

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka a rovina mohou být:

1. rovnoběžné různé - nemají společný žádný bod
2. rovnoběžné splývající - všechny body přímky jsou zároveň i body roviny
3. různoběžné - mají společný jeden bod, který se nazývá průsečík

Máme-li zadanou přímku a rovinu pomocí jejich rovnic, k určení jejich vzájemné polohy je třeba vyřešit soustavu rovnic, která je tvořena zadanými rovnicemi. Na základě počtu řešení této soustavy, je možné určit vzájemnou polohu zadané přímky a roviny. Počet řešení dané soustavy, odpovídá počtu bodů, které mají daná přímka a rovina společné.

a) přímka i rovina dané parametricky

Nechť je dána přímka p a rovina ρ :

$$p: x = x_A + tu_x$$

$$y = y_A + tu_y$$

$$z = z_A + tu_z; t \in \mathbb{R}$$

$$\rho: x = x_B + rv_x + sw_x$$

$$y = y_B + rv_y + sw_y$$

$$z = z_B + rv_z + sw_z; r, s \in \mathbb{R}$$

Určit jejich vzájemnou polohu nyní znamená určit vlastně parametr t (resp. r a s). Toto je možné provést pomocí metody porovnávání, tedy:

$$x_A + tu_x = x_B + rv_x + sw_x$$

$$y_A + tu_y = y_B + rv_y + sw_y$$

$$z_A + tu_z = z_B + rv_z + sw_z$$

Počet řešení této soustavy rovnic určuje pak počet společných bodů, které přímky mají a tím i jejich polohu. Souřadnice průsečíku v případě, že rovina a přímka jsou různoběžné, lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p resp. dosazením parametrů r a s do parametrického vyjádření roviny ρ .

Geometrická interpretace:

1. přímka a rovina jsou rovnoběžné - vektor $(u_x; u_y; u_z)$ je lineární kombinací vektorů $(v_x; v_y; v_z)$ a $(w_x; w_y; w_z)$; ekvivalentní podmínka: vektor \vec{u} je kolmý k vektoru $\vec{v} \times \vec{w}$
2. přímka leží v rovině - vektor $(u_x; u_y; u_z)$ je lineární kombinací vektorů $(v_x; v_y; v_z)$ a $(w_x; w_y; w_z)$ (resp. vektor \vec{u} je kolmý k vektoru $\vec{v} \times \vec{w}$) a navíc bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží v rovině ρ
3. přímka a rovina jsou různoběžné - vektor $(u_x; u_y; u_z)$ není lineární kombinací vektorů $(v_x; v_y; v_z)$ a $(w_x; w_y; w_z)$ (resp. vektor \vec{u} není kolmý k vektoru $\vec{v} \times \vec{w}$)

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ :

1. $p: x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}$ a $\rho: x = 1 - 2r + s, y = -1 + 6r - 2s, z = 3 + 4r + s; r, s \in \mathbb{R}$,

2. $p: x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}$ a $\rho: x = 1 - 2r + s, y = 7 + 6r - 2s, z = 5 + 4r + s; r, s \in \mathbb{R}$,

3. $p: x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 3 + 2t; t \in \mathbb{R}$ a $\rho: x = 1 - 2r - s, y = 7 + 6r - 2s, z = 5 + 4r + s; r, s \in \mathbb{R}$.

b) přímka daná parametricky, rovina daná obecně

Nechť je dána přímka p a rovina ρ :

$$p: x = x_A + tu_x$$

$$y = y_A + tu_y$$

$$z = z_A + tu_z; t \in \mathbb{R}$$

$$\rho: ax + by + cz + d = 0$$

Určit vzájemnou polohu zadané přímky a roviny je možné pomocí dosazovací metody: parametrické vyjádření přímky x, y a z dosadíme do obecné rovnice roviny:

$a(x_A + tu_x) + b(y_A + tu_y) + c(z_A + tu_z) + d = 0$, čímž dostáváme jednu rovnici pro jednu neznámou - pro t . Počet kořenů této rovnice určí i počet společných bodů zadané přímky a roviny a tím i jejich polohu. Souřadnice

průsečíku v případě, že přímka a rovina jsou různoběžné, lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p .

Geometrická interpretace:

1. přímka a rovina jsou rovnoběžné - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(a; b; c)$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový
2. přímka leží v rovině splývají - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(a; b; c)$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový, a bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží v rovině ρ
3. přímka a rovina jsou různoběžné - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(a; b; c)$ nejsou kolmé, tj. jejich skalární součin není nulový

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ :

1. $p: x = -1 - 3t, y = 2 + t, z = 3 - 4t; t \in \mathbb{R}$ a $\rho: 2x + 2y - z + 5 = 0$,
2. $p: x = -1 - 3t, y = 2 + t, z = 3 - 4t; t \in \mathbb{R}$ a $\rho: 2x + 2y - z + 1 = 0$,
3. $p: x = -1 - 3t, y = 2 + t, z = 3 - 4t; t \in \mathbb{R}$ a $\rho: 2x + 3y - z + 5 = 0$.