c = 0$, pro výpočet c dosadíme za x a y souřadnice bodu $A \Rightarrow 5 - 6 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \quad \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$

<u>směrnicový tvar</u>: $y = \frac{1}{2}x + q$, pro výpočet q dosadíme do rovnice bod $A \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

<u>úsekový tvar</u>: průsečík s osou x: $X[-1;0]$

s osou y: $Y\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$

$\frac{x}{-1} + \frac{y}{0{,}5} = 1$

b) <u>parametrické rovnice</u>: $\vec{u} = (2;3) \Rightarrow x = 3 + 2t; y = 3t; t \in R$

<u>obecná rovnice</u>: $3x - 2y + c = 0$, po dosazení bodu $B \Rightarrow c = -9 \Rightarrow 3x - 2y - 9 = 0$.

<u>směrnicový tvar</u>: $y = \frac{3}{2}x + q$, po dosazení bodu $B \Rightarrow q = -\frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

<u>úsekový tvar</u>: $\frac{x}{3} - \frac{2y}{9} = 1$

Přímka

Varianta A

Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $K[-4; 3]$ a je rovnoběžná s přímkou $q: 5x - 2y + 8 = 0$.

***Příklad*:**

Každá rovnoběžná přímka s přímkou q má stejný normálový vektor jako přímka $q \Rightarrow$

$\vec{n} = (5;\ -2)$

$p: 5x - 2y + c = 0$, dosadíme bod K $\Rightarrow -20 - 6 + c = 0 \Rightarrow c = 26 \Rightarrow 5x - 2y + 26 = 0$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $5x - 2y + 26 = 0$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $M[-6; 5]$ a je kolmá na přímku $q: x - 2y + 7 = 0$.

Řešení: $p: 2x + y + 7 = 0$

2.) Body $K[2; 4]; L[4;\ -6]$ určují přímku KL. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem úsečky *KL* a je kolmá na přímku AB, $A[1;\ -2]; B[-4;\ -3]$.

Řešení: $5x + y - 14 = 0$

3.) Jsou dány dva body $M[-2; 5]; N[4;\ -1]$. Napište rovnici osy úsečky *MN*; polopřímky *MN*; polopřímky *NM*.

Řešení: Osa: $x - y + 1 = 0$; polopřímka *MN*: $x = -2 + t; y = 5 - t; t \in \langle 0;\ \infty)$

Polopřímka NM: $x = 4 - r; y = -1 + r; r \in \langle 0;\ \infty)$.

4.) Jsou dány body $A[2; 4]; B[3;\ -2]$. Napište obecnou rovnici kolmice k úsečce *AB* v bodě *A*.

Řešení: $x - 6y + 22 = 0$

Přímka

Varianta B

Body $K[4; 1]; L[4; 2]; M[2; 4]$ jsou vrcholy trojúhelníku *KLM*. Vypočítejte souřadnice průsečíku os jeho stran.

***Příklad*:**

$S_{KL}[4; 1{,}5];\ \overrightarrow{KL} = (0; 1) \Rightarrow o_{KL}: y - 1{,}5 = 0$

$S_{LM}[3; 3];\ \overrightarrow{LM} = (-2; 2) \Rightarrow o_{LM}: x - y = 0$

$S_{KM}[3; 1{,}5];\ \overrightarrow{KM} = (-2; 3) \Rightarrow o_{KM}: 2x - 3y + 1{,}5 = 0$

Z první osy plyne pro průsečík, že jeho y-ová souřadnice je 1,5; z druhé osy, že x-ová souřadnice je 1,5 $\Rightarrow O[1{,}5; 1{,}5]$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $O[1{,}5; 1{,}5]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $K[4;\ -2]$ a je kolmá k přímce $q: x - 2y + 6 = 0$.

Řešení: $p: x = 4 + t; y = -2 - 2t; t \in R;\ p: 2x + y - 6 = 0$.

2.) Určete souřadnici x_A bodu $A[x_A;\ -10]$ tak, aby bod *A* ležel na přímce *KL*, kde $K[-3; 5]; L[-1; -1]$.

Řešení: $x_A = 2$.

3.) Body $K[4; 1]; L[4; 2]; M[2; 4]$ jsou vrcholy trojúhelníku *KLM*. Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice trojúhelníku JKLM a určete souřadnice těžiště.

Řešení: $t_k: 2x + y - 9 = 0;\ t_l: x + 2y - 8 = 0;\ t_m: 5x + 4y - 26 = 0; T\left[\frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right]$

4.) Je dána polopřímka $AB = \left\{[2 + 3t; 3 + t]t \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle\right\}$. Určete souřadnice počátečního bodu *A* dané polopřímky. Určete y_C tak, aby bod $C[-1;\ y_C]$ ležel na dané polopřímce.

Řešení: $A\left[\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right];\ y_C = 2$.

Přímka

Varianta C

Určete hodnotu parametru $p \in R$ tak, aby přímka $x + my + 2m^2 - m - 1 = 0$ procházela počátkem soustavy souřadnic.

***Příklad*:**

Má-li přímka procházet počátkem soustavy souřadnic, musí bod $O[0; 0]$ vyhovovat rovnici přímky. Dosadíme proto do rovnice přímky za x, y nulu a dostaneme:$2m^2 - m - 1 = 0$.

$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow m_1 = 1;\ m_2 = -\frac{1}{2}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $m_1 = 1;\ m_2 = -\frac{1}{2}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Je dán trojúhelník *EFG*, $E[1; 4]; F[3;\ -2]; G[-4;\ -6]$. Určete v parametrickém tvaru rovnici přímky, na které leží střední příčka rovnoběžná s *FG*.

Řešení: $4x - 7y - 1 = 0$.

2.) Je dán trojúhelník *KLM*, $K[0; 0]; L[-4; 2]; M[-6; 0]$. Vypočítejte souřadnice těžiště *T*.

Řešení: $T\left[-\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

3.) Osy x, y a přímka AB, kde $A[2; 9]; B[-4;\ -3]$, určují trojúhelník. Vypočítejte jeho obsah.

Řešení: $S_\triangle = \frac{25}{4}$

4.) Určete reálné číslo p tak, aby bod K ležel na přímce *MN*, je-li:

$M[-1; 2]; N[3;\ -3]; K[-p; p + 0{,}5]$.

Řešení: $p = -1$.

Polohové úlohy v rovině

Vzájemnou polohu dvou přímek lze vyšetřit dvěma způsoby:

1.) řešíme soustavu složenou z obou rovnic, o vzájemné poloze rozhodne počet řešení

1 řešení	různoběžné, 1 průsečík
0 řešení	rovnoběžné různé
∞ řešení	totožné

2.) určíme směrové (normálové) vektory obou přímek

Přímky p, q jsou rovnoběžné, jestliže: $\overrightarrow{u_p} = k \cdot \overrightarrow{u_q}$, kde $k \in R - \{0\}$; $\left(\overrightarrow{n_p} = k \cdot \overrightarrow{n_q}, kde\ k \in R|0.\right.$

Dvě přímky $p(P, \vec{u})$ a $q(Q, \vec{v})$ jsou totožné, jsou-li rovnoběžné a leží-li bod Q na přímce p.

Přímky p, q jsou k sobě kolmé, jsou-li jejich směrové (normálové) vektory navzájem kolmé, tj. platí-li $\overrightarrow{u_p} \cdot \overrightarrow{u_q} = 0$; $\left(\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q} = 0\right)$.

Polohové úlohy v rovině

Varianta A

Vyšetřete vzájemnou polohu přímek *KL* a *MN*, znáte-li souřadnice bodů, kterými dané přímky procházejí; $K[-1;\ -2]; L[-1; 1]; M[1; 1]; N[2; 3]$.

***Příklad*:**

$\overrightarrow{KL} = (0; 3); \Rightarrow \overrightarrow{n_{KL}} = (3;\ 0) \Rightarrow KL: x + 1 = 0$

$\overrightarrow{MN} = (1; 2); \Rightarrow \overrightarrow{n_{MN}} = (2;\ -1) \Rightarrow MN: 2x - y - 1 = 0$

Přímky jsou různoběžné, protože $\overrightarrow{n_{KL}} \neq k \cdot \overrightarrow{n_{MN}}$

Průsečík má *x*-ovou souřadnici -1 (plyne z rovnice přímky *KL*), *y*-ovou souřadnici dopočítáme z rovnice přímky *MN* $\Rightarrow P[-1;\ -3]$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: Přímky jsou různoběžné; $P[-1;\ -3]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q;

$p = \{[1 + 2t; 2 - 3t; t \in R]\}; q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k; k \in R]\}$.

Řešení: Rovnoběžné různé

2.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek m, n.

$m = \{[1 + 2t; 2 - 3t; t \in R]\}; n = \{[17 + 4k;\ -6 - 2k; k \in R]\}$

Řešení: Různoběžné; $P[1; 2]$

3.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek a, b.

$a = \{[1 + 2t; 2 - 3t; t \in R]\}; b = \{[5 + 4k;\ -4 - 6k; k \in R]\}$.

Řešení: totožné

4.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek u, v.

$u: 2x + y - 1 = 0; v: x - 2y - 8 = 0$.

Řešení: Různoběžné, $P[2;\ -3]$

Polohové úlohy v rovině

Varianta B

Určete hodnotu parametru $p \in R$ tak, aby přímka $px + y + p - 11 = 0$ procházela průsečíkem přímek $a: 2x + y + 6 = 0; b: x - 2y + 8 = 0$.

***Příklad*:**

$2x + y + 6 = 0 \quad | \cdot 2$

$x - 2y + 8 = 0$

$4x + 2y + 12 = 0$

$x - 2y + 8 = 0$

po sečtení obou rovnic dostaneme: $5x + 20 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow P[-4; 2]$.

Nyní bod X dosadíme do rovnice přímky s parametrem $\Rightarrow -4x + 2 + p - 11 = 0 \Rightarrow$ $p = -3$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $p = -3$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vyšetřete vzájemnou polohu úseček.

$u_1 = \{[-1 + t; 2t; t \in \langle 0; 1 \rangle]\}$; $u_2 = \{[1 + 2k; 2 - k; k \in \langle -2; 1 \rangle]\}$.

Řešení: $u_1 \cap u_2 = \emptyset$

2.) Průsečíkem přímek $a = \{[2t; -3 + t; t \in R]\}; b = \{[1 + k; 2 - k; k \in R]\}$ veďte kolmici k přímce $c = \{[2 + 4r; 8 - 3r; r \in R]\}$.

Řešení: $4x - 3y - 19 = 0$

3.) Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku *KLM* tak, aby jeho strany ležely na přímkách $k: 2x + y + 1 = 0; l: 8x - y - 11 = 0; m: x - 2y + 8 = 0$.

Řešení: $[-2; 3]$; $[2; 5]$; $[1; -3]$

4.) Je dána úsečka *KL*, kde $K[2; 1]; L[-1; 2]$. Určete hodnotu parametru $p \in R$ tak, aby úsečka *AB* protínala úsečku *KL* v jejím středu. Souřadnice bodů *A*, *B* jsou $A[2; p]; B[-2; -6]$.

Řešení: $p = 6$

Polohové úlohy v rovině

Varianta C

Zjistěte, zda bod $K[-4; 1]$ je vnitřním bodem trojúhelníku *ABC*,
$A[5; 1]; B[-2; 4]; C[-7; -3]$.

***Příklad*:**

Má-li bod *K* ležet uvnitř trojúhelníku *ABC*, musí ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou *AB* jako bod *C*, ve stejné polorovině s hraniční přímkou *BC* jako bod *A* a ve stejné polorovině s hraniční přímkou *AC* jako bod *B*.

Přímka *AB* má rovnici $3x + 7y - 22 = 0$, polorovina s bodem *C* má rovnici $3x + 7y - 22 \leq 0$.

Po dosazení souřadnic bodu *K* do poloroviny zjistíme, že nerovnice platí, bod *K* proto leží ve stejné polorovině jako bod *C*.

Přímka *AC* má rovnici $x - 3y - 2 = 0$, polorovina s bodem *B* má rovnici $x - 3y - 2 \leq 0$.

Po dosazení souřadnic bodu *K* do poloroviny zjistíme, že nerovnice platí, proto bod *K* leží ve stejné polorovině jako bod *B*.

Přímka *BC* má rovnici $7x - 5y + 34 = 0$, polorovina s bodem *A* má vyjádření $7x - 5y + 34 \geq 0$. Po dosazení souřadnic bodu *K* do poloroviny zjistíme, že nerovnice platí.

Bod *K* leží uvnitř trojúhelníku *ABC*.

***Příklad*:**

Varianta A
Varianta B
Varianta C

Výsledek řešení: Bod *K* leží uvnitř trojúhelníku *ABC*.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Jsou dány body $K[3; -5]; L[-1; 2]$ a vektor $\vec{v} = (2; -3)$. Napište analytické vyjádření poloroviny pL, je-li $p(K; \vec{v})$.

Řešení: $3x + 2y + 1 \geq 0$

2.) Určete reálné číslo p tak, aby přímka s parametrickým vyjádřením $x = 5 - 6t; y = p + 2t; t \in R$ procházela průsečíkem přímek $r = \{[-1 + 3u;\ -1 - 2u; u \in R]\}; s = \{[2 - v; 1 + 2v; v \in R]\}$.

Řešení: $p = -5$

3.) Určete hodnoty parametrů $p, q \in R$ tak, aby přímky m, n byly totožné.

$m = \{[1 - t; 2 + t; t \in R]\}; n = \{[p + k; 5 + qk; k \in R]\}$.

Řešení: $p = -2; q = -1$

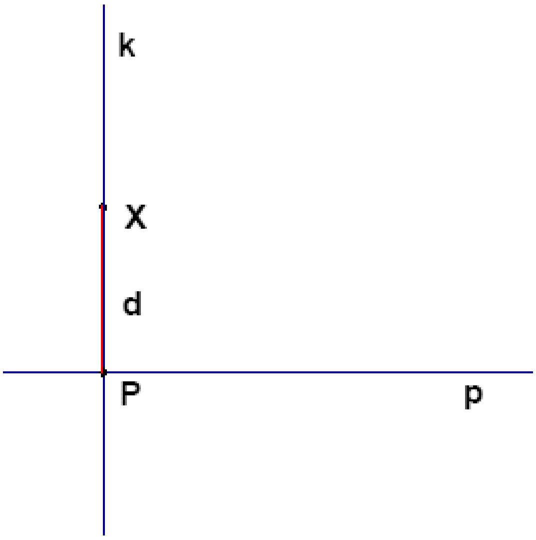
4.) Určete všechny hodnoty parametru $m \in R$ tak, aby bod $M[-4; m + 3]$ ležel v polorovině $y \geq 2x$.

Řešení: $m \in \langle -11;\ 0)$

Metrické úlohy v rovině

Patří sem úlohy, ve kterých je použito měření – vzdálenosti bodů, velikosti úhlů apod.

Vzdálenost bodu od přímky



Postup vidíme z obrázku:

1.) bodem X vedeme kolmici k přímce

2.) najdeme průsečík P kolmice vedené bodem X a přímky p

3.) Určíme vzdálenost $d = |XP|$

$X[x_1;\ x_2]$ a $p: ax + by + c = 0$. Pak kolmice k má rovnici: $x = x_1 + at \ \wedge y = x_2 + bt;$ $t \in R.$

Hledáme průsečík $P[p_1;\ p_2]$ přímek $p, k.$

$a \cdot (x_1 + at) + b \cdot (x_2 + bt) + c = 0$

$ax_1 + a^2t + bx_2 + b^2t + c = 0$

$t = -\frac{ax_1 + bx_2 + c}{a^2 + b_2}$

$p_1 = x_1 + at;\ p_2 = x_2 + bt$, kde t je vypočítaná hodnota parametru.

Pak $d = \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$

$d = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}$

$d = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

Jestliže dosadíme za t, dostaneme: $\boxed{d = \frac{|ax_1 + bx_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

Odchylka dvou přímek

Odchylka přímek p, q je ta velikost úhlu, která leží v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.

Odchylku přímek určíme pomocí úhlu směrových vektorů (případně normálových vektorů).

$$cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Metrické úlohy v rovině

Varianta A

Na přímce $s: x + 3y - 2 = 0$ určete bod P tak, aby jeho vzdálenost od přímky $t: 5x + 12y - 4 = 0$ byla 3.

***Příklad*:**

Má-li bod P ležet na přímce s, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici přímky ⇒ $P[2 - 3y; y]$.

Dosadíme do vzorce pro vzdálenost: $3 = \frac{|5\cdot(2-3y)+12\cdot y-4|}{\sqrt{5^2+12^2}}$

Po úpravě dostaneme: $39 = |6 - 3y|$

Řešíme rovnici s absolutní hodnotou: $6 - 3y = 39 \lor 6 - 3y = -39$

Dostáváme řešení: $y_1 = -11$ a $y_2 = 15$

$P_1[35;\ -11];\ P_2[-43; 15]$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $P_1[35;\ -11];\ P_2[-43; 15]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte vzdálenost rovnoběžek $r_1: 8x - 6y + 3 = 0$ a $r_2: 8x - 6y - 3 = 0$.

Řešení: $v = 0{,}6$

2.) Na přímce $q: 2x + y = 0$ najděte bod A tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný se základnou BC, kde $B[6; 4]; C[2;\ -2]$.

Řešení: $A\left[-\frac{11}{4}; \frac{11}{2}\right]$

3.) Na ose x najděte bod P, který má od bodu $Q[6;\ -3]$ vzdálenost 7.

Řešení: $P_1\left[6 + 2\sqrt{10}; 0\right];\ P_2\left[6 - 2\sqrt{10; 0}\right]$.

4.) Vypočítejte obvod trojúhelníku KLM, kde $K[2;\ -4]; L[3; 3]; M[-3; 1]$.

Řešení: $10\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$.

Metrické úlohy v rovině

Varianta B

Vypočítejte odchylku přímek $p: 7x - y + 1 = 0 = 0; q: x - 7y + 1 = 0$.

***Příklad*:**

Určíme normálové vektory obou přímek: $\overrightarrow{n_p} = (7;\ -1);\ \overrightarrow{n_q}(1;\ -7)$

Úhel přímek vypočteme dosazením do vzorce: $cos\varphi = \frac{|7\cdot 1+(-1)\cdot(-7)|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-7)^2}} = \frac{14}{50} \Rightarrow \varphi =$ $73°44'23''$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\varphi = 73°44'23''$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Jsou dány dvě přímky $k: ax + y - 4 = 0; l: x + 2y + 8 = 0$. Určete hodnotu parametru $a \in R$ tak, aby přímky svíraly úhel 90°.

Řešení: $a = -2$

2.) Vypočítejte odchylku přímek $a = \{[2 + t; 1 + 3t]; t \in R\};\ b = \{[4 - 2k; 5 - k]; k \in R\}$.

Řešení: $\varphi = 45°$

3.) Vypočítejte odchylku přímek $r: x + 2y - 1 = 0; s: 2x - y + 4 = 0$.

Řešení: $\varphi = 90°$

4.) Vypočítejte odchylku přímek $t: 3x - 4y = 0; u: y - 6 = 0$.

Řešení: $\varphi = 36°52'21''$

Metrické úlohy v rovině

Varianta C

Body $S_{KL}[5;\ -3];\ S_{LM}[3;4];\ S_{KM}[-3;5]$ jsou středy stran trojúhelníku *KLM*. Vypočítejte souřadnice vrcholů K, L, M.

***Příklad*:**

Na přímce, spojující středy dvou stran, leží střední příčka v trojúhelníku, proto má tato přímka stejný směrový (normálový) vektor jako přímka, na které leží třetí strana.

$\overrightarrow{S_{KL}S_{LM}} = (-2;7)\ \Rightarrow \overrightarrow{n_{KM}} = (7;2)$

Přímka KM má tedy rovnici: $7x + 2y + 11 = 0$.

$\overrightarrow{S_{KL}S_{KM}} = (-8;8)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{LM}} = (1;1)$

Přímka LM má tedy rovnici: $x + y - 7 = 0$.

$\overrightarrow{S_{LM}S_{KM}} = (-6;1)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{n_{KL}} = (1;6)$

Přímka *KL* má tedy rovnici: $x + 6y + 13 = 0$.

Řešíme vzájemnou polohu těchto přímek jako soustavy rovnic.

$KL \cap KM = \{K\}; K[-1;\ -2]; KL \cap LM = \{L\}; L[11;\ -4]; KM \cap LM = M; M[-5;12]$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $K[-1;\ -2]; L[11;\ -4]; M[-5;12]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete bod *R* tak, aby trojúhelník *PQR* byl pravoúhlý a rovnoramenný s přeponou *PQ*, kde $P[-2;10]; Q[4;\ -6]$.

Řešení: $R_1[9;5];\ R_2[-7;\ -1]$

2.) Určete souřadnice vrcholů čtverce *ABCD*, jestliže $S_{AB}[0;\ -3];\ S_{CD}[2;5]$.

Řešení: $A[-4;\ -2]; B[4;\ -4]; C[6;4]; D[-2;6]$.

3.) Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce *KLMN*, je-li $K[-1;\ -3]; L[2;1]$.

Řešení: $M_1[6;\ -2];\ N_1[3;\ -6];\ M_2[-2;4];\ N_2[-5;0]$.

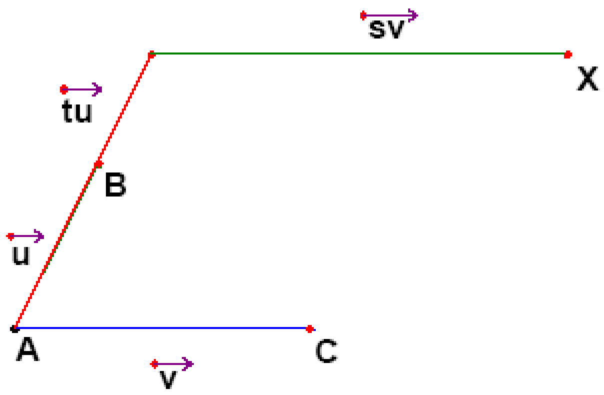
4.) V rovnoramenném trojúhelníku *EFG* se základnou *EF*, $E[-3;4]; F[1;6]$ leží vrchol *G* na přímce $5x - 6y - 16 = 0$. Určete souřadnice vrcholu *G*.

Řešení: $G[2;\ -1]$

Přímka, rovina

1.) **Parametrická rovnice roviny**

Rovina je dána třemi body, které neleží v jedné přímce. Proto lze sestavit dva vektory $\vec{u} = B - A$; $\vec{v} = C - A$ ležící v této rovině. Rovinu značíme malými písmeny řecké abecedy. Rovinu, která je dána bodem A a směrovými vektory $\vec{u}$; $\vec{v}$, zapisujeme $\rho(A, \vec{u}, \vec{v})$.



Rovnice $\boxed{X = A + t\vec{u} + s\vec{v}; t, s \in R}$ se nazývá **parametrická rovnice** roviny *ABC*.

Můžeme opět rozepsat:

$x = a_1 + tu_1 + sv_1$

$y = a_2 + tu_2 + sv_2$

$z = a_3 + tu_3 + sv_3 \quad t, s \in R$

2.) **Obecná rovnice roviny**

Užívá se častěji než parametrická. Rovinu určíme bodem P a vektorem $\vec{n}$, který je k ní kolmý. Tento vektor se nazývá normálový. Bod X leží v rovině právě tehdy, jestliže vektor $X - P$ je kolmý k vektoru $\vec{n} \Rightarrow n \cdot (X - P) = 0$.

Bod X má souřadnice $X[x; y; z]$, bod Pmá souřadnice $P[p_1;\ p_2;\ p_3]$ a normálový vektor má souřadnice $\vec{n} = (a; b; c)$.Pak můžeme psát:

$a \cdot (x - p_1) + b \cdot (y - p_2) + c \cdot (z - p_3) = 0$

Po úpravě dostaneme

$ax + by + cz - ap_1 - bp_2 - cp_3 = 0$

Označíme výraz $-ap_1 - bp_2 - cp_3 = d$ a máme obecnou rovnici roviny:

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$

Poznámka: známe-li dva směrové vektory roviny, normálový vektor určíme jako vektorový součin těchto dvou vektorů.

3.) **<u>Úsekový tvar rovnice roviny</u>**

Rovina určená body $P[p; 0; 0]; Q[0; q; 0]; R[0; 0; r]$ má rovnici $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 0}$

Přímka a rovina

Varianta A

Jsou dány body $K[2; 3;\ -1]; L[4; 3;\ -2]$. Rozhodněte, zda body $A[0; 4; 2]; B\left[2\sqrt{3}; 3;\ -\sqrt{3}\right]$ leží na přímce *KL*, a určete $r, s \in R$ tak, aby bod $C[r;\ 2r; s]$ ležel na přímce *KL*.

***Příklad*:**

Napíšeme rovnice přímky KL: $\overrightarrow{KL} = (2; 0;\ -1) \ \Rightarrow x = 2 + 2t; y = 3; z = -1 - t; t \in R$.

Dosadíme postupně souřadnice bodů A, B do rovnice přímky *KL*.

$0 = 2 + 2t\ \wedge 4 = 3\ \wedge 2 = -1 - t \Rightarrow$ bod A neleží na přímce *KL*.

Totéž provedeme s bodem *B*: $2\sqrt{3} = 2 + 2t\ \wedge 3 = 3\ \wedge\ -\sqrt{3} = -1 - t$. Prostřední rovnice platí vždy, z první i třetí rovnice plyne, že $t = \sqrt{3} - 1$, proto bod *B* leží na přímce *KL*.

Do rovnice přímky *KL* nyní dosadíme souřadnice bodu *C*:

$r = 2 + 2t\ \wedge 2r = 3\ \wedge s = -1 - t$.

Z prostřední rovnice určíme, že $r = \frac{3}{2}$; dosadíme do první rovnice $\Rightarrow t = -\frac{1}{4}$ a po dosazení do třetí rovnice zjistíme, že $s = -\frac{3}{4}$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: bod *A* neleží na přímce *KL*; bod *B* leží na přímce *KL*; $r = \frac{3}{2}; s = -\frac{3}{4}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Je dána přímka $s = \{[1-2t; 2+3t; 1+t]; t \in R\}$. Rozhodněte, zda body $K[5; 8; 3]; L[3; -1; 0]$ leží na přímce s a určete $y, z \in R$ tak, aby bod $M[9; y; z]$ ležel na přímce s.

Řešení: $K \notin s; L \in s; y = -10; z = -3$

2.) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka $q = \{[2; 1-k; 4k]; k \in R\}$ protíná souřadnicové roviny.

Řešení: $P_{xz}[2; 0; 4]$; $P_{xy}[2; 1; 0]$; P_{yz} neexistuje

3.) Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $A[0; 4; 5]$ a je rovnoběžná s přímkou $r = \{[2+t; 1-t; 3+5t]; t \in R\}$.

Řešení: $x = s; y = 4 - s; z = 5 + 5s; s \in R$

4.) Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $A[2; 4; 1]$ a je rovnoběžná s osou z.

Řešení: $x = 2; y = 4; z = 1 + t; t \in R$

Přímka a rovina

Varianta B

Dokažte, že body $K[2; 1; 6]$; $L[0; -1; -6]$; $M[-1; 2; 0]$ určují rovinu a napište její parametrické rovnice, určete její obecnou rovnici a vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina *KLM* protíná souřadnicové osy.

***Příklad*:**

3 body určují rovinu, pokud neleží v jedné přímce, čili vektor $\overrightarrow{KL} \neq k \cdot \overrightarrow{KM}$

$\overrightarrow{KL} = (-2; -2; -12)$; $\overrightarrow{KM} = (-3; 1; -6)$ $\Rightarrow$ body určují rovinu.

$x = 2 - 2t - 3s$

$y = 1 - 2t + s$

$z = 6 - 12t - 6s; \;\; t, s \in R$

$\overrightarrow{KL}\; x\; \overrightarrow{KM} = (24; 24; -8) \approx (3; 3; -1) \;\Rightarrow 3x + 3y - z - 3 = 0.$

Průsečíky se souřadnicovými osami mají vždy dvě souřadnice nulové $\Rightarrow$

$X[1; 0; 0]$; $Y[0; 1; 0]$; $Z[0; 0; -3]$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: body určují rovinu; $3x + 3y - z - 3 = 0$; $X[1; 0; 0]$; $Y[0; 1; 0]$; $Z[0; 0; -3]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Je dána rovina $\rho = \{[1 + t + s; 2 + 3t - s; 5t + s]; t, s \in R\}$. Vypočítejte průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami.

Řešení: $X[2; 0; 0]$; $Y[0; 4; 0]$; $Z[0; 0; -4]$

2.) Zjistěte, zda body $K[3; 2; 1]$; $L[1; 3; -1]$; $M[2; -1; 3]$; $N[-1; 2; -2]$ leží v jedné rovině.

Řešení: neleží

3.) V soustavě souřadnic v prostoru je umístěn pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* tak, že $D[0;0;0]$; $A[4;0;0]$; $B[4;4;0]$; $V[2;2;6]$. Napište parametrické vyjádření roviny *BCV*.

Řešení: $x = 4 - 2s - 4t; y = 4 - 2s; z = 6s; s, t \in R$

4.) Jsou dány body $K[2;9;\ -7]$; $L[-4;3;5]$; $M[6;5;\ -1]$. Napište parametrické vyjádření těžnice trojúhelníku *KLM*, která prochází bodem K.

Řešení: $x = 2 - t; y = 9 - 5t; z = -7 + 9t; t \in \langle 0;1 \rangle$

Přímka a rovina

Varianta C

Dokažte, že přímky $p = \{[1 - t; 2 + t; 3 + 2t]; t \in R\};\ q = \{[k; 1 - k; 1 - 2k]; k \in R\}$ určují rovinu a napište její obecnou rovnici.

***Příklad*:**

Přímky určují rovinu, pokud bod jedné přímky neleží na přímce druhé, což ověříme dosazením bodu $[1; 2; 3]$ z přímky p do rovnic přímky q.

$1 = k\ \wedge 2 = 1 - k\ \wedge 3 = 1 - 2k\ \ \Rightarrow$ bod neleží na přímce $q \Rightarrow$ přímky určují rovinu.

Vypíšeme si směrový vektor přímky $p: \overrightarrow{u_p} = (-1; 1; 2)$ a určíme vektor daná body v obou přímkách $\vec{s} = (0 - 1; 1 - 2; 1 - 3) \cong (-1;\ -1;\ -2)$. Vektorový součin těchto směrových vektorů určí normálový vektor hledané roviny $\Rightarrow \vec{n} = (0;\ -4; 2) \approx (0; 2;\ -1)$. Proto rovnice hledané roviny je $2y - z + d = 0$,kde člen d vypočítáme dosazením některého bodu kterékoliv ze zadaných přímek do této rovnice $\Rightarrow 2y - z - 1 = 0$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $2y - z - 1 = 0$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Dokažte, že přímka $p = \{[1 + k; 2 - 2k; 0]; k \in R\}$ a bod $M[1; 0; 3]$ určují rovinu a napište její obecnou rovnici.

Řešení: $6x + 3y + 2z - 12 = 0$

2.) Je dána rovina $\rho = \{[1 - 2k - 2s; 2 + 3k - 2s; 1 - k + 4s]k, s \in R\}$. Napište její obecnou rovnici.

Řešení: $x + y + z - 4 = 0$

3.) Napište obecnou rovnici roviny α, ve které leží body $A[2; 3; 0]; B[-1; 2; 2]$ a rovina α je kolmá k rovině $\beta: 3x - 2y + z + 6 = 0$.

Řešení: $\alpha: x + 3y + 3z - 11 = 0$

4.) Kolmicemi sestrojenými z bodu $A[-2; 2; 8]$ na roviny $\alpha: 3x + y - 2z - 4 = 0$; $\beta: x + 2y - z + 5 = 0$ proložte rovinu γ. Určete její obecnou rovnici.

Řešení: $\gamma: 3x + y + 5z - 36 = 0$

Polohové úlohy v prostoru

1.) Vzájemná poloha přímek

Dvě přímky v prostoru mohou být totožné, rovnoběžné různé, různoběžné nebo mimoběžné. Základním kritériem jsou směrové vektory obou přímek.
Je-li $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, jsou přímky totožné nebo rovnoběžné různé. Která z možností to bude, rozhodneme podle toho, zda bod jedné přímky leží na přímce druhé – pokud ano, jsou přímky totožné, pokud ne, jsou rovnoběžné různé.
Je-li $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v}$, jsou přímky různoběžné nebo mimoběžné. Řešíme vzájemnou polohu těchto přímek, v případě společného bodu jsou přímky různoběžné a určujeme průsečík, v případě, že společný bod neexistuje, jsou přímky mimoběžné.

2.) Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka buď leží v rovině (pak je ∞ mnoho společných bodů), je rovnoběžná různá s rovinou (žádný společný bod) nebo je různoběžná a pak určujeme 1 společný bod. Řešíme nejsnadněji dosazením parametrických rovnic přímky do obecné rovnice roviny a podle počtu řešení rozhodneme o vzájemné poloze.

3.) Vzájemná poloha 2 rovin

Dvě roviny mohou být totožné, rovnoběžné různé nebo různoběžné. Která z možností nastane, závisí na rovnicích obou rovin. V nejjednodušším případě máme obecné rovnice obou rovin a sledujeme normálové vektory obou rovin. Pokud platí, že $\overrightarrow{n_\alpha} = k \cdot \overrightarrow{n_\beta} \wedge d_\alpha = k \cdot d_\beta$, pak jsou roviny totožné. Pokud platí, že $\overrightarrow{n_\alpha} = k \cdot \overrightarrow{n_\beta} \wedge d_\alpha \neq k \cdot d_\beta$, pak jsou roviny rovnoběžné různé. Pokud platí, že $\overrightarrow{n_\alpha} \neq k \cdot \overrightarrow{n_\beta}$, pak jsou roviny různoběžné a pak určujeme průsečnici. Při hledání průsečnice dvou různoběžných rovin hledáme dva body, které leží zároveň v první i druhé rovině. To zajistíme tak, že zvolíme dvě ze tří souřadnic a třetí souřadnici dopočítáme pří řešení soustavy dvou rovnic, které získáme dosazením zvolených souřadnic do obou rovnic rovin.

Polohové úlohy v prostoru

Varianta A

Vyšetřete vzájemnou polohu přímek:

$a = \{[-5 - t; 3 - 2t; 5 + t]; t \in R\}; b = \{[-6 + k; 7 - k; 2k]; k \in R\}$

Vypíšeme si směrové vektory obou přímek: $\overrightarrow{u_a} = (-1;\ -2; 1)$; $\overrightarrow{u_b} = (1;\ -1; 2)$. Vektor přímky a není násobkem směrového vektoru přímky $b \Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné. Budeme řešit jako soustavu, pokud bude mít řešení, jsou přímky různoběžné, pokud ne, jsou mimoběžné.

***Příklad*:**

$-5 - t = -6 + k$

$3 - 2t = 7 - k$

$5 + t = 2k$

Po sečtení prvních dvou rovnic zjistíme, že $t = -1$. Dosazením do 1. Rovnice vypočteme $k = 2$.

Nyní obě hodnoty dosadíme do třetí rovnice. $5 + (-1) = 2 \cdot 2$, což je výrok pravdivý.

Přímky jsou proto různoběžné. Musíme tedy určit průsečík (dosazením např. hodnoty $k = 2$ do rovnice přímky b).

Průsečík má tedy souřadnice $P[-4; 5; 4]$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: přímky jsou různoběžné, $P[-4; 5; 4]$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek:

$p = \{[1 + t; 2 - 2t; t]; t \in R\}; q = \{[4 - 2k; 1 + 4k; 3 - 2k]; k \in R\}$

Řešení: přímky jsou rovnoběžné různé

2.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek:

$c = \{[2 - 3k; 1 + k; 4 - k]; k \in R\}; d = \{[-4 + 3t; 3 - t; 2 + t]; t \in R\}$

Řešení: přímky jsou totožné

3.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímek:

$e = \{[2t; 3 - t; 4 - t]; t \in R\}; f = \{[2 - 2k; -1 + k; 6 + 2k]; k \in R\}$

Řešení: přímky jsou mimoběžné

4.) Určete hodnotu parametru $p \in R$ tak, aby přímky a, b byly různoběžné. Pak vypočítejte souřadnice průsečíku přímek a, b.

$a = \{[2 + k; 3 - 2k; 4]; k \in R\}; b = \{[1 - 4t; p + t; 1 - 3t]; t \in R\}$

Řešení: $p = -2 \Rightarrow P[5; -3; 4]$

Polohové úlohy v prostoru

Varianta B

Vyšetřete vzájemnou polohu přímky a roviny:

a) $p = \{[2 + t; 3 + 2t; 1 - t]; t \in R\};\ \rho: x - 2y + z - 5 = 0$

b) $p = \{[1 - 2k; 5 - k;\ -3 + 5k]; k \in R\};\ \rho: 3x - y + z - 11 = 0$

c) $p = \{[2s; 4 + s;\ -1]; s \in R\};\ \rho: x - 2y - 3z + 5 = 0$

***Příklad*:**

Vzájemnou polohu přímky a roviny vyšetřujeme dosazením přímky do rovnice roviny.

a) $2 + t - 2 \cdot (3 + 2t) + 1 - t - 5 = 0 \Rightarrow -4t - 8 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow$ přímka je různoběžná s rovinou, mají společný 1 bod, jehož souřadnice zjistíme dosazením $t = -2$ do rovnice přímky $\Rightarrow P[0;\ -1; 3]$.

b) $3 \cdot (1 - 2k) - (5 - k) + (-3 + 5k) - 11 = 0 \Rightarrow -16 \neq 0 \Rightarrow$ přímka je rovnoběžná různá s rovinou

c) $2s - 2 \cdot (4 + s) - 3 \cdot (-1) + 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ přímka leží v rovině

***Příklad*:**

Varianta A
Varianta B
Varianta C

Výsledek řešení: a) $P[0;\ -1; 3]$; b) přímka je rovnoběžná různá s rovinou; c) přímka leží v rovině

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $AB, A[-2; 0;\ -1]; B[2; 1; 4]$ a roviny ρ, která je dána body $K[0; 0; 3]; L[-2;\ -1; 1]; M[0; 1; 4]$.

Řešení: přímka je různoběžná s rovinou, $P\left[4; \frac{3}{2}; \frac{13}{2}\right]$.

2.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $r = \{[2 + k; 3k; 1 - k]; k \in R\}$ a roviny $\alpha = \{[1 + s + 2r; 3s + 3r; 1 - s - 3r]; r, s\ \in R\}$.

Řešení: přímka je rovnoběžná různá s rovinou

3.) Jsou dány body $K[3;2;1]$; $L[-5;\ -10;5]$; $M[4;7;\ -3]$; $N[3;5;\ -2]$. Určete, pokud existuje, průsečík úsečky *KL* a přímky *MN*.

Řešení: $P[-3;\ -7;4]$.

4.) Ukažte, že přímka AB, kde $A[3;\ -2;\ -1]$; $B[4;1;3]$ je různoběžná s rovinou α o rovnici $2x-3y+z-2=0$. Potom najděte jejich průsečík.

Řešení: $P[6;7;11]$.

Polohové úlohy v prostoru

Varianta C

Vyšetřete vzájemnou polohu rovin $\alpha: 2x + 4y + z - 8 = 0;\ \beta: 2y + z - 6 = 0$.

Podle souřadnic normálových vektorů vidíme, že roviny jsou různoběžné, budeme proto hledat rovnici přímky, která je průsečnicí rovin. Hledáme tedy dva body, které leží současně v obou rovinách.

***Příklad*:**

Zvolíme si jednu souřadnici každého bodu libovolně, zbylé dvě souřadnice vypočteme ze soustavy rovnic.

$A[x; 0; z]$ $\Rightarrow$ dosadíme souřadnice bodu A do rovnic obou rovin

$2x + z - 8 = 0$

$z - 6 = 0$

$\Rightarrow z = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A[1; 0; 6]$.

Totéž provedeme pro bod B: $B[x; -1; 8]$

$2x + z - 12 = 0$

$z - 8 = 0$

$\Rightarrow z = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B[2; -1; 8]$

Nyní určíme směrový vektor přímky AB, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$

Průsečnice má tedy rovnici: $p = \{(1 + t; -t; 6 + 2t); t \in R\}$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: roviny jsou různoběžné, $p = \{(1 + t; -t; 6 + 2t); t \in R\}$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny $\rho = \{[2 + 3u - v; 1 - 9u + v;\ -3 - 12u - 2v; u, v \in R; \sigma = 1 + 2s + t; -2s - 3t; 2 + 4s - 4t; s, t \in R$.

Řešení:roviny jsou rovnoběžné různé

2.) Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny $\alpha = \{[2 + u - v; 1 - 3u + v;\ -3 - 4u - 2v; u, v \in R; \beta = 4 - s + t;\ -7 + s - 3t;\ -17 - 2s - 4t; s, t \in R$.

Řešení: roviny jsou totožné

3.) Určete hodnoty parametrů $m, n \in R$ tak, aby roviny $\alpha: x + ny + z - 7 = 0;\ \beta: mx + 4y - z + 3 = 0$ byly a) rovnoběžné; b) různoběžné; c) navzájem kolmé

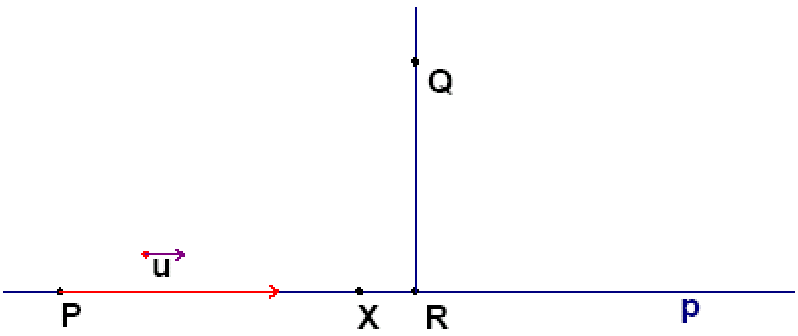
Řešení: a) $m = -1\ \wedge n = -4$; b) $m \neq -1\ \vee n \neq -4$; c) $m = 1 - 4n$

4.) Vyšetřete vzájemnou polohu rovin $\rho = \{[3 + t - u; 5 + t;\ -t + 2u]; t, u \in R\};\ \sigma = \{[3 + s - 4k; 6 + 2s - 3k; 1 + 5k]; s, k \in R\}$.

Řešení: roviny jsou totožné

Metrické úlohy

1.) Vzdálenost bodu od přímky



Postup:

a.) Určíme parametrické vyjádření přímky $p: P + t\vec{u}$

b.) Z podmínky $(X - Q) \cdot \vec{u} = 0$ určíme tu hodnotu parametru t, pro kterou platí $X = R$ (viz obr.).

c.) Určíme vzdálenost $d = |QR|$

2.) Vzdálenost bodu od roviny

Bodem P vedeme přímku p kolmou k rovině ρ, určíme průsečík R přímky p a roviny ρ a určíme vzdálenost $d = |PR|$.

$\rho: ax + by + cz + d = 0$; $P[p_1;\ p_2;\ p_3]$; $p = \{[p_1 + at;\ p_2 + bt;\ p_3 + ct]; t \in R\}$.

Hledáme průsečík přímky p s rovinou ρ tak, že rovnice přímky dosadíme do rovnice roviny.

$a \cdot (p_1 + at) + b \cdot (p_2 + bt) + c \cdot (p_3 + ct) + d = 0$

Odtud $t = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

Tuto hodnotu dosadíme do parametrického vyjádření přímky a dostaneme souřadnice bodu R.

Platí $R - P = (at; bt; ct)$, kde t je vypočítaná hodnota.

Proto $d = |R - P| = |t| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Vzdálenost bodu $P[p_1;\ p_2;\ p_3]$ od roviny $\rho: ax+by+cz+d=0$ je vyjádřena

$$\boxed{d=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

3.) Odchylka dvou přímek

Odchylka přímek $p(P,\vec{u}); q(Q,\vec{v})$ je číslo $\varphi \in \langle 0;\ \frac{\pi}{2}\rangle$, pro které platí:

$$\boxed{cos\varphi=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

4.) Odchylka přímky a roviny

Je-li přímka p kolmá k rovině ρ, je odchylka přímky p a roviny ρ rovna $\frac{\pi}{2}$. Pokud přímka p není kolmá k rovině ρ, vedeme jí rovinu σ kolmou k rovině ρ. Rovina σ protne rovinu ρ v přímce p'. Odchylka φ přímky p a roviny ρ je pak odchylka přímek p, p'.
Výhodnější je sestrojit přímku q kolmou k rovině ρ. Jestliže odchylka přímek p a q je ω, pak

$$\boxed{\varphi=\frac{\pi}{2}-\omega}$$

5.) Odchylka dvou rovin

Odchylku φ rovin ρ a σ snadno určíme pomocí normálových vektorů těchto rovin.
Platí:

$$\boxed{cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{n_\rho}\cdot\overrightarrow{n_\sigma}|}{|\overrightarrow{n_\rho}|\cdot|\overrightarrow{n_\sigma}|}}$$

Metrické úlohy

Varianta A

V trojúhelníku *ABC* vypočítejte výšku v_a, víte-li, že $A[1; 2; 3]; B[3; 6; 2]; C[-1; 10; -2]$.

***Příklad*:**

Počítáme vzdálenost bodu *A* od přímky *BC*.

Směrový vektor přímky BC je $\overrightarrow{BC} = (-4; 4; -4) \approx \vec{u} = (-1; 1; -1)$. Rovnice přímky *BC* je:$x = 3 - t$

$y = 6 + t$

$z = 2 - t; t \in R$

Kterýkoliv bod *X* přímky *BC* má souřadnice $X[3 - t; 6 + t; 2 - t]$.

Vektor $\overrightarrow{AX} = (2 - t; 4 + t; -1 - t)$.

Hledáme takovou hodnotu $t \in R$, aby platilo, že přímka *AX* je kolmá na přímku *BC*.

$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$-1 \cdot (2 - t) + 1 \cdot (4 + t) - 1 \cdot (-1 - t) = 0 \Rightarrow 3t = -3 \Rightarrow t = -1$

Bod *X* má tedy souřadnice $X[4; 5; 3]$ a vzdálenost bodů *A*, *X* je

$|AX| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Velikost výšky v_a trojúhelníku *ABC* je $3\sqrt{2}$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: Velikost výšky v_a trojúhelníku *ABC* je $3\sqrt{2}$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte vzdálenost bodu $A[0; 2; 3]$ od přímky $p = \{[3 + k; 5 + 2k; \ -k]; k \in R\}$.

Řešení: $|Ap| = \sqrt{3}$

2.) Vypočítejte vzdálenost bodu $A[4; 2; \ -3]$ od roviny $\rho: 2x - 2y + z + 5 = 0$.

Řešení: $|A\rho| = 2$

3.) Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\alpha: 2x + y - 2z - 3 = 0; \ \beta: 2x + y - 2z + 12 = 0$.

Řešení: $|\alpha, \beta| = 5$.

4.) Na přímce $p = \{[4 + t; 2; 2 + t]; \ t \in R\}$ určete bod P tak, aby vzdálenost bodu P od přímky $q = \{[3 - 2k; k; 1]; k \in R\}$ byla 4.

Řešení: $P_1[-1; 2; \ -3]; \ P_2\left[\frac{17}{3}; 2; \ \frac{11}{3}\right]$.

Metrické úlohy

Varianta B

Vypočítejte odchylku průsečnice rovin $\alpha: 2x + y - z + 3 = 0$; $\beta: x + y - 5 = 0$ od osy z.

***Příklad*:**

Hledáme dva body, které leží v obou rovinách – určíme od každého bodu libovolně jednu souřadnici a zbylé dvě dopočítáme ze soustav rovnic, které dostaneme po dosazení bodů do rovnic rovin.

$A[0; 5; 8]; B[1; 4; 9]$ u obou bodů byla zvolena x-ová souřadnice.

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1)$

$\vec{z} = (0; 0; 1)$

Dosadíme do vzorce pro velikost odchylky dvou přímek:

$cos\varphi = \frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \ \varphi = 54°44'$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\varphi = 54°44'$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte odchylku přímky $p = \{[4 - 2t; 1 - 2t; t]; t \in R\}$ od roviny $\alpha: x + 4y + z - 1 = 0$

Řešení: $\varphi = 45°$.

2.) Vypočítejte odchylku rovin $\alpha: 2x + y - z + 4 = 0$; $\beta: 2x + 4y + 2z - 5 = 0$.

Řešení: $\varphi = 60°$.

3.) Je dána přímka $p = \{[1 + t; 2 + at;\ -1 - t]; t \in R\}$ a rovina $\rho: x + y - z + 8 = 0$. Určete hodnotu parametru $a \in R$ tak, aby platilo $p \perp \rho$.

Řešení: $a = 1$.

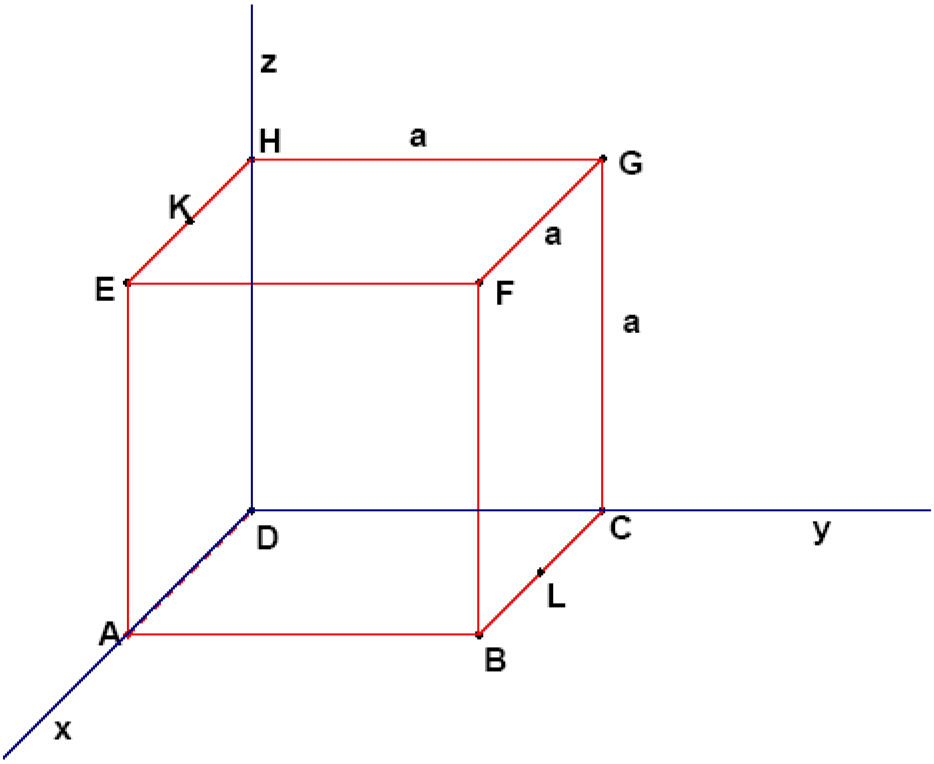
4.) Je dán bod $A[2;\ -1; 0]$ a přímka $p = \{[3 + t; 1 - t;\ -3]; t \in R\}$. Na přímce p určete bod M tak, aby odchylka přímek AM a p byla 90°.

Řešení: $t = \frac{1}{2}; M\left[\frac{7}{2}; \frac{1}{2};\ -3\right]$.

Metrické úlohy

Varianta C

Krychle *ABCDEFGH* má hranu *a*. Bod *K* je střed hrany *AE*. Vypočítejte odchylku přímek *BK* a *AG*.



***Příklad*:**

$A[a; 0; 0]; B[a, ; a; 0]; G[0; a; a]; K\left[\frac{a}{2}; 0; a\right]$

$\overrightarrow{BK} = \left(-\frac{a}{2};\ -a; a\right);\ \overrightarrow{AG} = (-a; a; a)$

$$cos\varphi = \frac{\left|\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot(-a)+(-a)\cdot a+a\cdot a\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+(-a)^2+a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+a^2+a^2}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}}\cdot\sqrt{3a^2}} = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 78°54'$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\varphi = 78°54'$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Krychle *ABCDEFGH* má hranu a. Bod *K* je střed hrany *AE*, bod *L* je střed hrany *BC*. Vypočítejte odchylku přímky *BK* od roviny *ALG*.

Řešení: $\varphi = 15°48'$.

2.) Krychle *ABCDEFGH* má hranu a. Bod *K* je střed hrany *EH*, bod *L* je střed hrany *BC*. Vypočítejte odchylku rovin *BCK* a *ALH*.

Řešení: $\varphi = 45°$.

3.) Pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* má výšku $v = 6$, délku hrany $|AB| = 4$. Označte postupně K, L, M středy hran *AB, AD, CV*. Vypočítejte vzdálenost bodu *V* od roviny *KLM*.

Řešení: $v = \frac{9\sqrt{34}}{17}$.

4.) Pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* má výšku $v = 6$, délku hrany $|AB| = 4$. Označte postupně K, L, M středy hran *AB, AD, CV*. Vypočítejte odchylku přímek *KM* a *CV*.

Řešení: $\varphi = 69°46'$.

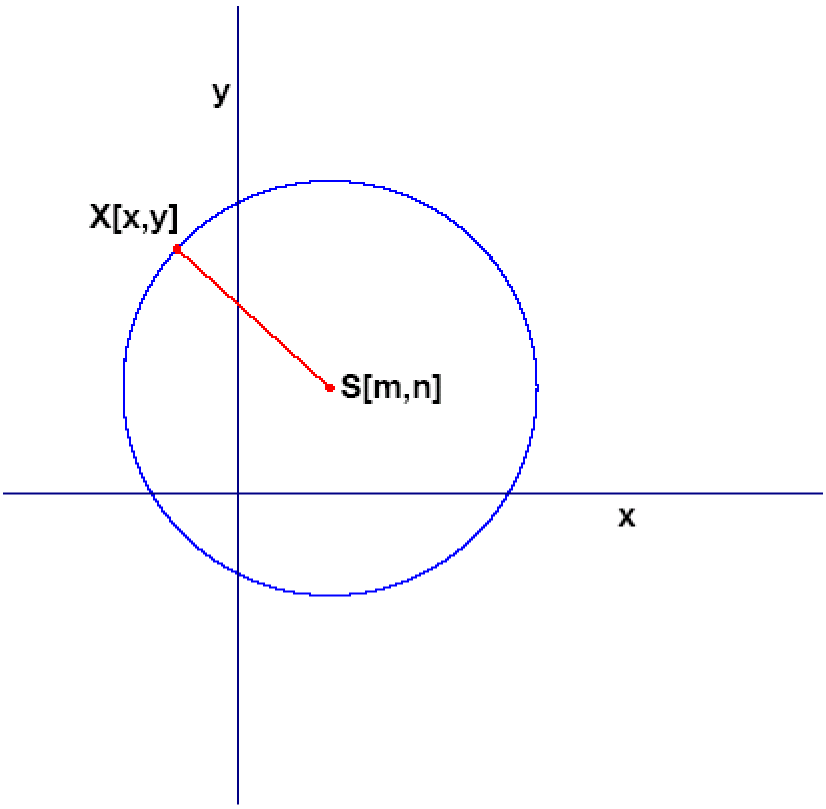
Kuželosečky a kulová plocha

Kružnice

Patří mezi kuželosečky, které můžeme získat jako průnik rotační kuželové plochy a roviny. Kružnici získáme jako průnik rotační kuželové plochy a roviny, která je kolmá na její osu. Je to středová kuželosečka, protože má střed souměrnosti.

Kružnice

je množina všech bodů X v rovině, které mají od daného bodu S
(středu kružnice) v rovině danou vzdálenost r (poloměr kružnice),$|SX| = r; r > 0$.



$|XS| = r \Rightarrow \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$

Odtud dostáváme středovou rovnici kružnice

$$\boxed{(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2}$$

Rovnici můžeme upravit na obecnou rovnici kružnice

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0}\text{, kde } p = m^2 + n^2 - r^2$$

Pozor! Rovnice $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$ je rovnicí kružnice pouze tehdy, jestliže platí: $m^2 + n^2 - p > 0$.

Vnitřní oblast kružnice

je množina všech bodů *X* v rovině, které mají od daného bodu *S* (středu kružnice) vzdálenost menší než *r* (poloměr kružnice).

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 < r^2$$

Vnější oblast kružnice

je množina všech bodů *X* v rovině, které mají od daného bodu *S* (středu kružnice) vzdálenost větší než *r* (poloměr kružnice).

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 > r^2$$

Kruh

je množina všech bodů *X* v rovině, které mají od daného bodu *S* (středu kružnice) vzdálenost menší nebo rovnu *r* (poloměr kružnice).

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2$$

Kružnice a přímka

Přímka buď s kružnicí nemá žádný společný bod, pak je vnější přímkou kružnice, nebo má s přímkou jeden společný bod, pak je tečnou kružnice, nebo má s kružnicí dva společné body, pak je sečnou kružnice. Řešíme tedy vzájemnou polohu přímky a kružnice dosazením z rovnice přímky do rovnice kružnice.

Kružnice

Varianta A

Napište rovnici kružnice, která má střed $S[2; 1]$ a prochází bodem $K[6;\ -2]$. Potom vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých kružnice protíná osy x a y.

Při hledání rovnice kružnice použijeme středový tvar rovnice kružnice, do kterého dosadíme souřadnice středu.

***Příklad*:**

$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

Pro výpočet poloměru můžeme dosadit do rovnice kružnice za *x* a *y* souřadnice bodu *K* nebo můžeme spočítat vzdálenost bodů *S*, *K*. Při dosazení bodu *K* do rovnice kružnice: $(6-2)^2+(-2-1)^2=r^2$

$\Rightarrow r=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

Hledaná rovnice kružnice tedy je $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Průsečíky s osami mají vždy jednu souřadnici nulovou.

$x=0 \ \Rightarrow\ (y-1)^2=21 \ \Rightarrow y-1=\mp\sqrt{21} \ \Rightarrow\ y=1\mp\sqrt{21}$

$y=0 \ \Rightarrow\ (x-2)^2=24 \ \Rightarrow\ x-2=\mp\sqrt{24} \ \Rightarrow\ x=2\mp\sqrt{24}=2\mp2\sqrt{6}$

Průsečíky s osami jsou $X_1[2+2\sqrt{6}; 0];\ X_2[2-2\sqrt{6}; 0];\ Y_1[0; 1+\sqrt{21}];\ Y_2[0; 1-\sqrt{21}]$

***Příklad*:**

[Varianta A](#)
[Varianta B](#)
[Varianta C](#)

Výsledek řešení: $X_1[2+2\sqrt{6}; 0];\ X_2[2-2\sqrt{6}; 0];$
$Y_1[0; 1+\sqrt{21}];\ Y_2[0; 1-\sqrt{21}]$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici kružnice, jestliže úsečka $AB, A[3;7]; B[-1;5]$ je jejím průměrem.

Řešení: $(x-1)^2+(y-6)^2=5$

2.) Napište rovnici kružnice, která prochází body $A[3;2]; B[1;\ -4]$ a má střed na přímce $x-y+9=0$.

Řešení: $(x+7)^2+(y-2)^2=100$.

3.) Napište rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a prochází bodem $A[1;1]$.

Řešení: $x^2+y^2=2$.

4.) Najděte souřadnice středu a poloměr kružnice, jejíž rovnice je:

$x^2+y^2-6x+4y-23=0$.

Řešení: $(x-3)^2+(y+2)^2=36\ \Rightarrow S[3;\ -2]; r=6$.

Kružnice

Varianta B

Určete vzájemnou polohu kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 24{,}5 = 0$ a přímky o rovnici $x - y + c = 0$ v závislosti na hodnotě parametru c.

Vzájemnou polohu přímky a kružnice řešíme vyjádřením jedné neznámé (x nebo y) z rovnice přímky a jejím dosazením do rovnice kružnice. Má-li být přímka tečnou, musí být jedno řešení kvadratické rovnice ($D = 0$), má-li být přímka sečnou, musí vyjít dvě řešení ($D > 0$), má-li být přímka vnější přímkou, kvadratická rovnice nemá řešení ($D < 0$).

***Příklad*:**

Z rovnice přímky vyjádříme: $x = y - c$ a dosadíme do rovnice kružnice.

$(y - c)^2 + y^2 - 4 \cdot (y - c) + 10y + 24{,}5 = 0$

$y^2 - 2yc + c^2 + y^2 - 4y + 4c + 10y + 24{,}5 = 0$

$2y^2 + 6y - 2yc + c^2 + 4c + 24{,}5 = 0$

$2y^2 + y \cdot (6 - 2c) + c^2 + 4c + 24{,}5 = 0$

$D = (6 - 2c)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c^2 + 4c + 24{,}5)$

$D = 36 - 24c + 4c^2 - 8c^2 - 32c - 196$

$D = -4c^2 - 56c - 160$

Tečna: $D = 0 \;\Rightarrow\; c^2 + 14c + 40 = 0 \;\Rightarrow\; (c + 10) \cdot (c + 4) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = -10;\ c_2 = -4$

Sečna: $D > 0 \;\Rightarrow\; c \in (-\infty;\ -10) \cup (-4;\ \infty)$

Vnější přímka: $D < 0 \;\Rightarrow\; c \in (-10;\ -4)$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: Tečna: $c_1 = -10;\ c_2 = -4$

Sečna: $c \in (-\infty;\ -10) \cup (-4;\ \infty)$

Vnější přímka: $c \in (-10;\ -4)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete vzájemnou polohu přímky $p: 2x - y = 0$ a kružnice $k: x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$.

Řešení: Přímka je sečna kružnice.

2.) Určete vzájemnou polohu přímky $p: x - 2y - 1 = 0$ a kružnice $k: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Řešení: přímka je tečnou kružnice.

3.) Určete vzájemnou polohu přímky $p: x + 3y + 10 = 0$ a kružnice $k: x^2 + y^2 = 1$.

Řešení: Přímka je vnější přímkou kružnice.

4.) Určete souřadnice společných bodů os x, y s kružnicí $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$.

Řešení: $[0; 4]$; $[0; 2]$.

Kružnice

Varianta C

Napište rovnici kružnice, která se dotýká přímky $p: 3x + 4y - 15 = 0$, její střed leží na přímce $q: x + 2y + 6 = 0$ a poloměr je 5.

***Příklad*:**

Mají-li být splněny všechny podmínky ze zadání, musí platit, že $v(S; p) = 5 \ \wedge \ m + 2n + 6 = 0$, kde m, n jsou souřadnice středu kružnice.

$5 = \frac{|3m+4n-15|}{\sqrt{3^2+4^2}} \ \wedge \ m = -2n - 6$

První rovnici upravíme: $5 = \frac{|3m+4n-15|}{5}$ a z druhé rovnice dosadíme

$25 = |3 \cdot (-2n - 6) + 4n - 15|$

$25 = |-6n - 18 + 4n - 15|$

$25 = |-2n - 33| \ \Rightarrow \ 25 = -2n - 33 \ \vee \ 25 = 2n + 33 \ \Rightarrow \ n = -29 \ \vee \ n = -4$

Dopočítáme souřadnici středu $\Rightarrow \ m = 52 \ \vee \ m = 2$

Hledané kružnice jsou dvě o rovnicích: $(x - 52)^2 + (y + 29)^2 = 25$ a $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $(x - 52)^2 + (y + 29)^2 = 25$ a $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[-5; 4]$ a dotýká se přímky $q: 3x - 4y + 6 = 0$.

Řešení: $(x+5)^2+(y-4)^2=25$.

2.) Napište rovnici kružnice, která prochází body $K[3;2]$; $L[1;4]$ a dotýká se osy x.

Řešení: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$; $(x-9)^2+(y-10)^2=100$.

3.) Napište rovnici kružnice, která se dotýká osy x i osy y. Její střed leží na přímce $p: x-y+3=0$.

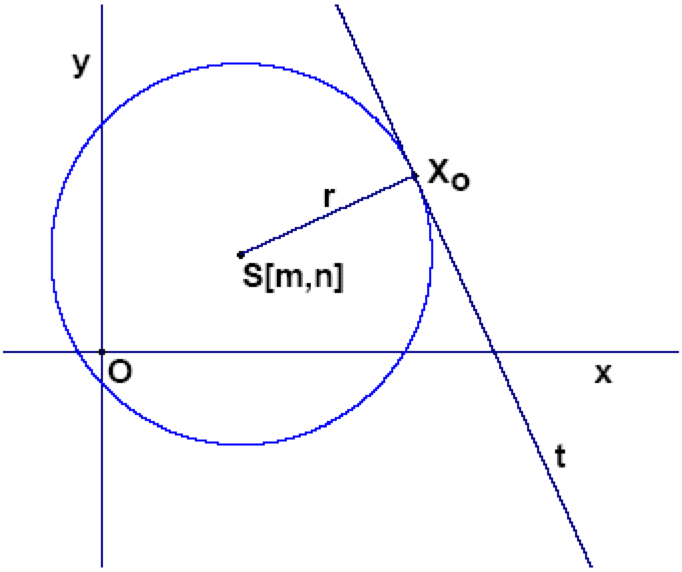
Řešení: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

4.) Určete rovnice všech kružnic, které se dotýkají osy x, procházejí bodem $A[4;3]$ a mají střed na přímce, která prochází středy kružnic o rovnicích $x^2+y^2-6x+2y-6=0$; $x^2+y^2+12x-4y=0$.

Řešení: kružnice neexistuje.

Tečna kružnice

Jestliže bod $X_0[x_0;\ y_0]$ je bodem kružnice se středem $S[m;n]$ a poloměrem r, je bod X_0 bodem dotyku kružnice a její tečny t v tomto bodě.



Tečna má obecnou rovnici $ax + by + c = 0$, kde a, b jsou souřadnice normálového vektoru tečny, tedy vektoru $\overrightarrow{SX_0}$.

$\overrightarrow{SX_0} = (x_0 - m;\ y_0 - n)$

Tečna má tedy rovnici $(x_0 - m) \cdot x + (y_0 - n) \cdot y + c = 0$

Hodnotu c určíme z podmínky, že tečna t prochází bodem X_0.

Tedy $(x_0 - m) \cdot x_0 + (y_0 - n) \cdot y_0 + c = 0 \ \Rightarrow\ c = -(x_0 - m) \cdot x_0 - (y_0 - n) \cdot y_0$

Dosadíme do rovnice tečny a dostaneme:

$(x_0 - m) \cdot x + (y_0 - n) \cdot y - (x_0 - m) \cdot x_0 - (y_0 - n) \cdot y_0 = 0$ (1)

Bod $X_0[x_0;\ y_0]$ leží na kružnici, musí proto jeho souřadnice vyhovovat rovnici kružnice, takže je dosadíme za x a y.

$(x_0 - m)^2 + (y_0 - n)^2 = r^2 \quad \approx \quad {x_0}^2 + {y_0}^2 - 2mx_0 - 2ny_0 + m^2 + n^2 = r^2$ (2)

Pokud rovnice (1) a (2) sečteme, dostaneme rovnici tečny ve tvaru

$$\boxed{(x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2}$$

Tečna kružnice

Varianta A

Ověřte, že bod $A[2;\ -4]$ leží na kružnici $k: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Potom napište rovnici tečny v bodě A ke kružnici k.

***Příklad*:**

Leží-li bod A na kružnici k, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici kružnice.

$2^2 + (-4)^2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) = 0$

$4 + 16 + 4 - 16 = 0$

Rovnost platí, bod A proto leží na kružnici k.

Rovnici kružnice si upravíme na středový tvar: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$

Tečna kružnice v libovolném bodě dotyku $X[x_0;\ y_0]$ má rovnici:

$(x-1) \cdot (x_0 - 1) + (y+2) \cdot (y_0 + 2) = 5$

Tečnu v bodě A najdeme tak, že do rovnice tečny dosadíme za souřadnice $x_{0;}y_0$ souřadnice bodu A.

$(x-1) \cdot (2-1) + (y+2) \cdot (-4+2) = 5$

Po úpravě dostaneme: $x - 2y - 10 = 0$

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Výsledek řešení: $x - 2y - 10 = 0$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Najděte rovnici tečny kružnice $k: x^2 + y^2 = 25$ v bodě $A[3; 4]$.

Řešení: $3x + 4y - 25 = 0$

2.) Najděte rovnici tečny kružnice $k: x^2 + y^2 = 13$ v bodě $B[2; y > 0]$.

Řešení: $2x + 3y - 13 = 0$

3.) Určete všechna reálná čísla m, pro něž je přímka $p = \{[-7 + mt;\ -17 + t]; t \in R\}$ tečnou kružnice $k: x^2 + y^2 = 169$.

Řešení: $m \in \left\{-\frac{5}{12}; 2{,}4\right\}$

4.) Napište rovnice tečen kružnice $k: x^2 + y^2 + 4x - 10y - 140 = 0$ v jejích průsečících s přímkou $p: x = 3$.

Řešení: $5x + 12y - 219 = 0; 5x - 12y - 99 = 0$.

Tečna kružnice

Varianta B

Napište rovnice tečen kružnice $k: x^2 + y^2 - x - 2y = 0$, které jsou kolmé k přímce $p: 2x - y + 6 = 0$

Jakákoliv přímka kolmá k přímce p, má rovnici $x + 2y + c = 0$.

Přímka má být tečnou, to znamená, že při řešení vzájemné polohy kružnice a přímky musí vyjít jedno řešení.

Řešíme tedy vzájemnou polohu přímky a kružnice tak, že vyjádříme z rovnice přímky x nebo y a dosadíme do rovnice kružnice.

***Příklad*:**

$x = -2y - c$

$(-2y - c)^2 + y^2 - (-2y - c) - 2y = 0$

$4y^2 + 4yc + c^2 + y^2 + 2y + c - 2y = 0$

$5y^2 + 4yc + c^2 + c = 0$

Kvadratická rovnice má právě jedno řešení, jestliže platí: $D = 0$.

$D = (4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 + c) = 0$

Po úpravě dostaneme $16c^2 - 20c^2 - 20c = 0 \Rightarrow -4c^2 - 20c = 0 \Rightarrow c \cdot (c + 5) = 0$

Odtud $c = 0 \ \vee c = -5$

Hledané tečny jsou: $t_1: x + 2y = 0;\ t_2: x + 2y - 5 = 0$.

***Příklad*:**

[Varianta A]

[Varianta B]

[Varianta C]

Výsledek řešení: $t_1: x + 2y = 0;\ t_2: x + 2y - 5 = 0$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnice tečen kružnice $k: x^2 + y^2 - 8x - y + 5 = 0$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x - y + 2 = 0$.

Řešení:$y = 2x; y = 2x - 15$

2.) Napište rovnice tečen kružnice $k: (x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 13$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x - 3y + 5 = 0$.

Řešení: $2x - 3y - 35 = 0; 2x - 3y - 9 = 0$.

3.) Napište rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 - 8x - y + 15 = 0$, víte-li, že směrnice tečny je $k = 2$.

Řešení: $y = 2x - 5; y = 2x - 10$

4.) Napište rovnici tečny kružnice $k: x^2 + y^2 - x - y - 4 = 0$ tak, aby odchylka tečny a osy x byla $\varphi = 45°$.

Řešení: $y = x \pm 3$

Tečna kružnice

Varianta C

Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu $M[-3; 0]$ ke kružnici $k: x^2 + y^2 - 6x = 0$.

***Příklad*:**

Kružnici upravíme na středový tvar: $(x-3)^2 + y^2 = 9$

Tečna této kružnice v libovolném bodě dotyku $T[x_0;\ y_0]$ má rovnici:

$(x-3) \cdot (x_0 - 3) + y \cdot y_0 = 9$

Bod M je vnější bod kružnice, musí ležet na tečně, takže jeho souřadnice musí rovnici tečny vyhovovat.

$(-3-3) \cdot (x_0 - 3) + 0 \cdot y_0 = 0 \ \Rightarrow -6x_0 + 9 = 0 \ \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}$

Protože bod $T[x_0;\ y_0]$ leží na kružnici, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici kružnice, dosadíme tedy souřadnici $x_0 = \frac{3}{2}$ a vypočítáme souřadnici y_0.

${y_0}^2 = 9 - \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 \ \Rightarrow {y_0}^2 = 9 - \frac{9}{4} \ \Rightarrow \ y_0 = \mp\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Tečny mají tedy rovnice:

$t_1: \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{27}{2} = 0 \quad t_2: \frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{27}{2} = 0$

Odchylku tečen vypočítáme podle vzorce pro odchylku přímek:

$$cos\varphi = \frac{\left|\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right|}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}} = \frac{\left|\frac{9}{4} - \frac{27}{4}\right|}{\frac{36}{4}} = \frac{\frac{18}{4}}{9} = \frac{18}{36} = 0{,}5 \ \ \Rightarrow \ \ \varphi = 60°$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\varphi = 60°$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vypočítejte velikost úhlu, pod kterým je vidět kružnici $k: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ z bodu $M[3; 0]$.

Řešení: $\varphi \doteq 106°16'$

2.) Určete odchylky tečen kružnic $k_1: x^2 + y^2 = 25;\ k_2: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 65 = 0$ ve společných bodech těchto kružnic.

Řešení: $\varphi = 12°32'$

3.) Najděte průsečíky kružnic $k_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0;\ k_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$. V každém průsečíku určete tečny obou kružnic a úhel, který tyto tečny svírají.

Řešení: $[1; 2];\ [3; 2]; x - y + 1 = 0; x = 1; 45°; x + y - 5 = 0; x = 3; 45°$.

4.) Určete m tak, aby přímka $p: 2x - y + d = 0$ byla tečnou kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ a určete bod dotyku.

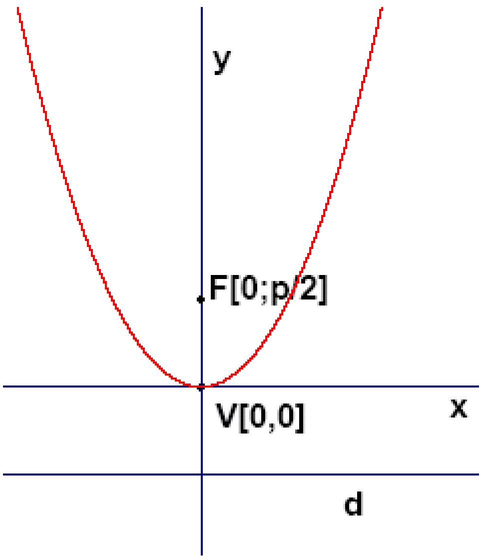
Řešení: $d = -5 \mp 5\sqrt{2};\ \left[1 - 2\sqrt{2};\ -3 + \sqrt{2};\ \left[1 + 2\sqrt{2};\ -3 - \sqrt{2}\right]\right]$

Parabola

Parabolu získáme jako průnik rotační kuželové plochy rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy a je rovnoběžná právě s jednou přímkou kuželové plochy.
Parabola je množina všech bodů *X* roviny, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu *F* jako od dané přímky *d*, která bodem *F* neprochází.
Bod *F* se nazývá **ohnisko paraboly**, přímka *d* se nazývá **řídící přímka paraboly**. Osa *o* paraboly je kolmá na řídící přímku a prochází ohniskem *F* paraboly a vrcholem *V* paraboly.
Vzdálenost ohniska F od řídící přímky d se nazývá **parametr paraboly** a značíme ho $p;\ p = v(F, d), p > 0$.

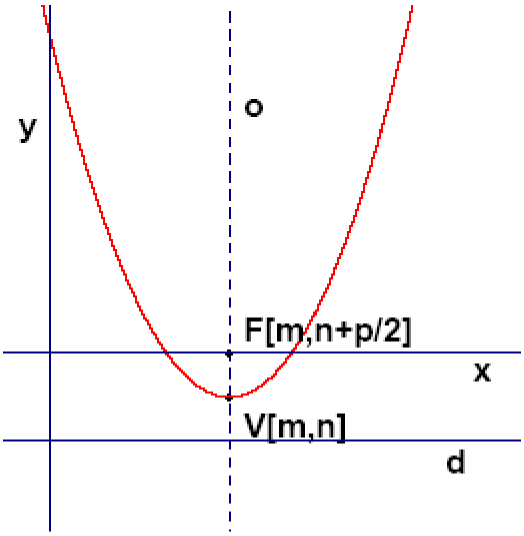
Analytické vyjádření paraboly ve vrcholovém tvaru:

1.) $V[0; 0]$, osa *o* paraboly splývá s osou *y*, ohnisko leží nad vrcholem *V*:
$\boxed{x^2 = 2py}$; rovnice řídící přímky: $d: y = -\frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[0; \frac{p}{2}\right]$



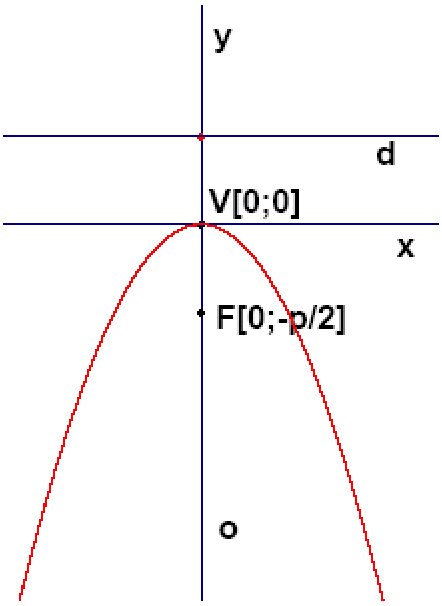
2.) $V[m; n]$, osa *o* paraboly je rovnoběžná s osou *y*, ohnisko *F* leží nad vrcholem *V*:

$\boxed{(x-m)^2 = 2p(y-n)}$; rovnice řídící přímky: $d: y = n - \frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[m;\ n + \frac{p}{2}\right]$



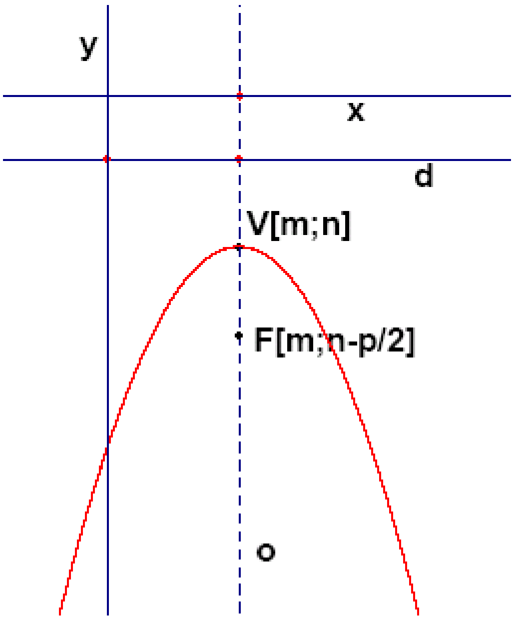
3.) $V[0; 0]$, osa *o* paraboly splývá s osou *y*, ohnisko *F* leží pod vrcholem *V*:

$\boxed{x^2 = -2py}$; rovnice řídící přímky $d: y = \frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[0;\ \frac{p}{2}\right]$



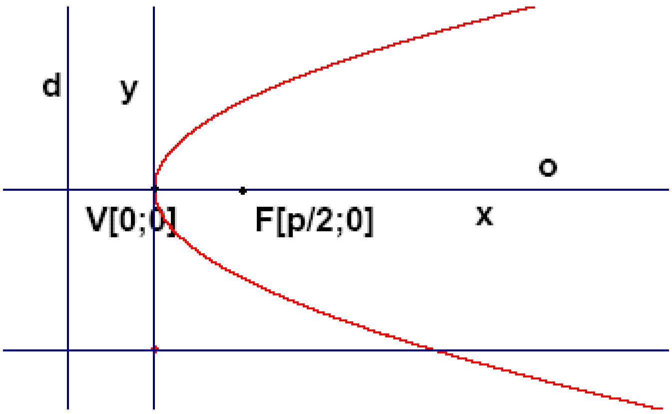
4.) $V[m; n]$, osa *o* paraboly je rovnoběžná s osou *y*, ohnisko *F* leží pod vrcholem *V*:

$\boxed{(x-m)^2 = -2p(y-n)}$; rovnice řídící přímky $d: y = n + \frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[m; n - \frac{p}{2}\right]$



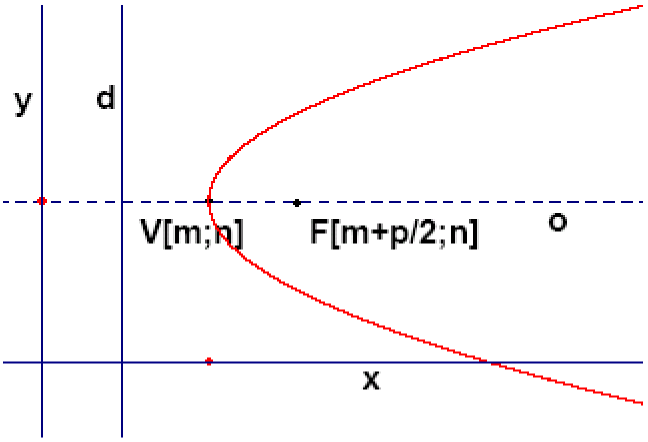
5.) $V[0; 0]$, osa *o* paraboly splývá s osou *x*, ohnisko *F* leží napravo od vrcholu *V*:

$\boxed{y^2 = 2px}$; rovnice řídící přímky $d: x = -\frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[\frac{p}{2}; 0\right]$



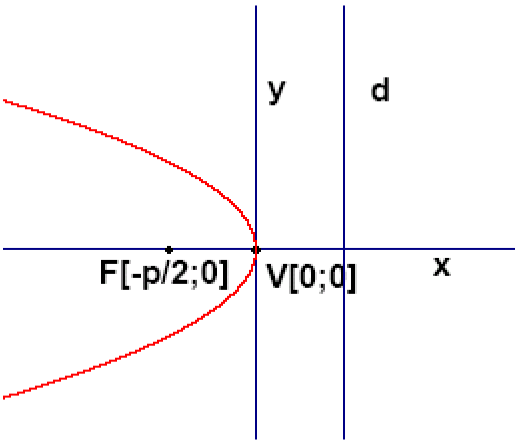
6.) $V[m; n]$, osa o paraboly je rovnoběžná s osou x, ohnisko F leží napravo od vrcholu V:

$\boxed{(y-n)^2 = 2p(x-m)}$; rovnice řídící přímky $d: x = m - \frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[m + \frac{p}{2}; n\right]$



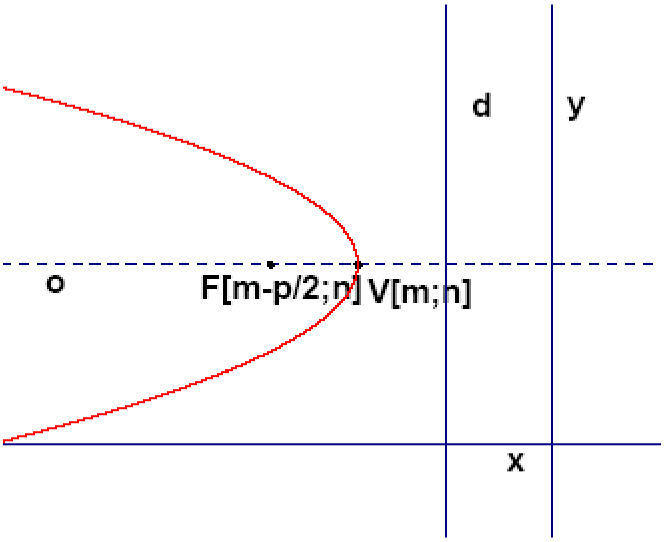
7.) $V[0; 0]$, osa o paraboly splývá s osou x, ohnisko F leží nalevo od vrcholu V:

$\boxed{y^2 = -2px}$; rovnice řídící přímky $d: x = \frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[-\frac{p}{2}; 0\right]$



8.) $V[m;n]$, osa o paraboly je rovnoběžná s osou x, ohnisko F leží nalevo od vrcholu V:

$\boxed{(y-n)^2 = -2p(x-m)}$; rovnice řídící přímky $d: x = m + \frac{p}{2}$; ohnisko $F\left[m - \frac{p}{2}; n\right]$



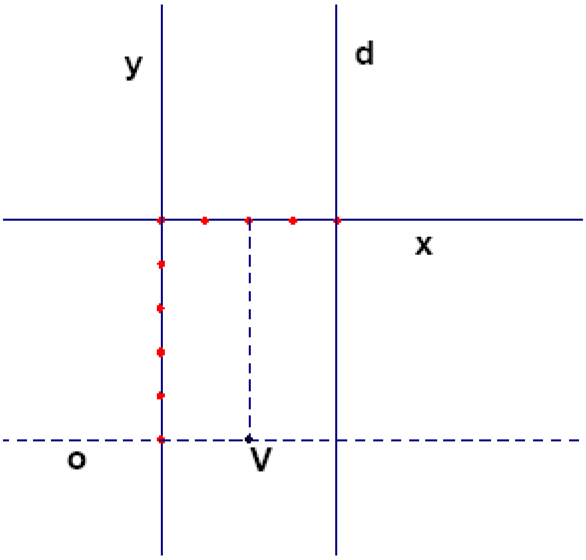
<u>Vnitřní oblastí paraboly</u> s ohniskem F a řídící přímkou d nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí: $|FX| < v(X;d)$.

Parabola

Varianta A

Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[2;\ -5]$ a řídící přímku $d: x = 4$.

***Příklad*:**



Z obrázku je patrné, že parabola má osu rovnoběžnou s osou *x*, její ohnisko leží nalevo od vrcholu.

Pracujeme tedy s rovnicí:

$(y-n)^2 = -2p(x-m)$

Vzdálenost vrcholu *V* od řídící přímky *d* je rovna $\frac{p}{2} \Rightarrow p = 4$

Dosadíme do rovnice paraboly souřadnice vrcholu a parametr a dostaneme:

$$(y+5)^2 = -8(x-2)$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $(y+5)^2 = -8(x-2)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici paraboly, která má vrchol $V[2;\ -5]$ a řídící přímku $d: y = 5$.

Řešení: $(x-2)^2 = -40(y+5)$

2.) Napište rovnici paraboly, která má ohnisko $F[3;\ -1]$ a řídící přímku $d: y = -3$.

Řešení: $(x-3)^2 = 4(y+2)$

3.) Napište rovnici paraboly, která má ohnisko $F[3;\ -1]$ a řídící přímku $d: x = 1$.

Řešení: $(y+1)^2 = 4(x-2)$

4.) Určete ohnisko a řídící přímku paraboly o rovnici $2(x-3) = y^2$.

Řešení: $F[3{,}5; 0]$; $d: x = 2{,}5$.

Parabola

Varianta B

Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou *y* a parabola prochází bodem $K[4; 8]$.

***Příklad*:**

Parabola s vrcholem v počátku a osou shodnou s osou *y* má rovnici:

$x^2 = 2py$

Jestliže bod K leží na parabole, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici paraboly, proto je dosadíme.

$4^2 = 2p \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad p = 1$

Parabola má tedy rovnici $x^2 = 2y$.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $x^2 = 2y$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osa paraboly je shodná s osou *x* a parabola prochází bodem $L[4; 4]$.

Řešení: $y^2 = 4x$

2.) Napište rovnici paraboly, znáte-li vrchol $V[-4; -2]$ a víte-li, že prochází bodem $M[-1; 2]$ a zároveň platí, že osa je rovnoběžná s osou y.

Řešení: $(x + 4)^2 = \frac{9}{4}(y + 2)$

3.) Určete ohnisko, vrchol a řídící přímku paraboly dané rovnicí $x^2 + 9y + 6x - 9 = 0$.

Řešení: $F[-3; -0{,}25]; V[-3; 2]; d: y = 4{,}25$.

4.) Určete rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou *y*, má vrchol $V[6; -2]$ a prochází bodem $K[3; -5]$.

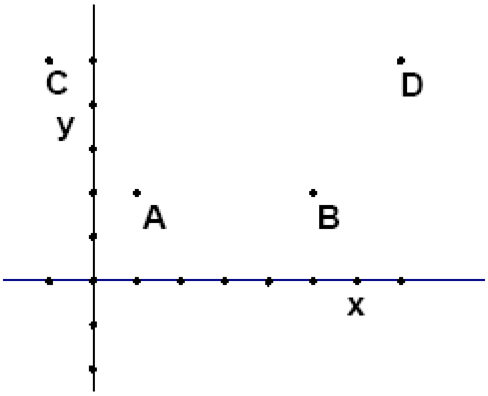
Řešení: $-3(x - 6) = (y + 2)^2$

Parabola

Varianta C

Napište rovnici paraboly, která prochází body $K[1; 2]; L[5; 2]; M[-1; 5]; N[7; 5]$.

Příklad:



Vidíme, že parabola má osu rovnoběžnou s osou *y* a ohnisko nad vrcholem, pracujeme tedy s rovnicí $(x-m)^2 = 2p(y-n)$

Máme tři neznámé – *x*, *y*, *z*, které vypočítáme dosazením tří bodů do rovnice paraboly.

$$K \in P: (1-m)^2 = 2p(2-n)$$

$$L \in P: (5-m)^2 = 2p(2-n)$$

$$M \in P: (-1-m)^2 = 2p(5-n)$$

Po umocnění: $1 - 2m + m^2 = 4p - 2pn$

$$25 - 10m + m^2 = 4p - 2pn$$

$$1 + 2m + m^2 = 10p - 2pn$$

Od druhé rovnice odečteme první a dostaneme: $24 - 8m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 3$

Od druhé rovnice odečteme třetí a dostaneme: $24 - 12m = -6p$.

Pokud dosadíme $m = 3$ dostaneme $-6p = -12 \quad \Rightarrow \quad p = 2$

Dopočítáme poslední neznámou dosazením za *m* a *p* do kterékoliv ze tří rovnic $\Rightarrow n = 1$.

Hledaná parabola je $(x-3)^2 = 4(y-1)$.

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $(x-3)^2 = 4(y-1)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x a prochází body $M[0; 0]; N[0; -4]$. Ohnisko je $F[0; -2]$.

Řešení: $(y + 2)^2 = \pm 4(x \pm 1)$

2.) Napište rovnici paraboly, která prochází body $K[3; 8]; L[-5; 0]; M[-2; -2]$. Její osa je rovnoběžná s osou x.

Řešení: $(y - 2)^2 = 4(x + 6)$

3.) Napište rovnici paraboly, která prochází body $E[-5; 3]; F[1; -3]; G[-9; -13]$. Její osa je rovnoběžná s osou x.

$(x + 3)^2 = -2(y - 5)$

4.) Určete souřadnice společných bodů přímky a paraboly, jestliže $p: x + 2y - 4 = 0; P: x^2 + 32y = 0$.

Řešení: $[8; -2]$

Tečna paraboly

$T[x_0;\ y_0]$ je bod dotyku, $X[x; y]$ je libovolný bod tečny. Pak tečna paraboly má rovnici:

1.) parabola: $(x-m)^2 = 2p(y-n)$
tečna: $(x-m)(x_0-m) = p(y-n) + p(y_0-n)$

2.) parabola: $(x-m)^2 = -2p(y-n)$
tečna: $(x-m)(x_0-m) = -p(y-n) - p(y_0-n)$

3.) parabola: $(y-n)^2 = 2p(x-m)$
tečna: $(y-n)(y_0-n) = p(x-m) + p(x_0-m)$

4.) parabola: $(y-n)^2 = -2p(x-m)$
tečna: $(y-n)(y_0-n) = -p(x-m) - p(x_0-m)$

Poznámka: Osa paraboly a každá přímka s ní rovnoběžná má s parabolou pouze jediný společný bod, tyto přímky však nepovažujeme za tečny paraboly.

Tečna paraboly

Varianta A

Napište rovnici tečny k parabole $x^2 + 6x - 2y + 15 = 0$ v jejím bodě $K[-3; 3]$.

Příklad:

Rovnici paraboly přepíšeme do vrcholového tvaru: $(x+3)^2 = 2(y-3)$

Tečna této paraboly v bodě dotyku $T[x_0;\ y_0]$ má rovnici:

$(x+3)(x_0+3) = 1(y-3) + 1(y_0+3)$

Bod K je bodem dotyku, proto jeho souřadnice dosadíme za x_0, y_0.

$(x+3)(-3+3) = y - 3 + 3 + 3 \quad \Rightarrow$ tečna má rovnici $y - 3 = 0$

Příklad:

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $y - 3 = 0$

Příklady k procvičení:

1.) Určete rovnici tečny paraboly $y = 2x^2 - 5x + 1$ v jejím bodě $T[2;\ y_0]$.

Řešení: $3x - y - 7 = 0$

2.) Určete rovnici tečny paraboly $x = -y^2 + 4y - 7$ v jejím bodě $T[x_0;\ -2]$.

Řešení: $x - 8y + 3 = 0$

3.) Napište rovnici tečny k parabole $y^2 = 3x$ v jejím bodě $A[x; 6]$.

Řešení: $x - 4y + 12 = 0$

4.) Ověřte, že bod $T[2; 0\ ]$ leží na parabole $2x^2 - 3x + y - 2 = 0$ a potom napište rovnici tečny v tomto bodě.

Řešení: $5x + y - 10 = 0$

Tečna paraboly

Varianta B

Napište rovnici tečny paraboly $y^2 - 6x - 6y + 3 = 0$ rovnoběžné s přímkou $p: 3x - 2y + 7 = 0$.

***Příklad*:**

Jakákoliv rovnoběžka s přímkou p má rovnici $3x - 2y + c = 0$. Pokud to má být tečna, musí při řešení vzájemné polohy paraboly a přímky vyjít jedno řešení.

Vyjádříme jednu neznámou z rovnice přímky: $x = \frac{2y-7}{3}$ a dosadíme do rovnice paraboly:

$$y^2 - 6\left(\frac{2y-7}{3}\right) - 6y + c = 0$$

Po úpravě

$$y^2 - 10y + 2c + 3 = 0$$

Musí platit: $D = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 - 4(2c + 3) = 0 \quad \Rightarrow c = 11$

Tečna má rovnici:

$$2x - 2y + 11 = 0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $2x - 2y + 11 = 0$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnice tečen paraboly $y^2 - 3x + y - 2 = 0$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: x + y - 1 = 0$.

Řešení: $y = -x - 2$

2.) Napište rovnice tečen paraboly $2x^2 + y - 4 = 0$, které jsou kolmé k přímce $p: x - 7 = 0$.

Řešení: $y = 4$

3.) Parabola je dána rovnicí $y + 3 = x^2 + 2x$. Určete rovnice všech tečen paraboly, které jsou kolmé k přímce $x + y = 0$.

Řešení: $4x - 4y - 13 = 0$

4.) Parabola je dána rovnicí $y + 3 = x^2 + 2x$. Určete rovnice všech tečen paraboly, které obsahují bod $K[-3;\ -1]$.

Řešení: $6x + y + 19 = 0; 2x + y + 7 = 0$

Tečna paraboly

Varianta C

Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu $M[0;\ -2]$ k parabole $x^2 - 8y = 0$.

***Příklad*:**

Tečna této paraboly v bodě dotyku $T[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$xx_0 = 4y + 4y_0$$

Bod *M* leží na této tečně, musí tedy jeho souřadnice vyhovovat rovnici tečny:

$$0 \cdot x_0 = 4 \cdot (-2) + 4y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2$$

Bod dotyku leží na tečně a současně na parabole, musí tedy jeho souřadnice vyhovovat rovnici paraboly:

$${x_0}^2 - 8 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \mp 4$$

Máme tedy dva body dotyku $T_1[4; 2];\ T_2[-4; 2]$.

Můžeme tedy napsat rovnice obou tečen:

$$t_1: 4x = 4y + 8 \quad \Rightarrow \quad x - y - 2 = 0$$

$$t_2: -4x = 4y + 8 \quad \Rightarrow \quad x + y + 2 = 0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

$$t_1: 4x = 4y + 8 \quad \Rightarrow \quad x - y - 2 = 0$$

$$t_2: -4x = 4y + 8 \quad \Rightarrow \quad x + y + 2 = 0$$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Rozhodněte, zda lze z bodu $M[-8; 0]$ sestrojit tečny k parabole $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$.

Řešení: nelze

2.) Napište rovnici tečny paraboly $y^2 - 16x - 4y - 12 = 0$ procházející bodem $K[-7; 0]$.

Řešení: $x - y + 7 = 0; 2x + 3y + 14 = 0$

3.) Vypočítejte odchylku tečen kružnice $x^2 + y^2 = 225$ a paraboly $y^2 = 16x$ v jejich společných bodech.

Řešení: $\varphi = 70°34'$

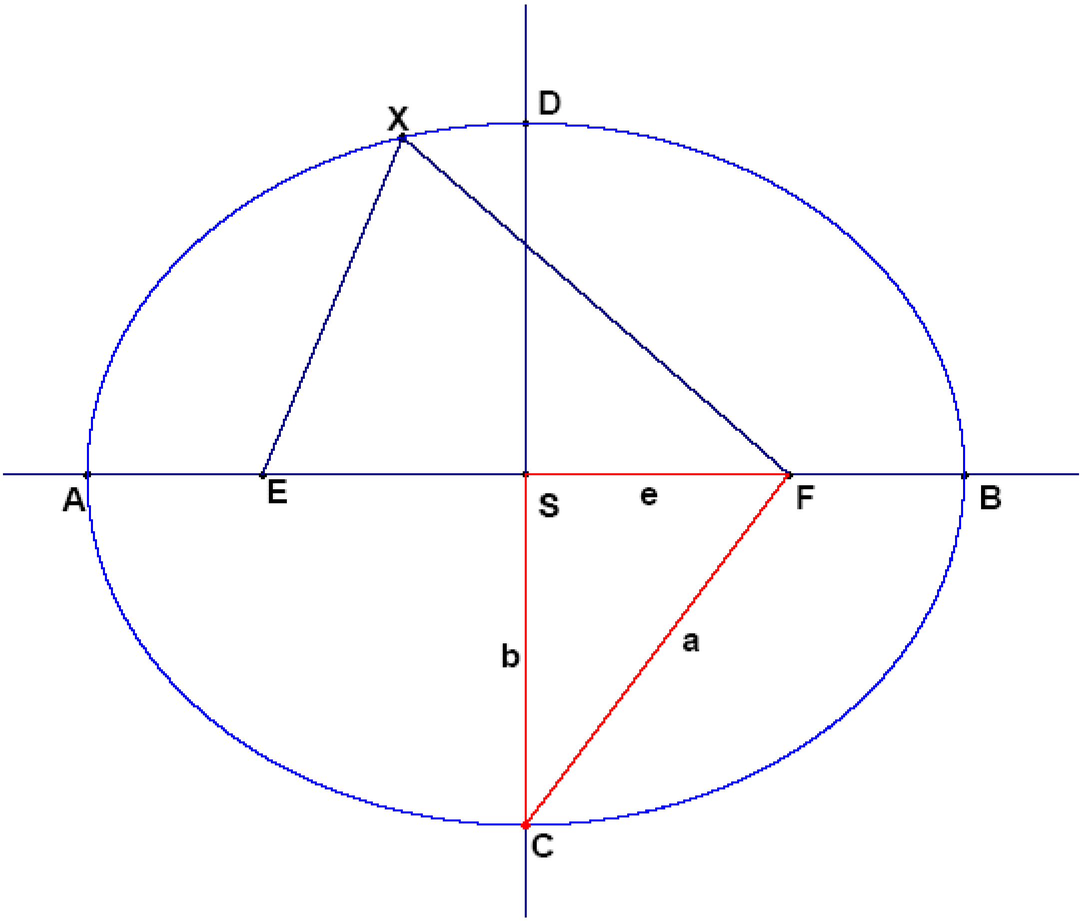
4.) Určete rovnici každé tečny paraboly o rovnici $y^2 = 6x$, která má od osy paraboly odchylku $45°$.

Řešení: $2x \pm 2y + 3 = 0$

Elipsa

Elipsu získáme jako průnik rotační kuželové plochy s rovinou, která není kolmá na osu této plochy a neprochází jejím vrcholem. Lze ji také získat jako průnik rotační válcové plochy a roviny, která není s osou válcové plochy rovnoběžná.

Elipsa je množina všech bodů *X* v rovině, které mají od dvou pevně daných bodů *E*, *F* konstantní součet vzdáleností; toto číslo značíme *2a*.



$$|EX| + |FX| = 2a$$

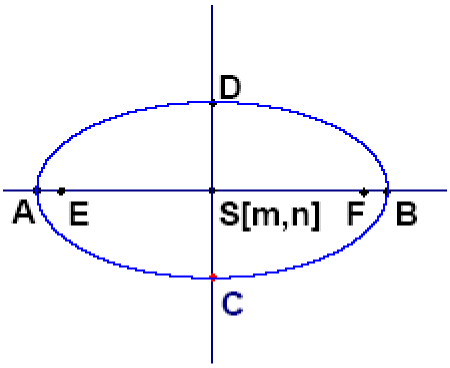
Bod $S[m; n]$ je **střed elipsy**; body *E*, *F* se nazývají **ohniska elipsy**, přičemž platí $|ES| = |SF| = e$, kde číslo *e* se nazývá **excentricita (výstřednost) elipsy**. Přímka *EF* se nazývá **hlavní osa elipsy**, body *A*, *B* jsou **hlavní vrcholy elipsy** a platí $|AS| = |SB| = a$, $|AB| = 2a$. Číslo *a* je **délka hlavní poloosy**. Body *C*, *D* jsou **vedlejší vrcholy elipsy** a platí $|CS| = |SD| = b, |CD| = 2b$, číslo *b* je **délka vedlejší poloosy**. Přímka *CD* se nazývá **vedlejší osa elipsy**.

Z pravoúhlého trojúhelníku *SCF* platí podle Pythagorovy věty:

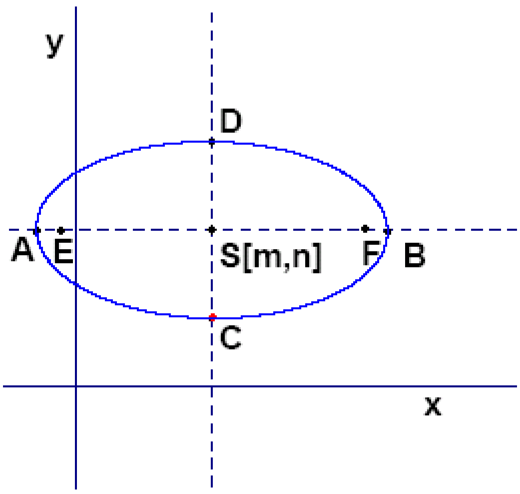
$$b^2 + e^2 = a^2.$$

Analytické vyjádření elipsy:

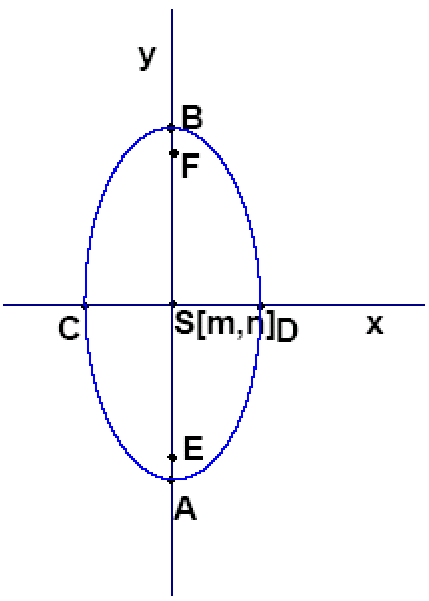
$S[0;0]$; hlavní osa leží na ose x: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$



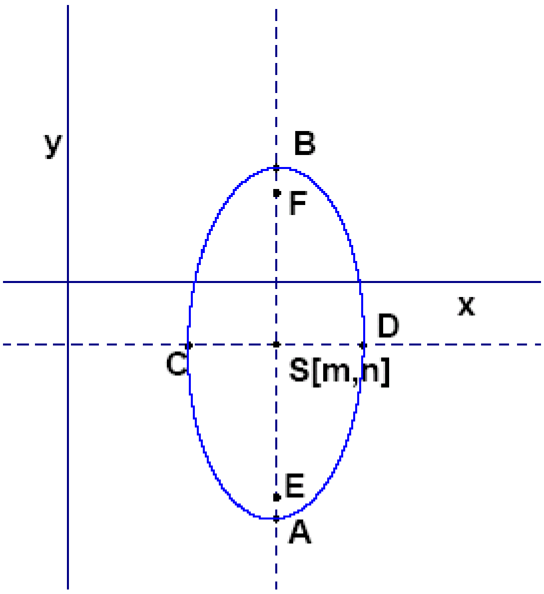
$S[m;n]$; hlavní osa je rovnoběžná s osou x: $\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$



$S[0;0]$; hlavní osa leží na ose y: $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$



$S[m; n]$; hlavní osa je rovnoběžná s osou y: $\boxed{\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1}$



Vnitřní oblast elipsy s ohnisky E, F a s hlavní osou délky $2a; 2a > |EF|$ nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí:$|EX| + |FX| < 2a$.

Elipsa a přímka

Přímka, která leží v rovině elipsy a má s elipsou jeden společný bod, je tečnou elipsy. Má-li přímka s elipsou dva společné body, nazývá se sečna. Vzájemnou polohu řešíme dosazením z rovnice přímky do rovnice elipsy.

Elipsa

Varianta A

Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $E[-3; 2]; F[3; 2]$ a hlavní poloosu 5.

***Příklad*:**

Střed elipsy je střed úsečky $EF \Rightarrow S[0; 2]$, podle polohy ohnisek vidíme, že elipsa má osu rovnoběžnou s osou x.

$|ES| = e = 3\ ;\ a = 5$

U elipsy platí: $a^2 = e^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - e^2}$

$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

Rovnice elipsy tedy je: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $E[1; 8]; F[1; 0]$ a vedlejší poloosu 3.

Řešení: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

2.) Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $E[3; 1]; F[5; 1]$ a hlavní vrchol $A[7; 1]$.

Řešení: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{8} = 1$

3.) Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $E[-2;\ -2]; F[-2; 6]$ a hlavní vrchol $A[-2; 7]$.

Řešení: $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

4.) Napište rovnici elipsy, znáte-li jedno ohnisko $E[3;\ -2]$ a vedlejší vrcholy $C[6; 2]; D[6;\ -6]$.

Řešení: $\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

Elipsa

Varianta B

Určete, pro které hodnoty parametru $m \in R$ má přímka $p: y = kx$ s elipsou $x^2 + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

a) právě jeden společný bod; b) dva společné body; c) žádný společný bod

Vzájemnou polohu přímky a elipsy řešíme dosazením z rovnice přímky do rovnice elipsy. Podle diskriminantu rozhodujeme o počtu řešení.

***Příklad*:**

Vzájemnou polohu přímky a elipsy řešíme dosazením z rovnice přímky do rovnice elipsy. Podle diskriminantu rozhodujeme o počtu řešení.

$x^2 + 4(mx)^2 - 6x + 1 = 0$

$x^2 + 4m^2x^2 - 6x + 1 = 0$

$x^2 \cdot (1 + 4m^2) - 6x + 1 = 0$

a) $D = 0 \;\Rightarrow\; 36 - 4 \cdot (1 + 4m^2) = 0 \;\Rightarrow\; 9 = 1 + 4m^2 \;\Rightarrow\; m^2 = 2 \;\Rightarrow\; m = \pm\sqrt{2}$

b) $D > 0 \;\Rightarrow\; m \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \infty\right)$

c) $D < 0 \;\Rightarrow m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: a) $m = \pm\sqrt{2}$; b) $m \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; \infty\right)$

c) $m \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p: 2x + y - 6 = 0$ a elipsy o rovnici $4x^2 + y^2 = 20$.

Řešení: p je sečna elipsy; $P_1[2; 2]$; $P_2[1; 4]$

2.) Určete, pro které hodnoty parametru $k \in R$ má přímka $y = k$ s elipsou o rovnici $x^2 + 4y^2 = 36$ právě jeden společný bod, dva společné body, žádný společný bod.

Řešení: $k = \pm 3; k \in (-3; 3); k \in (-\infty;\ -3) \cup (3;\ \infty)$

3.) Určete délku tětivy, kterou vytíná elipsa $2x^2 + y^2 = 8$ na přímce $y = x - 2$.

Řešení: $\frac{8}{3}\sqrt{2}$

4.) Vypočítejte délku tětivy elipsy o rovnici $x^2 + 2y^2 = 18$, která leží na ose I. A III. kvadrantu.

Řešení: $4\sqrt{3}$

Elipsa

Varianta C

Napište rovnici elipsy, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed $S[-3;1]$ a prochází body $K[9;9]$; $L[13;\ -5]$.

***Příklad*:**

Rovnice elipsy se středem $S[-3;1]$ je: $\frac{(x+3)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$

V rovnici máme dvě neznámé (a, b), které vypočítáme dosazením obou zadaných bodů do rovnice elipsy za x a y.

$\frac{(9+3)^2}{a^2}+\frac{(9-1)^2}{b^2}=1\ \wedge\ \frac{(13+3)^2}{a^2}+\frac{(-5-1)^2}{b^2}=1$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic

$\frac{144}{a^2}+\frac{64}{b^2}=1\quad\wedge\quad\frac{256}{a^2}+\frac{36}{b^2}=1$

Z první rovnice vyjádříme výraz $\frac{1}{b^2}=\frac{1-\frac{144}{a^2}}{64}$ a dosadíme do rovnice druhé

$$\frac{256}{a^2}+\frac{36}{64}-\frac{36\cdot 144}{64a^2}=1$$

Po úpravě dostaneme

$$a^2=400\,;\ b^2=100$$

Hledaná elipsa má tedy rovnici

$$\frac{(x+3)^2}{400}+\frac{(y-1)^2}{100}=1$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:

$$\frac{(x+3)^2}{400}+\frac{(y-1)^2}{100}=1$$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou x, její střed je v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku 4 a elipsa prochází bodem $K[-2\sqrt{3}; 1]$.

Řešení: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

2.) Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou x, střed $S[2; 1]$, hlavní poloosa je dvakrát delší než vedlejší poloosa a elipsa prochází počátkem soustavy souřadnic.

Řešení: $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

3.) Napište rovnici elipsy, která má osy shodné s osami soustavy souřadnic a prochází body $K[3\sqrt{2}; 4]; L[-6; \sqrt{7}]$.

Řešení: $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1$

4.) Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu totožnou s osou y, střed má v počátku soustavy souřadnic, hlavní poloosa má délku $4\sqrt{2}$ a elipsa prochází bodem $M[-2\sqrt{2}; 4]$.

Řešení: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$

Hyperbola

Hyperbolu získáme jako průnik rotační kuželové plochy s rovinou, která neprochází vrcholem kuželové plochy. Úhel, který svírá rovina s osou kužele, je menší než úhel, který svírají osa kužele a strana kužele.

Hyperbola je množina všech bodů X v rovině, které mají od dvou daných bodů E, F roviny konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností; toto číslo značíme $2a$.
Bod $S[m; n]$ je **střed hyperboly**, body E, F jsou **ohniska hyperboly**.
Platí: $|SE| = |SF| = e$, e je **excentricita (výstřednost) hyperboly**.
Přímka EF se nazývá **hlavní osa hyperboly**, body A, B jsou **hlavní vrcholy hyperboly**.
Platí: $|SA| = |SB| = a$; $|AB| = 2a$; číslo a je **délka hlavní poloosy**. Vedlejší vrcholy hyperbola nemá, body C, D vnímáme jako pomocné body, pro které platí: $|SC| = |SD| = b, |CD| = 2b$, číslo b je **délka vedlejší poloosy**, přímka CD se nazývá **vedlejší osa hyperboly**.
Mezi čísly a, b, e platí vztah odvozený na základě Pythagorovy věty: $e^2 = a^2 + b^2$, takže

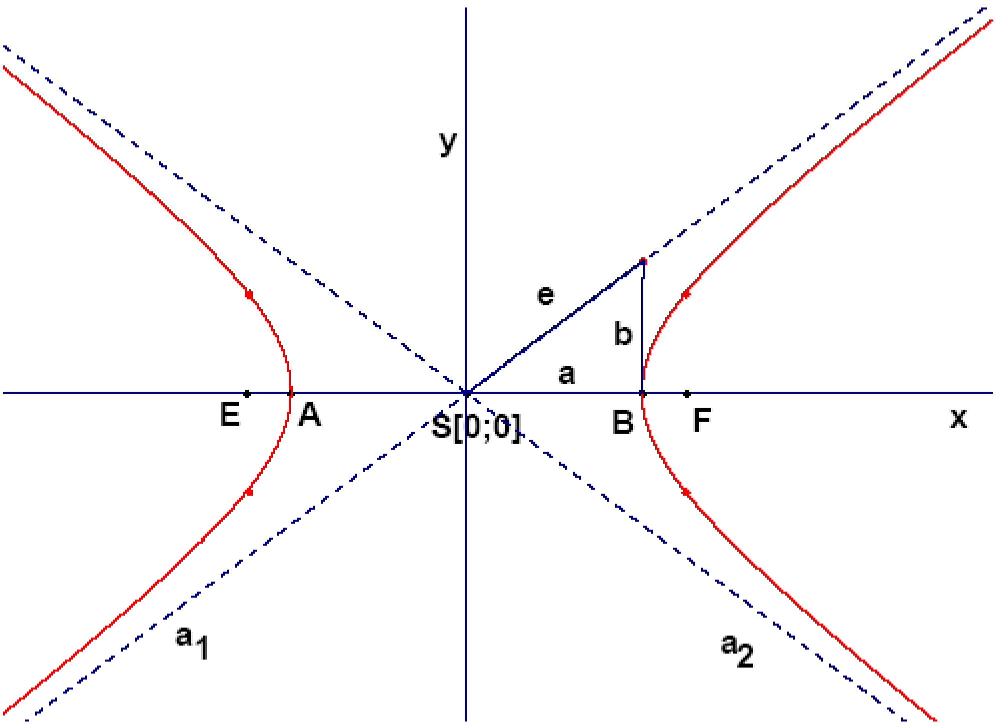
$$\boxed{e = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Hyperbola má dvě asymptoty, které procházejí středem hyperboly.

Analytické vyjádření hyperboly a jejích asymptot:

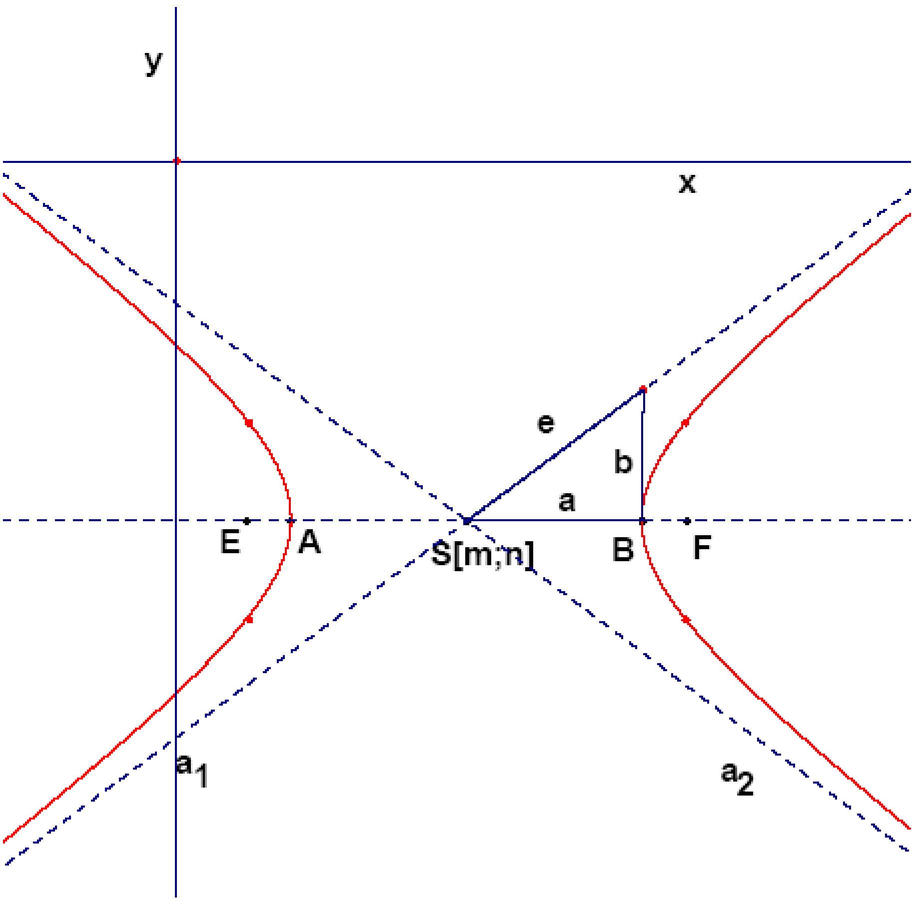
1.) $S[0;0]$; hlavní osa leží na ose x

$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$; rovnice asymptot: $\boxed{a_1: y=\frac{b}{a}x;\ a_2: y=-\frac{b}{a}x}$



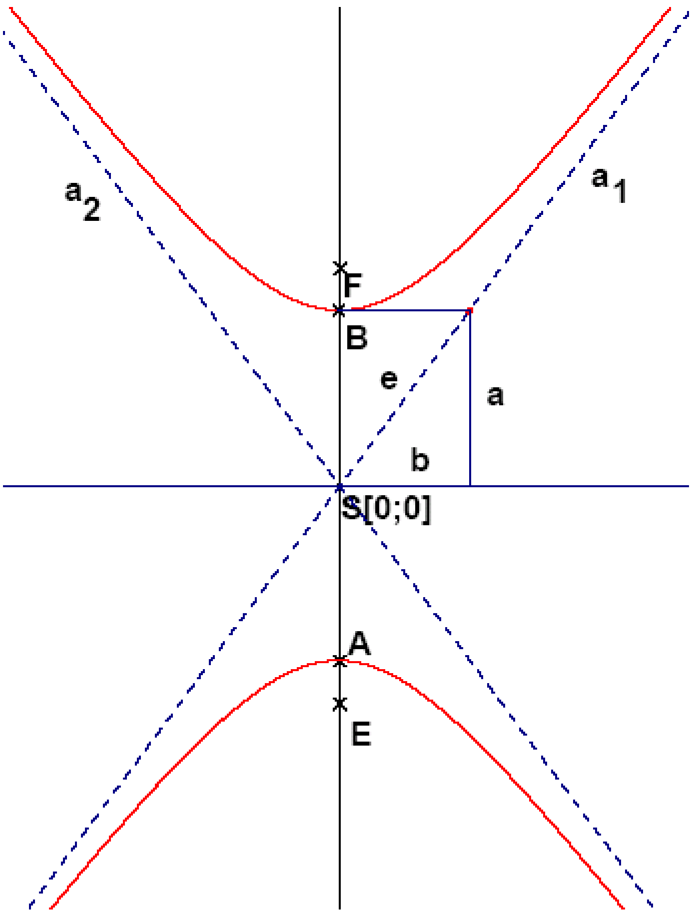
2.) $S[m;n]$; hlavní osa je rovnoběžná s osou x

$\boxed{\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}$; rovnice asymptot: $\boxed{a_1: y=\frac{b}{a}(x-m)+n;\ a_2: y=-\frac{b}{a}(x-m)+n}$



3.) S[0; 0]; hlavní osa leží na ose y

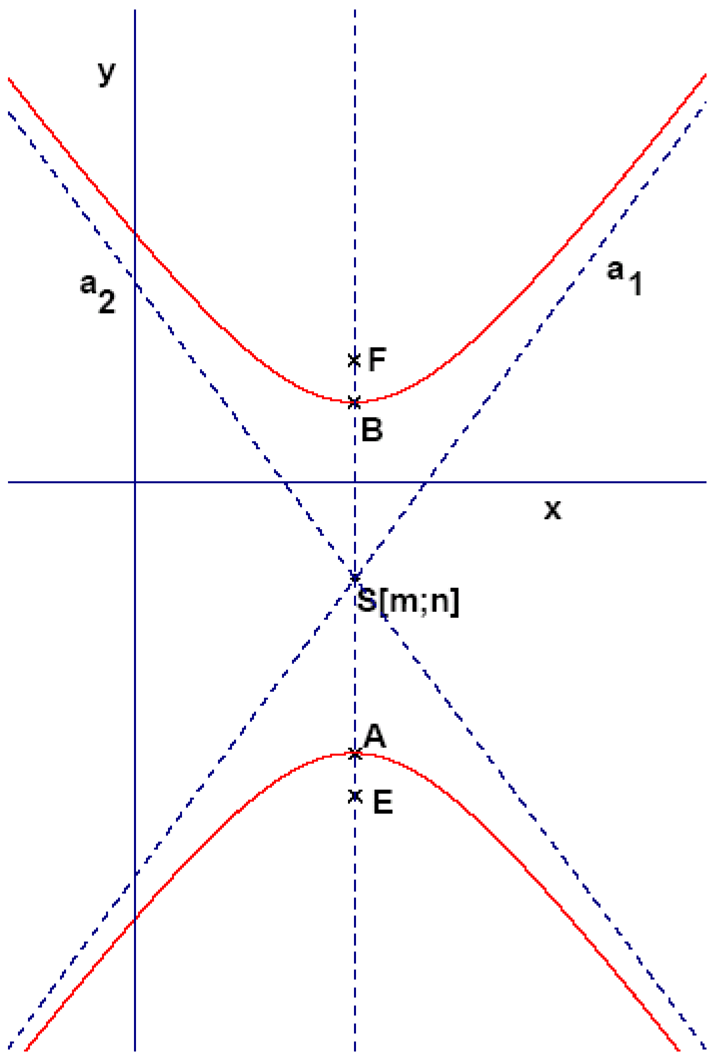
$\boxed{-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$; rovnice asymptot: $\boxed{a_1\colon y=\frac{a}{b}x;\ a_2\colon y=-\frac{a}{b}x}$



4.) S$[m;n]$; hlavní osa je rovnoběžná s osou y

$\boxed{-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1}$;

rovnice asymptot: $\boxed{a_1\colon y=\frac{a}{b}(x-m)+n;\ a_2\colon y=-\frac{a}{b}(x-m)+n}$



Speciálním případem je rovnoosá hyperbola. Platí: $a=b \ \Rightarrow e=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$.

<u>**Vnitřní oblastí jedné větve hyperboly**</u> s ohnisky E, F a hlavní osou délky $2a$ $(2a<|EF|)$ nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|EX|-|FX|>2a$; **vnitřní oblastí** <u>**druhé větve téže hyperboly**</u> nazýváme množinu všech bodů X roviny, pro které platí $|FX|-|EX|>2a$.

Hyperbola

Varianta A

Najděte střed, ohniska, vrcholy a rovnice asymptot hyperboly:

$25x^2 - 16y^2 - 150x + 224y - 959 = 0.$

***Příklad*:**

Rovnici hyperboly upravíme na středový tvar

$25(x^2 - 6x) - 16(y^2 - 14y) = 959$

$25(x-3)^2 - 16(y-7)^2 = 959 + 225 - 784$

$25(x-3)^2 - 16(y-7)^2 = 400$

$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

Z rovnice hyperboly nyní určíme velikost hlavní poloosy, vedlejší poloosy a excentricity:

$$a^2 = 16 \;\Rightarrow\; a = 4;\;\; b^2 = 25 \;\Rightarrow\; b = 5;\;\; e = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

Souřadnice vrcholů a ohnisek tedy jsou:

$A[-1;7]; B[7;7]; S[3;7]; E\left[3-\sqrt{41};7\right]; F\left[3+\sqrt{41};7\right].$

Asymptoty: $y - 7 = \pm\frac{4}{5}(x-3)$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $A[-1;7]; B[7;7]; S[3;7]; E\left[3-\sqrt{41};7\right]; F\left[3+\sqrt{41};7\right]$. Asymptoty: $y - 7 = \pm\frac{4}{5}(x-3)$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Najděte střed, ohniska, vrcholy a rovnice asymptot hyperboly:

$x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$

Řešení:

$A[-5;0]; B[1;0]; C[-2;\ -1]; D[-2;1]; S[-2;0]; E\left[-2-\sqrt{10};0\right]; F\left[-2+\sqrt{10};0\right].$

Asymptoty: $y = \pm\frac{1}{3}(x+2)$

2.) Najděte střed, ohniska, délku obou poloos, excentricitu a rovnice asymptot hyperboly:

$(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = 16$

Řešení:

$S[\,1;-2]; a = 4; b = 2; e = 2\sqrt{5}; E[1-2\sqrt{5};\ -2]; F[1+2\sqrt{5};\ -2]; y+2 = \pm\frac{1}{2}(x-1)$

3.) Najděte střed, ohniska, délku obou poloos, excentricitu a rovnice asymptot hyperboly:

$2x^2 - (y-3)^2 = 1$

Řešení: $S[0;3];\ a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = 1; e = \frac{\sqrt{6}}{2}; E\left[\frac{\sqrt{6}}{2};3\right]; F\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};3\right]; y-3 = \pm\sqrt{2}x$

4.) Najděte střed, ohniska, délku obou poloos, excentricitu a rovnice asymptot hyperboly:

$4y^2 - 9x^2 = 36$

Řešení: $S[0;0]; a = 3; b = 2; e = \sqrt{13}; E[0;\ -\sqrt{13}]; F[0;\ \sqrt{13}]; y = \pm\frac{3}{2}x$

Hyperbola

Varianta B

Napište rovnici hyperboly, která má ohniska $E[-2;1]; F[6;1]$ a hlavní vrchol $A[4;1]$.

***Příklad*:**

Určíme souřadnice středu hyperboly, jde o střed úsečky $EF \Rightarrow S[2;1]$.

Vzdálenost bodů A, S je velikost hlavní poloosy $a = 2$, vzdálenost bodů E, S je délka excentricity $\Rightarrow e = 4$, takže délka vedlejší poloosy je $b = \sqrt{12}$.

Rovnice hyperboly tedy je:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici hyperboly, která má ohniska v bodech $E[-2;0]; F[18;0]$ a hlavní poloosu o délce 8.

Řešení: $\frac{(x-8)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

2.) Napište rovnici hyperboly s ohnisky$E[1;1]; F[1;11]$ a vedlejší poloosou o délce 4.

Řešení: $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$

3.) Napište rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky $E[-6;2]; F[14;2]$.

Řešení: $\frac{(x-4)^2}{50} - \frac{(y-2)^2}{50} = 1$

4.) Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy $A[0;\ -3]; B[-4;\ -3]$ a jedno ohnisko $E[-5;\ -3]$.

Řešení: $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$

Hyperbola

Varianta C

Napište rovnici hyperboly, která má osy rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, střed $S[2;\ -1]$ a prochází body $M[30; 23]; N[-6; 5]$.

***Příklad*:**

Dosadíme do středové rovnice hyperboly souřadnice středu:

$$\frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{(y+1)^2}{b^2}=1$$

$M \in H$, proto jeho souřadnice musí vyhovovat rovnici hyperboly:

$$\frac{(30-2)^2}{a^2}-\frac{(23+1)^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{784}{a^2}-\frac{576}{b^2}=1$$

$N \in H$, proto jeho souřadnice musí také vyhovovat rovnici hyperboly:

$$\frac{64}{a^2}-\frac{36}{b^2}=1$$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Z druhé rovnice vyjádříme

$$\frac{36}{b^2}=\frac{64}{a^2}-1$$

A dosadíme do rovnice první

$$\frac{784}{a^2}-16\left(\frac{64}{a^2}-1\right)=1$$

Po roznásobení závorky

$$\frac{784}{a^2}-\frac{1024}{a^2}+16=1 \quad \Rightarrow \quad 240=15a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2=16 \quad \Rightarrow \quad b^2=12$$

Rovnice hledané hyperboly tedy je

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{12}=1}$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\boxed{\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{12}=1}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici hyperboly, která prochází bodem $M[30; 24]$ a má ohniska v bodech $E\left[0;\ -4\sqrt{6}\right]; F\left[0; 4\sqrt{6}\right]$.

Řešení: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{60} = 1$

2.) Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty $a_1;\ a_2$ mají rovnice $a_1: y = 2x;\ a_2: y = -2x$ a jeden vrchol je $B[3; 0]$.

Řešení: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

3.) Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty $a_1;\ a_2$ mají rovnice $a_{1,2}: y = \pm 2(x - 3)$ a jedno její ohnisko je $E[-2; 0]$.

Řešení: $\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

4.) Napište rovnici hyperboly, která prochází počátkem soustavy souřadnic a její asymptoty jsou $a_1: 3x - y + 9 = 0;\ a_2: 3x + y + 3 = 0.$

Řešení: $\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-3)^2}{27} = 1$

Elipsa, hyperbola, přímka, tečny

Elipsa a přímka

Přímka, která leží v rovině elipsy, je **tečnou** elipsy, má-li s elipsou jeden společný bod. Má-li přímka s elipsou dva společné body, je **sečnou** elipsy.

Tečna elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ v jejím bodě $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

Tečna elipsy $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ v jejím bodě $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1}$$

Hyperbola a přímka

Asymptota nemá s hyperbolou žádný společný bod, přímka od ní různá, ale s ní rovnoběžná, protíná hyperbolu právě v jednom bodě. Každá další přímka buď protíná hyperbolu ve dvou různých bodech, pak je **sečna**, nebo má s hyperbolou společný právě jeden bod, pak jde o **tečnu**, nebo nemá s hyperbolou žádný společný bod.

Tečna hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ v jejím bodě $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

Tečna hyperboly $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ v jejím bodě $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1}$$

Tečna hyperboly $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ v jejím bodě $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{yy_0}{a^2} - \frac{xx_0}{b^2} = 1}$$

Tečna hyperboly $\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1$ v jejím bodě $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$\boxed{\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2} - \frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2} = 1}$$

Elipsa, hyperbola, přímka, tečny

Varianta A

Určete, pro které hodnoty parametru $k \in R$ má daná přímka s hyperbolou

a) právě jeden společný bod

b) dva společné body

c) žádný společný bod

$p: y = kx - 2; H: x^2 - y^2 = 1$

***Příklad*:**

O počtu společných bodů rozhoduje diskriminant při řešení kvadratické rovnice, kterou dostaneme při řešení vzájemné polohy přímky a hyperboly. Z rovnice přímky tedy dosadíme do rovnice hyperboly.

$$x^2 - (kx - 2)^2 = 1$$

Po úpravě

$$x^2 - k^2x^2 + 4kx - 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2(1 - k^2) + 4kx - 5 = 0$$

Vyjádříme diskriminant

$$D = 16k^2 + 20(1 - k^2)$$

a) Přímka má s hyperbolou jeden společný bod, pokud je $D = 0$.

$$16k^2 + 20 - 20k^2 = 0$$

$$20 - 4k^2 = 0$$

$$20 = 4k^2$$

$$k^2 = 5$$

$$\boxed{k = \pm\sqrt{5}}$$

b) Přímka má s hyperbolou dva společné body, pokud je $D > 0$.

$$20 - 4k^2 > 0$$

$$k^2 < 5$$

$$\boxed{k \in \left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right)\backslash\pm 1}$$

c) Přímka nemá s hyperbolou společný bod, pokud je $D < 0$.

$$20 - 4k^2 < 0$$

$$k^2 > 5$$

$$\boxed{k \in \left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\ \infty\right)}$$

Poznámka: pro $k = \pm 1$ jde o asymptotickou přímku.

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:a) $\boxed{k = \pm\sqrt{5}}$; b) $\boxed{k \in (-\sqrt{5};\ \sqrt{5}) \setminus \pm 1}$;

c) $\boxed{k \in (-\infty;\ -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5};\ \infty)}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p: 2x - y + 4 = 0$ a hyperboly $4x^2 - y^2 - 4 = 0$.

Řešení: p je asymptotická přímka hyperboly, $P\left[-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$

2.) Určete souřadnice všech společných bodů hyperboly $H: 9x^2 - 16y^2 = 144$ a přímky $p: 3x - 4y - 12 = 0$.

Řešení: $[4; 0]$

3.) Určete souřadnice společných bodů hyperboly $H: 64x^2 - 81y^2 = 5184$ a přímky $p: 2x - y = 0$.

Řešení: $\emptyset$

4.) Určete souřadnice společných bodů přímky $p. 3x - 4y - 3 = 0$ a elipsy $3x^2 + 5y^2 = 120$.

Řešení: $[5; 3]$; $\left[-\frac{125}{31}; -\frac{117}{31}\right]$

Elipsa, hyperbola, přímka, tečny

Varianta B

Ověřte, že bod T leží na elipse a potom napište rovnici tečny v bodě T elipsy.

$T[1;0]; E: x^2 + 2y^2 + 4x - 5 = 0$

***Příklad*:**

Má-li bod T ležet na elipse, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici elipsy.

Po dosazení dostaneme

$$1^2 + 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 0$$

Bod T je tedy bodem elipsy.

Rovnici elipsy nyní upravíme na tvar

$$(x+2)^2 + 2y^2 = 9$$

Tečna této elipsy v libovolném bodě dotyku o souřadnicích $[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$(x+2)(x_0+2) + 2yy_0 = 9$$

Dosadíme souřadnice bodu dotyku

$$(x+2)(1+2) + 2y \cdot 0 = 9 \quad \Rightarrow \quad 3x + 6 = 9$$

Hledaná tečna má rovnici

$$x - 1 = 0$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $x - 1 = 0$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Ověřte, že bod T leží na hyperbole a potom napište rovnici tečny v bodě T hyperboly.

$T[-2;2]; H: 4x^2 - y^2 - 12 = 0$

Řešení: $4x + y + 6 = 0$

2.) Napište rovnice tečen elipsy $E: x^2 + 9y^2 - 5 = 0$, která je rovnoběžná s přímkou $p: 2x - 3y = 0$.

Řešení: $y = \frac{2}{3}x \pm \frac{5}{3}$

3.) Napište rovnice tečen hyperboly $H: x^2 - 4y^2 = 12$, které jsou kolmé k přímce $p: x - y = 0$.

Řešení: $y = -x \pm 3$

4.) Určete délku tětivy, kterou vytíná hyperbola $H: x^2 - 2y^2 = 4$ na přímce $y = x - 2$.

Řešení: $4\sqrt{2}$

Elipsa, hyperbola, přímka, tečny

Varianta C

Určete odchylku tečen, které lze sestrojit z bodu $M[0;0]$ k hyperbole
$x^2 - 4y^2 - 6x - 3 = 0$.

***Příklad*:**

Rovnici hyperboly upravíme na tvar

$$(x-3)^2 - 4y^2 = 12$$

Libovolná tečna této hyperboly v bodě dotyku $T[x_0;\ y_0]$ má rovnici

$$(x-3)(x_0-3) - 4yy_0 = 12$$

Bod M má ležet na tečně hyperboly, musí tedy jeho souřadnice vyhovovat při dosazení za x, y.

$$(0-3)(x_0-3) - 4y \cdot 0 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -1$$

Hledaný bod dotyku $T[-1;\ y_0]$ leží na hyperbole, jeho souřadnice tedy musí vyhovovat rovnici hyperboly

$$(-1-3)^2 - 4{y_0}^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \mp 1$$

Můžeme tedy napsat rovnice tečen:

$$t_1\colon (x-3)(-1-3) - 4 \cdot 1 \cdot y = 12$$

$$t_2\colon (x-3)(-1-3) - 4 \cdot (-1)y = 12$$

Po úpravě

$$t_1\colon x + y = 0$$

$$t_2\colon x - y = 0$$

Odchylka tečen je 90°, protože vidíme podle normálových vektorů obou přímek, že přímky jsou na sebe kolmé.

***Příklad*:**

Varianta A
Varianta B
Varianta C

Výsledek řešení: $\varphi = 90°$.

***Příklady k procvičení*:**

1.) Napište rovnici tečny hyperboly $6x^2 - 4y^2 = 1$ tak, aby odchylka tečny a osy x byla 60°.

Řešení: $y = \sqrt{3}x \pm \frac{1}{2}$

2.) Pro která reálná čísla m přímka o rovnici $x - y + m = 0$

a) protíná hyperbolu o rovnici $4x^2 - 25y^2 = 100$

b) dotýká se jí

c) nemá s ní společné body?

Řešení:

a) $m \in \left(-\infty;\ -\sqrt{21}\right) \cup \left(\sqrt{21};\ \infty\right)$

b) $m \in \left\{-\sqrt{21};\ \sqrt{21}\right\}$

c) $m \in \left(-\sqrt{21};\ \sqrt{21}\right)$

3.) Vypočítejte odchylku tečen hyperboly o rovnici $x^2 - y^2 = 64$, které procházejí bodem $R\left[12;\ \frac{28}{3}\right]$.

Řešení: $\varphi = 10°28'$

4.) Napište rovnici tečny elipsy $3x^2 + y^2 = 36$ tak, aby odchylka tečny a osy x byla 30°.

Řešení: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 2\sqrt{10}$

Kulová plocha

Kulová plocha (sféra) je množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S (středu kulové plochy) danou vzdálenost r, tzv. poloměr kulové plochy.
Má-li střed kulové plochy souřadnice $[m; n; p]$ a poloměr kulové plochy je r, pak bod $X[x; y; z]$ je bodem kulové plochy právě tehdy, jestliže platí:

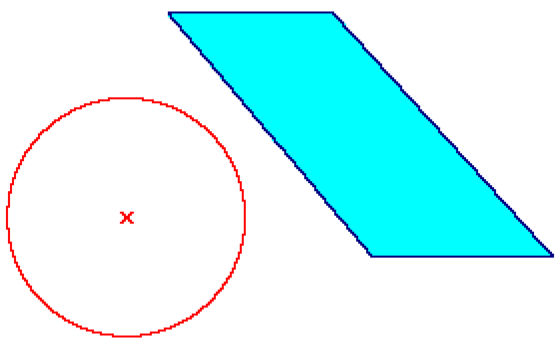
$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = r^2$$

Koule je množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S (středu koule) vzdálenost menší nebo rovnu danému číslu, tzv. poloměru koule.
Má-li střed koule souřadnice $[m; n; p]$ a poloměr koule je r, pak bod $X[x; y; z]$ je bodem koule právě tehdy, jestliže platí:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 \leq r^2$$

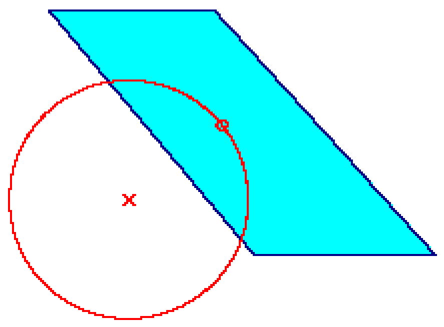
Vzájemná poloha roviny a kulové plochy (koule)

Průnikem kulové plochy (koule) a roviny je kružnice (kruh), bod nebo prázdná množina. Závisí to na vzdálenosti roviny od středu kulové plochy (koule).
Je-li vzdálenost roviny od středu kulové plochy (koule) větší než její poloměr, je průnikem prázdná množina.



Je-li vzdálenost roviny od středu kulové plochy (koule) menší než její poloměr, průnikem je kružnice (kruh).

Je-li vzdálenost roviny od středu kulové plochy (koule) rovna jejímu poloměru, průnikem je bod, který nazýváme bod dotyku. Rovinu v tomto případě nazýváme tečná rovina.



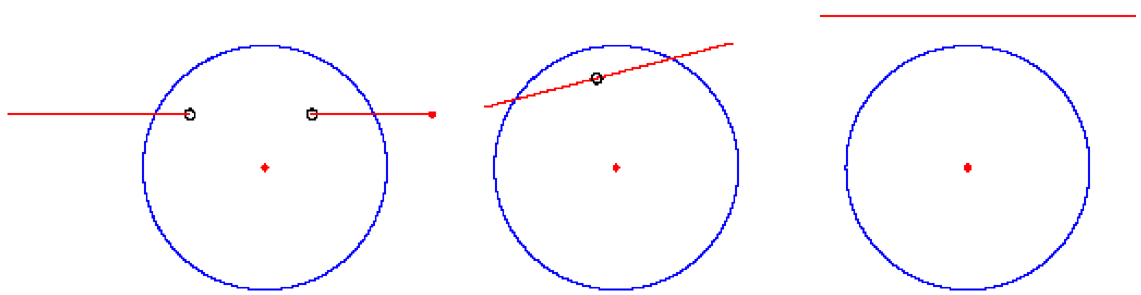
<u>Vzájemná poloha přímky a kulové plochy</u>

Přímka má s kulovou plochou nejvýše dva společné body. Vzájemná poloha závisí na vzdálenosti přímky od středu kulové plochy.

Je-li vzdálenost přímky od kulové plochy menší než její poloměr, má přímka s kulovou plochou dva společné body.

Je-li vzdálenost přímky od středu kulové plochy větší než její poloměr, je průnikem prázdná množina.

Je-li vzdálenost přímky od středu kulové plochy rovna jejímu poloměru, je průnikem jediný bod, který nazýváme bod dotyku. Přímka je tečnou kulové plochy.



Vzájemná poloha přímky a koule

Je-li vzdálenost přímky od středu koule menší než její poloměr, je průnikem úsečka.
Je-li vzdálenost přímky od středu koule větší než její poloměr, je průnikem prázdná množina.
Je-li vzdálenost přímky od středu koule rovna poloměru koule, je průnikem jediný bod, který nazýváme bod dotyku.

Kulová plocha

Varianta A

Určete všechny hodnoty parametru $m \in R$, pro něž rovnice
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + m = 0$ vyjadřuje kulovou plochu.

***Příklad*:**

Rovnici upravíme na středový tvar

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = -m + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5 - m$$

Rovnice bude rovnicí kulové plochy právě tehdy, jestliže pravá strana rovnice bude větší než 0 $\Rightarrow$ $5 - m > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m < 5}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\boxed{m < 5}$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete střed a poloměr kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y - 4z + 22 = 0$. Také určete průsečíky os souřadnic x, y, z s kulovou plochou.

Řešení: $S[3;\ -5;\ 2]; r = 4$; průsečík s osou x a s osou z neexistuje

$[0;\ -5 + \sqrt{3};\ 0];\ [0;\ -5 - \sqrt{3}]$

2.) Určete střed a poloměr kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 7y - 3z = 0$. Také určete průsečíky souřadnicových os x, y, z s kulovou plochou.

Řešení: $S[2;\ -3{,}5;\ 1{,}5]; r = \sqrt{18{,}5};\ [0; 0; 0];\ [4; 0; 0];\ [0;\ -7; 0];\ [0; 0; 3]$

3.) Určete střed a poloměr kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 5y - 4z - 2 = 0$. Také určete průsečíky souřadnicových os x, y, z s kulovou plochou.

Řešení: $S[-5; 2{,}5; 2]; r = \sqrt{37{,}25};\ [-5 + 3\sqrt{3}; 0; 0];\ [-5 - 3\sqrt{3}; 0; 0];$

$[0; 0{,}5(5 + \sqrt{33}); 0]$; $[0; 0{,}5(5 - \sqrt{33}); 0];\ [0; 0; 2 + \sqrt{6}];\ [0; 0; 2 - \sqrt{6}]$

4.) Určete střed a poloměr kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 40y - 3z - 4 = 0$. Také určete průsečíky souřadnicových os x, y, z s kulovou plochou.

Řešení: $S[6;\ -20; 1{,}5]; r = \sqrt{442{,}25};\ [6 + 2\sqrt{10}; 0; 0];\ [6 - 2\sqrt{10}; 0; 0];$

$[0;\ -20 + 2\sqrt{101}; 0];\ [0;\ -20 - 2\sqrt{101}; 0];\ [0; 0; 4];\ [0; 0;\ -1]$

Kulová plocha

Varianta B

Napište rovnici kulové plochy, která má střed $S[1;\ -2;3]$ a prochází bodem $A[-3;1;\ -1]$. Pak určete průsečíky této plochy s přímkami, které procházejí bodem *A* a jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic.

***Příklad*:**

Určíme poloměr kulové plochy jako vzdálenost bodů *A* a *S*.

$$r = |AS| = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{16+9+16} = \sqrt{41}$$

Rovnice kulové plochy tedy je

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 41$$

Přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s osou *x*, má parametrické vyjádření

$$x = -3 + t; y = 1; z = -1; t \in R$$

Vzájemnou polohu kulové plochy a přímky řešíme dosazením parametrických rovnic přímky do rovnice kulové plochy

$$(-3+t-1)^2 + (1+2)^2 + (-1-3)^2 = 41$$

$$t^2 - 8t + 16 + 9 + 16 = 41$$

$$t^2 - 8t = 0$$

$$t(t-8) = 0$$

$$t_1 = 0;\ t_2 = 8$$

Průsečíky mají souřadnice: $\boxed{X_1[-3;1;\ -1] = A;\ X_2[5;1;\ -1]}$

Přímka, která prochází bodem *A* a je rovnoběžná s osou *y*, má rovnici

$$x = -3; y = 1 + s; z = -1; s \in R$$

Dosadíme do rovnice kulové plochy

$$(-3-1)^2 + (1+s+2)^2 + (-1-3)^2 = 41$$

$$16 + 9 + 6s + s^2 + 16 = 41$$

$$s^2 + 6s = 0$$

$$s(s+6) = 0$$

$$s_1 = 0;\ s_2 = -6$$

Průsečíky mají souřadnice. $\boxed{Y_1[-3;1;\ -1] = A;\ Y_2[-3;\ -5;\ -1]}$

Přímka, která prochází bodem A a je rovnoběžná s osou z, má rovnici

$$x = -3; y = 1; z = -1 + r; r \in R$$

Dosadíme do rovnice kulové plochy

$$(-3 - 1)^2 + (1 + 2)^2 + (-1 + r - 3)^2 = 41$$

$$16 + 9 + 16 - 8r + r^2 = 41$$

$$r^2 - 8r = 0$$

$$r_1 = 0;\ r_2 = 8$$

Průsečíky mají souřadnice: $\boxed{Z_1[-3; 1;\ -1] = A;\ Z_2[-3; 1; 7]}$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení:$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 41$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete průsečíky kulové plochy dané rovnicí $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 38$ a přímky, která prochází bodem $A[0; 3; 1]$ a je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.

Řešení: $[0; 3; 2];\ [0; 3;\ -2]$

2.) Jsou dány body $A[2;\ -1; 0]; B[-2; 7; 4]$. Určete společné body kulové plochy dané rovnicí $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 38$ a polopřímky BA.

Řešení: $[0; 3; 2];\ [5;\ -7;\ -3]$

3.) Je dána přímka $p: x = 4, y = 1 - 6t, z = 4 - 6t; t \in R$ a bod $A[-6; 6; 5]$. Najděte rovnici kulové plochy, která má střed v bodě A a s přímkou p má právě jeden společný bod.

Řešení: $(x + 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 5)^2 = 108$

4.) Mezi kulovými plochami, které mají rovnice $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 + d = 0; d \in R$ určete ty, které mají s přímkou $x = 7 + 5t; y = 3 + 2t; z = 6 + t; t \in R$ právě jeden společný bod.

Řešení: $d = -26$

Kulová plocha

Varianta C

Určete rovnice kulové plochy, která prochází body
$A[2;\ -1;0];B[5;0;\ -4];C[0;\ -3;\ -2];D[3;6;\ -6]$. Určete rovnice tečných rovin kulové plochy v bodech A, B a odchylku těchto tečných rovin.

***Příklad*:**

Do středové rovnice kulové plochy budeme postupně dosazovat jednotlivé body.

$(2-m)^2+(-1-n)^2+p^2=r^2$ (1)

$(5-m)^2+n^2+(-4-p)^2=r^2$ (2)

$m^2+(-3-n)^2+(-2-p)^2=r^2$ (3)

$(3-m)^2+(6-n)^2+(-6-p)^2=r^2$ (4)

Po umocnění a sečtení

$m^2-4m+n^2+2n+p^2=r^2-5$ (1)

$m^2-10m+n^2+p^2+8p=r^2-41$ (2)

$m^2+n^2+6n+p^2+4p=r^2-13$ (3)

$m^2-6m+n^2-12n+p^2+12p=r^2-81$ (4)

Od rovnice (1) odečteme rovnici (2)

$$6m+2n-8p=36 \qquad \Rightarrow\ 3m+n-4p=18$$

Od rovnice (1) odečteme rovnici (3)

$$-4m-4n-4p=8 \qquad \Rightarrow\ m+n+p=-2$$

Od rovnice (1) odečteme rovnici (4)

$$2m+14n-12p=76 \qquad \Rightarrow\ m+7n-6p=38$$

Dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých, kterou vyřešíme

Po vyřešení soustavy dostaneme

$$m=0,n=2,p=-4$$

Dopočítáme poloměr kulové plochy dosazením do některé z rovnic s výrazem $r^2\ \Rightarrow r^2=29$

Kulová plocha má tedy rovnici

$$x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$$

Normálový vektor tečné roviny v bodě A je:$\overrightarrow{n_A}=\overrightarrow{SA}=(2;\ -3;4)$

Tečná rovina má tedy rovnici

$$2x - 3y + 4z - 7 = 0$$

Normálový vektor tečné roviny v bodě B je: $\overrightarrow{n_B} = \overrightarrow{SB} = (5;\ -2;\ 0)$

Tečná rovina má tedy rovnici

$$5x - 2y - 25 = 0$$

Odchylka tečných rovin je odchylka normálových vektorů

$$cos\varphi = \frac{10 + 6}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 56°31'$$

***Příklad*:**

Varianta A

Varianta B

Varianta C

Výsledek řešení: $\varphi = 56°31'$

***Příklady k procvičení*:**

1.) Určete společné body kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 6y - 2z + 9 = 0$ a přímky $AB; A[5; 6;\ -16]; B[-7;\ -2; 12]$.

Řešení: $[-1; 2;\ -2];\ [-4; 0; 5]$

2.) Mezi rovinami, které mají rovnice $2x - 3y + 2z + d = 0; d \in R$ určete ty, které se dotýkají kulové plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 0$. (Využijte střed a poloměr kulové plochy).

Řešení: $d = -2 \pm \sqrt{85}$

3.) Určete tečné roviny kulové plochy o rovnici $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 38$ v jejích bodech $A[-1; 1; 3]; B[-2;\ -1; 0]; C[1; 3;\ -1]$.

Řešení: $5x - 3y - 2z + 14 = 0; 6x - y + z + 11 = 0; 3x - 5y + 2z + 14 = 0$

4.) Je dána kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z = 0$ a bod $A[-4;\ -4; 4]$. Určete rovnici roviny, která se dotýká dané kulové plochy v bodě A.

Řešení: $6x + y + z + 24 = 0$.