36. Vektory

1) Na ose y určete bod A tak, aby měl od bodu $B[-6,-5]$ vzdálenost $d=10$.

2) Je dán vektor $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $A[10;3]$, $B[7;1]$, vektor $\vec{v}=(1;4)$ a vektor $\vec{w}=(2;-4)$.
   a) zvolte souřadnou soustavu a znázorněte všechny 3 vektory tak, aby se počáteční bod jejich umístění nacházel v počátku soustavy souřadnic,
   b) vyjádřete $\vec{w}$ jako lineární kombinaci $\vec{u},\vec{v}$, vypočtěte koeficienty v této lineární kombinaci,
   c) výsledek znázorněte graficky,
   d) sestrojte vektor $\vec{t}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$,
   e) zjistěte, jaký úhel svírají vektory $\vec{u},\vec{v}$,
   f) vypočtěte objem rovnoběžnostěnu vytvořeného z vektorů
   $$\vec{u}=(-3,-2,0), \vec{v}=(1,4,6), \vec{w}=(2,-4,5).$$

3) Určete těžiště čtyřstěnu $ABCD$, je-li $A[1,-1,1]$, $B[0,4,0]$, $C[4,0,0]$, $D[-2,-2,-4]$.

4) Rozhodněte, zda vektor $\vec{v}=(7,-1,4)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}=(1,3,-1)$, $\vec{v}=(4,2,1)$.

5) Je dán čtyřstěn $ABCD$, těžiště T_1 jeho stěny ABC a těžiště T_2 jeho stěny BCD;
   $A[10,3,0]$, $B[7,1,1]$, $C[1,4,-1]$, $D[2,-4,5]$.
   a) Vyjádřete vektor $\vec{t}=\overrightarrow{T_1T_2}$
   b) pomocí vektorů $\vec{u}=\overrightarrow{AC}, \vec{v}=\overrightarrow{BC}, \vec{w}=\overrightarrow{DC}$ zapište výsledek ve formě jejich lineární kombinace
   c) určete objem tohoto čtyřstěnu,
   d) určete úhel $\angle ACB$.

6) Jsou dány body $A[2,-1,3]$, $B[1,1,1]$, $C[0,0,5]$.
   Dokažte, že body A,B,C jsou vrcholy trojúhelníka ABC a vypočtěte velikost jeho vnitřních úhlů.

7) Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník a určete, jaký;
   $A[4,0]$, $B[1,7]$, $C[-6,4]$, $D[-3,-3]$.

8) Rozhodněte, zda čtyřúhelník $A[-4,3]$, $B[3,-5]$, $C[-1,-2]$, $D[2,3]$ je konvexní.

9) Jsou dány vektory $\vec{a}=(3,2,5)$, $\vec{b}=(8,-1,10)$, $\vec{c}=(7,3,3)$.
   Určete souřadnice vektoru $\vec{x}$, pro který platí:
   $$2(\vec{a}-\vec{x})+3(\vec{b}+\vec{x})=4(\vec{c}+\vec{x}).$$

10) Určete vektor $\vec{v}$, který je kolmý k vektoru $\vec{u}(5,12)$ a jehož velikost je 4.

11) V ΔABC je $\overrightarrow{AB}=(2,6,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(4,2,-2)$.
   Vypočítejte souřadnice
   a) vektorů, které splývají s těžnicemi,
   b) těžiště, je-li $A[0,0,0]$,
   c) plochu ΔABC.

12)
   a) Rozhodněte, zda body $A[0,2,6]$, $B[2,-1,4]$, $C[1,-4,3]$ určují rovinu; určete její normálový vektor.
   b) Najděte souřadnice bodu D tak, aby $ABCD$ byl rovnoběžník.

13) Jsou dány vektory $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(1,-2,3)$, $\vec{c}=(3,2,-4)$.
   Určete souřadnice vektoru $\vec{x}$ tak, aby platilo:
   $$\vec{a}\cdot\vec{x}=-2, \vec{b}\cdot\vec{x}=3, \vec{c}\cdot\vec{x}=8.$$

14) Jsou dány body $A[1,3,0]$, $B[-2,4,2]$, $C[-2,-3,-5]$.
   a) Dokažte, že body A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka.
   b) Napište parametrické rovnice t_a, v_b.
   c) Napište parametrické rovnice osy úsečky AC.
   d) Vypočtěte obsah trojúhelníka ABC.
15) Rozhodněte, zda body $A[1,1,1]$, $B[-5,-3,-2]$, $C[0,-3,0]$ leží v jedné přímce.
   Určete souřadnici bodu $D[?,2,3]$, aby ležely všechny 4 body v jedné rovině.
16) Určete velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC, $A[2,-1,3]$, $B[1,1,1]$, $C[0,0,5]$.
17) Zjistěte, zda body $A[3,7]$, $B[5,-1]$, $C[-3,5]$ tvoří trojúhelník a pak vypočtěte průsečík výšky v_a s úsečkou BC (pokud existuje).
18) Je dán čtyřstěn $ABCD$, $A[2,0,0]$, $B[0,3,0]$, $C[0,0,0]$, $D[2,3,8]$.
   Určete jeho výšku na stěnu ABC.
19) Jsou dány body $A[-1,0]$, $B[1,6]$, $C[2,-3]$, $D[-4,5]$.
   Zjistěte, zda polopřímka CD protíná úsečku AB a určete souřadnice průsečíku (pokud existuje).
20) V rovnoběžníku $ABCD$, $A[-1,-2]$, $B[2,-3]$, $C[3,2]$ stanovte souřadnice vrcholu D a délku úhlopříčky BD.
21) Dokažte, že body $A[-4,-2,1]$, $B[3,-5,2]$, $C[0,6,4]$ neleží v jedné přímce.

Výsledky
(36. Vektory)

1) $A_1[0,3]$, $A_2[0,-13]$
2)
   a) -----
   b) $\vec{w}=-\frac{6}{5}\vec{u}-\frac{8}{5}\vec{v}$
   c) -----
   d) -----
   e) $\varphi=137°43'$
   f) $V=146j^3$
3) $T\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4},-\frac{5}{4}\right]$
4) ano
5)
   a) $\vec{t}=\left(-\frac{8}{3},-\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right)$
   b) $\vec{t}=\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{w}$
   c) $V=\frac{29}{6}$
   d) $\chi=22°18'$
6) $\alpha=90°, \beta=\chi=45°$
7) čtverec
8) je
9) $\vec{x}=\left(\frac{2}{3},-\frac{11}{3},\frac{28}{3}\right)$
10) $\vec{v}_1=\left(-\frac{48}{13},\frac{20}{13}\right)$, $\vec{v}_2=\left(\frac{48}{13},-\frac{20}{13}\right)$
11)
   a) $\vec{t}_a=(3,4,-3), \vec{t}_b=(0,-5,3), \vec{t}_c=(3,-1,0)$
   b) $T\left[2,\frac{8}{3},-2\right]$
   c) $S=2\sqrt{35}$
12)
   a) $\vec{n}=(-3,4,-9)$
   b) $D=[-1,-1,5]$
13) $\vec{x}=\left(\frac{26}{15},-\frac{101}{15},-\frac{61}{15}\right)$

14)

a) -----

b) $t_a: x = 1 - 3t,\ y = 3 - \frac{5}{2}t,\ z = -\frac{3}{2}t,\ t \in \langle 0;1 \rangle$

$v_b: x = -2 - \frac{267}{70}t,\ y = 4 - \frac{44}{70}t,\ z = 2 + \frac{45}{70}t,\ t \in \langle 0;1 \rangle$

c) je jich nekonečně mnoho, např. bodem $O[0,0,0]$ prochází osa o rovnicích: $x = t,\ y = 0,\ z = 5t,\ t \in R$.

d) $S = \frac{7}{2}\sqrt{19}$

15) neleží, $x = \frac{45}{8}$

16) $\alpha = 90°, \beta = \chi = 45°$

17) ano, $P\left[-\frac{3}{25}, \frac{71}{25}\right]$

18) $v = 8$

19) $P\left[-\frac{10}{13}, \frac{9}{13}\right]$

20) $D[0,3], |BD| = 2\sqrt{10}$

21) -----