Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny mohou být:

1. rovnoběžné různé - nemají společný žádný bod
2. rovnoběžné splývající - všechny body jedné roviny jsou zároveň i body druhé roviny
3. různoběžné - mají společnou přímku, která se nazývá průsečnice

Máme-li zadané dvě roviny pomocí jejich rovnic, k určení jejich vzájemné polohy je třeba stanovit vzájemnou polohu vektorů, které jednotlivé roviny určují. V případě, že jsou roviny různoběžné, je možné najít též rovnici přímky, která je jejich průsečnicí.

Tuto průsečnici lze nejvýhodněji stanovit na základě obecných rovnic zadaných rovin a to dvojím způsobem:

1. Pomocí vektorového součinu normálových vektorů zadaných rovin určit vektor, který je směrovým vektorem hledané přímky. Určíme jeden bod, který leží na průsečnici. To uděláme tak, že zvolíme jednu jeho souřadnici (konkrétní číslo) a zbývající dvě dopočítáme na základě rovnic daných rovin (jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých).
2. Jednu neznámou v obecném vyjádření rovin zvolíme jako parametr, zbývající dvě neznámé pak vypočteme na základě tohoto parametru a dostaneme rovnou parametrické vyjádření přímky - průsečnice.

a) roviny dané parametricky

Nechť jsou dány roviny σ a ρ:

$$\sigma: \; x = x_A + ru_x + sv_x \qquad \rho: \; x = x_B + kf_x + lh_x$$
$$y = y_A + ru_y + sv_y \qquad y = y_B + kf_y + lh_y$$
$$z = z_A + ru_z + sv_z; \; r, s \in \mathbb{R} \qquad z = z_B + kf_z + lh_z; \; k, l \in \mathbb{R}$$

Geometrická interpretace:

1. roviny jsou rovnoběžné - vektory $\vec{u} \times \vec{v}$ a $\vec{f} \times \vec{h}$ jsou rovnoběžné
2. roviny splývají - vektory $\vec{u} \times \vec{v}$ a $\vec{f} \times \vec{h}$ jsou rovnoběžné a navíc bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží v rovině ρ, resp. bod $[x_B; y_B; z_B]$ leží v rovině σ
3. roviny jsou různoběžné - vektory $\vec{u} \times \vec{v}$ a $\vec{f} \times \vec{h}$ jsou různoběžné

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze rovin σ a ρ:

1. $\sigma: \; x = 4 + 2r + s, \; y = 2 + 3r - 2s, \; z = -3 + r + 4s; \; r, s \in \mathbb{R}$ a
   $\rho: \; x = 2 + k - 8l, \; y = -1 - 3k - 11l, \; z = 2 + 5k - 5l; \; k, l \in \mathbb{R}$,
1. $\sigma: \; x = 4 + 2r + s, \; y = 2 + 3r - 2s, \; z = -3 + r + 4s; \; r, s \in \mathbb{R}$ a
   $\rho: \; x = 2 + k - 8l, \; y = -1 - 3k - 11l, \; z = -4 + 5k - 5l; \; k, l \in \mathbb{R}$,
2. $\sigma: \; x = 4 + 2r + s, \; y = 2 + 3r - 2s, \; z = -3 + r + 4s; \; r, s \in \mathbb{R}$ a
   $\rho: \; x = 2 + k + 2l, \; y = -1 - 3k - 5l, \; z = 2 + 5k + l; \; k, l \in \mathbb{R}$.

b) jedna rovina daná parametricky, druhá obecně

Nechť jsou dány roviny σ a ρ:

$$\sigma: \; x = x_A + ru_x + sv_x \qquad \rho: \; ax + by + cz + d = 0$$
$$y = y_A + ru_y + sv_y$$
$$z = z_A + ru_z + sv_z; \; r, s \in \mathbb{R}$$

Geometrická interpretace:

1. roviny jsou rovnoběžné - vektory $\vec{u} \times \vec{v}$ a $(a; b; c)$ jsou rovnoběžné
2. roviny splývají - vektory $\vec{u} \times \vec{v}$ a $(a; b; c)$ jsou rovnoběžné a navíc bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží v rovině ρ, resp. bod $[x_B; y_B; z_B]$ leží v rovině σ
3. roviny jsou různoběžné - vektory $\vec{u} \times \vec{v}$ a $(a; b; c)$ jsou různoběžné

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze rovin σ a ρ:

1. $\sigma: \ x = 4 + 2r + s, \ y = 2 + 3r - 2s, \ z = -3 + r + 4s; \ r, s \in \mathbb{R}$ a $\rho: \ -4x + 2y + 2z + 6 = 0$,
2. $\sigma: \ x = 4 + 2r + s, \ y = 2 + 3r - 2s, \ z = -3 + r + 4s; \ r, s \in \mathbb{R}$ a $\rho: \ -4x + 2y + 2z + 18 = 0$,
3. $\sigma: \ x = 4 + 2r + s, \ y = 2 + 3r - 2s, \ z = -3 + r + 4s; \ r, s \in \mathbb{R}$ a $\rho: \ 4x + 2y + 2z + 6 = 0$.

<u>c) roviny dány obecně</u>
Nechť jsou dány roviny σ a ρ:

$\sigma: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ $\qquad\qquad$ $\rho: \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

<u>Geometrická interpretace:</u>

1. roviny jsou rovnoběžné - vektory $(a_1; b_1; c_1)$ a $(a_2; b_2; c_2)$ jsou rovnoběžné
2. roviny splývají - vektory $(a_1; b_1; c_1)$ a $(a_2; b_2; c_2)$ jsou rovnoběžné a navíc bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží v rovině ρ, resp. bod $[x_B; y_B; z_B]$ leží v rovině σ
   ekvivalentní podmínka: pro vektory $(a_1; b_1; c_1)$ a $(a_2; b_2; c_2)$ platí: $(a_1; b_1; c_1) = k(a_2; b_2; c_2)$ a zároveň $d_1 = kd_2$ (tzn. rovnice jedné roviny je nenulovým násobkem rovnice druhé roviny)
3. roviny jsou různoběžné - vektory $(a_1; b_1; c_1)$ a $(a_2; b_2; c_2)$ jsou různoběžné

<u>Příklady:</u>
Rozhodněte o vzájemné poloze rovin σ a ρ:

1. $\sigma: \ 2x + y - 3z + 5 = 0$ a $\rho: \ 2x + y - 3z - 7 = 0$,
2. $\sigma: \ 2x + y - 3z + 5 = 0$ a $\rho: \ -4x - 2y + 6z - 10 = 0$
3. $\sigma: \ 2x + y - 3z + 5 = 0$ a $\rho: \ x + y - 3z - 7 = 0$.