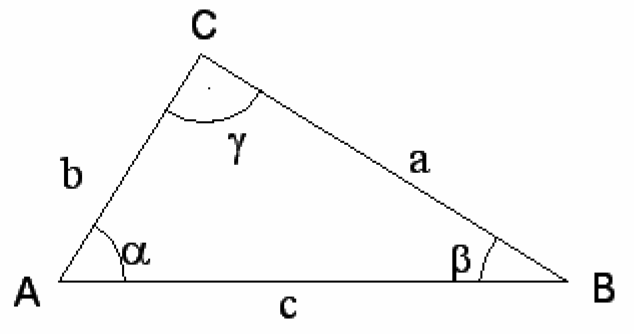
Trigonometrie

V Olomouci, 2004 **Eva Alková, VIII.E**

Trigonometrie

-řešení trojúhelníku(určování stran, určování vnitřních úhlů)

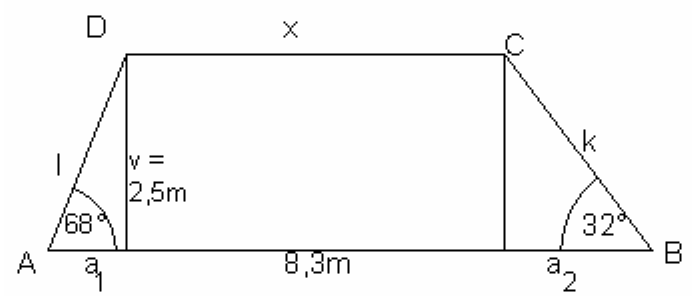
Pravoúhlý trojúhelník: 1) Pythagorova věta . . . $c^2 = a^2 + b^2$



2) $\sin\alpha = \dfrac{\text{protilehlá strana}}{\text{prepona}}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{protilehlá strana}}{\text{prilehlá strana}}$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{prilehlá strana}}{\text{prepona}}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\text{prilehlá strana}}{\text{protilehlá strana}}$

Př.: Jakou šířku mají a jak dlouhé jsou boční svahy náspu železnice, je-li průřez náspu lichoběžník , jeho strany mají sklon 63° a 32°,dno je dlouhé 8,3m, v = 2,5m.



$\sin 68° = \dfrac{v}{l}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}68° = \dfrac{v}{a_1}$ $\qquad$ $\sin 32° = \dfrac{v}{k}$

$l = \dfrac{v}{\sin 68°}$ $\qquad$ $a_1 = \dfrac{v}{\operatorname{tg}68°}$ $\qquad$ $k = \dfrac{v}{\sin 32°}$

$l = \dfrac{2{,}5}{\sin 68°} = 2{,}696 \cong \underline{\underline{2{,}7\text{m}}}$ $\qquad$ $a_1 \cong \underline{\underline{1{,}01\text{m}}}$ $\qquad$ $k \cong \underline{\underline{4{,}7\text{m}}}$

$\operatorname{tg}32° = \dfrac{v}{a_2}$ $\qquad$ $x = 8{,}3 - (a_1 + a_2)$

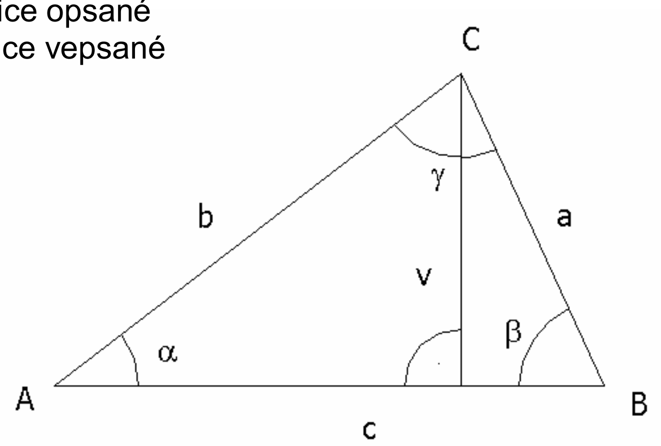
$a_2 = \dfrac{v}{\operatorname{tg}32°}$ $\qquad$ $\underline{x = 3{,}29\text{m}}$

$a_2 \cong \underline{\underline{4\text{m}}}$

Řešení obecného △:

Označení v obecném trojúhelníku:
A,B,C -vrcholy trojúhelníku ABC
a,b,c -délky stran trojúhelníku
α,β,γ - velikosti vnitřních úhlů
S -obsah
O -obvod
r -poloměr kružnice opsané
g -poloměr kružnice vepsané

<u>Trojúhelníky určujeme pomocí vět</u>:
sss, usu, sus, ssu



$$\sin\alpha = \frac{v}{b} \Rightarrow v = b * \sin\alpha \qquad \sin\beta = \frac{v}{a} \Rightarrow v = a * \sin\beta$$

$$b * \sin\alpha = a * \sin\beta \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

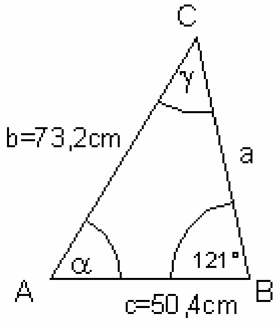
<u>**SINOVA VĚTA**</u>:

a : b : c = sinα : sinβ : sinγ

:Pro každý △ ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a jehož strany mají velikost a, b, c, platí, že poměry stran a sinů odpovídajících úhlů jsou stejné ,a nebo poměr délek stran = poměru sinů odpovídajících úhlů.

<u>Užití sinové věty:</u>
známe-li: dva úhly a jednu stranu
dvě strany a velikost úhlu proti jedné z nich

Př.: Je dán △ ABC a víme, že velikost strany b = 73,2 cm, c = 50,4 cm, velikost úhlu β = 121°. Vypočítejte velikost strany a a velikost úhlů α a γ.



1) $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$

$\sin\gamma = \frac{0{,}504 \cdot \sin 121^\circ}{0{,}732}$

<u>$\gamma \cong 36{,}2°$</u>

2) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$

$\alpha = 180° - (121° + 36{,}2°)$

<u>$\alpha = 22{,}8°$</u>

3) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

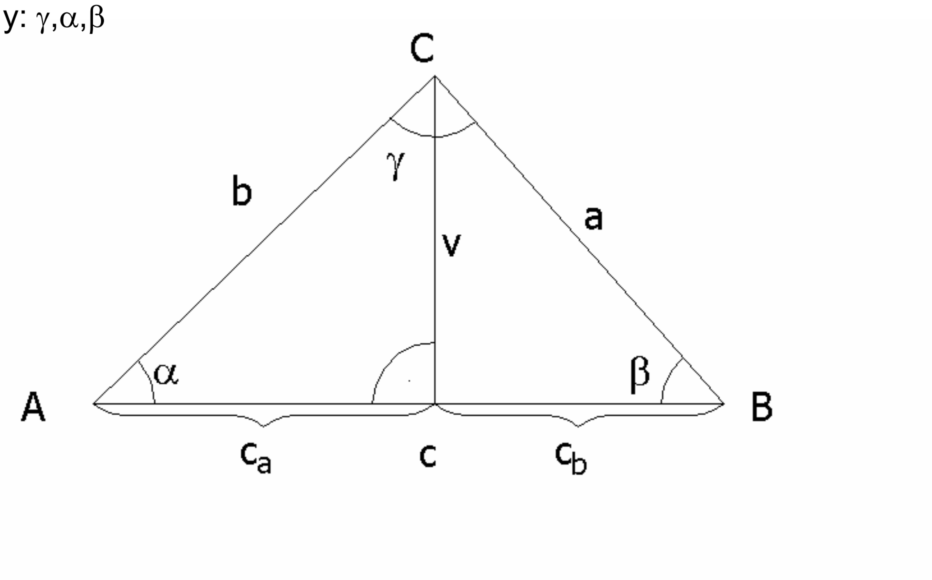
$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$

$a = \frac{0{,}732 \cdot \sin 22{,}8^\circ}{\sin 121^\circ}$

<u>$a \cong 0{,}33$m</u>

<u>KOSINOVÁ VĚTA</u>:

→zobecnění Pythagorovy věty pro obecný trojúhelník ABC; se stranami:a,b,c, a vnitřními úhly: γ,α,β



$a^2 = c_b^2+v^2$ $\qquad c_b = c\text{-}c_a \quad v = b\cdot\sin\alpha \quad c_a = b\cdot\cos\alpha$

$a^2 = (c-b\cdot\cos\alpha)^2+(b\cdot\sin\alpha)^2$

$a^2 = c^2-2cb\cdot\cos\alpha + b^2\cdot\cos^2\alpha + b^2\cdot\sin^2\alpha$

$a^2 = b^2\cdot\sin^2\alpha + b^2\cdot\cos^2\alpha + c^2 - 2cb\cdot\cos\alpha$

$a^2 = b^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2cb\cdot\cos\alpha$ $\qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cdot\cos\alpha$

dále platí:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

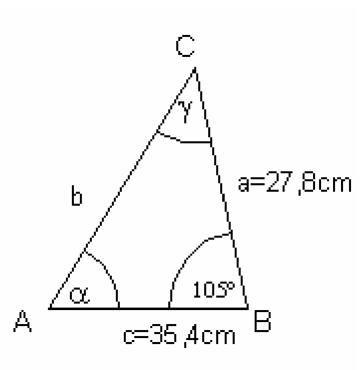
<u>Užití kosinové věty:</u>

známe-li: tři strany

dvě strany a úhel, který svírají

Př.: △ ABC: a=27,8cm, c=35,4cm, β=105°

Vypočítejte velikost strany b a zbývající úhly.



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$

$b^2 =(0{,}278^2 + 0{,}354^2 - 2\cdot 0{,}278\cdot 0{,}354\cdot\cos 105°)m^2$

$\underline{b \cong 50{,}4cm}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos\alpha = \dfrac{0{,}504^2+0{,}354^2-0{,}278^2}{2\cdot 0{,}504\cdot 0{,}354}$

$\underline{\alpha \cong 32°}$

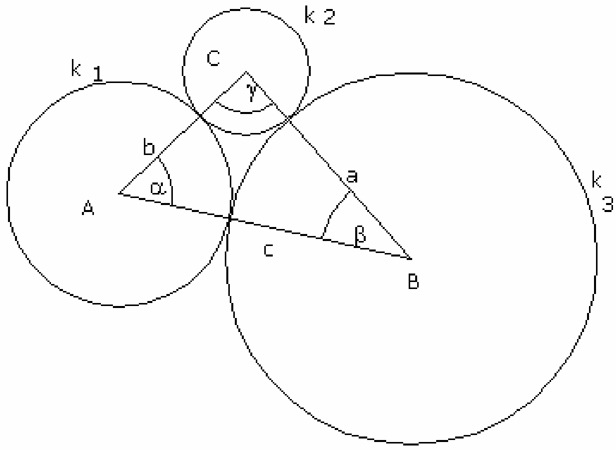
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

$\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\cos\gamma = \dfrac{0{,}278^2+0{,}504^2-0{,}354^2}{2\cdot 0{,}278\cdot 0{,}504}$

$\underline{\gamma \cong 43°}$

Př.: 3 kružnice; r_1=5cm, r_2=4cm, r_3=6cm, se vzájemně dotýkají vně. Vypočítejte velikost úhlů, které svírají jejich středy.



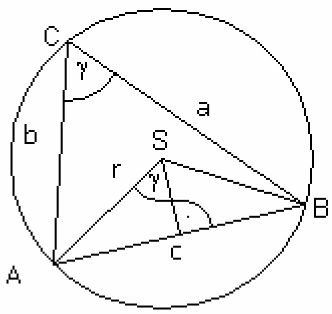
$a=r_2+r_3 \Rightarrow a=10cm$
$b=r_1+r_2 \Rightarrow b=9cm$
$c=r_1+r_3 \Rightarrow c=11cm$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cdot\cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

$\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\quad \cos\beta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\quad \cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\underline{\alpha \cong 58{,}99°}$ $\quad \underline{\beta \cong 50{,}48°}$ $\quad \underline{\gamma \cong 70{,}53°}$

Př.: Určete poloměr kružnice opsané △ ABC, když znáte stranu a úhel jí odpovídající.



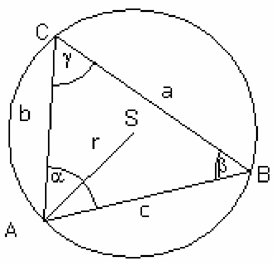
$|\sphericalangle ASB| = 2\gamma$

$|\sphericalangle ACB| = \gamma$

$\sin\gamma = \dfrac{c}{2r}$

$r = \dfrac{c}{2\sin\gamma}$ $\quad r = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ $\quad r = \dfrac{b}{2\sin\beta}$

Př.: Vypočítejte obvod trojúhelníku, který je vepsán do kružnice k(S;r = 5 cm) a jehož vnitřní úhly mají velikost 45° a 60°.

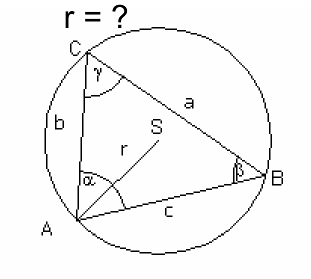


r = 5 cm
$\alpha = 45^\circ$ $\quad \gamma = 180^\circ-(\alpha+\beta) = 75^\circ$
$\underline{\beta = 60^\circ}$ $\quad O = a + b + c$

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r \Rightarrow a = 2r\cdot\sin\alpha,\ b = 2r\cdot\sin\beta,\ c = 2r\cdot\sin\gamma$

$O = r2\sin\alpha + r2\sin\beta + r2\sin\gamma$
$O = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$
$\underline{O \cong 25{,}39\text{ cm}}$

Př.: Vypočítejte v kružnici opsané trojúhelníku ABC; a = 26,5 cm; $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$;
r = ?



$\alpha = 2 \cdot \dfrac{180°}{2+3+4}$ $\quad \beta = 3 \cdot \dfrac{180°}{2+3+4}$ $\quad \gamma = 4 \cdot \dfrac{180°}{2+3+4}$

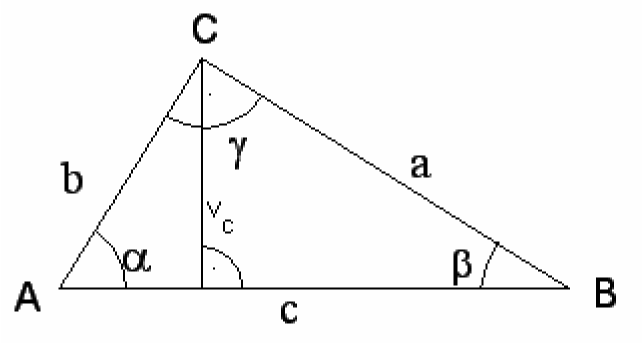
$\alpha = 40°$ $\quad \beta = 60°$ $\quad \gamma = 80°$

$r = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

<u>$r \cong 20{,}61$ cm</u>

<u>Obsah trojúhelníku:</u>

- známe-li dvě strany a úhel, který svírají



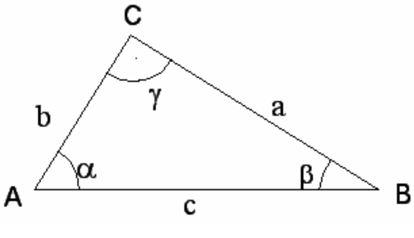
$S = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} c v_c \\ \sin\alpha &= \frac{v_c}{b} \\ v_c &= b \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad S = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$$

dále platí: $S = \dfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$S = \dfrac{1}{2} a\, c \cdot \sin\beta$

Př.: Určete obsah trojúhelníka ABC; a = 25,1 cm, $\alpha = 63°$, $\beta = 38°$



$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 79°$

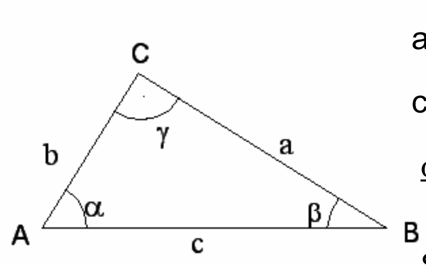
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a$

<u>$b \cong 17{,}34$ cm</u>

$S = \dfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

<u>$S \cong 213{,}62\ cm^2$</u>

Př.: Vypočítejte obsah trojúhelníka; a =26,43 cm, b = 37,56 cm, c = 41,6 cm



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

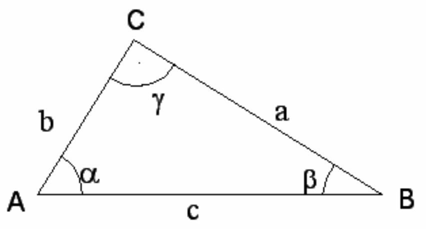
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\underline{\alpha \cong 38{,}58^{o}}$

$S = \dfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$

$\underline{S \cong 487{,}24\ cm^2}$

Př.: Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC; b = 72,5 cm; c = 56,7 cm,β = 74°12‘



$\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

$\sin\gamma = \dfrac{\sin\beta c}{b}$

$\underline{\gamma \cong 48^{o}49‘}$

$\alpha = 180^{o} - (\gamma + \beta)$

$\underline{\alpha \cong 56^{o}59‘}$

$S = \dfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$

$\underline{S \cong 1723{,}46\ cm^2}$

Heronův vzorec:

$S\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\qquad s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S\triangle = s \cdot g$

$S\triangle = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4r}$

Př.: Vypočítej obsah trojúhelníku, jestliže a=26cm, b=37cm, c=41cm.

S=?

a=26cm=0,26m

b=37cm=0,37m

c=41cm=0,41m

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$s = \dfrac{0{,}26 + 0{,}37 + 0{,}41}{2}$

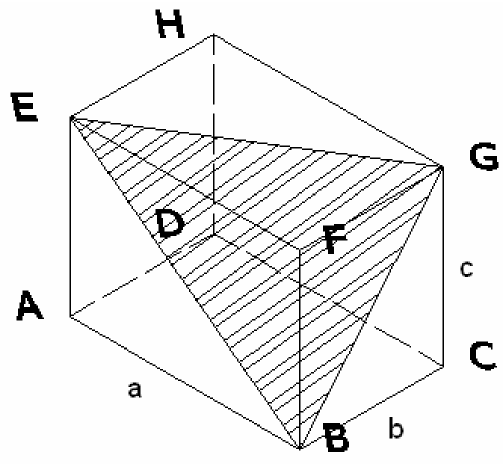
$\underline{s = 0{,}52m}$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$S = \sqrt{0{,}52(0{,}52-0{,}26)(0{,}52-0{,}37)(0{,}52-0{,}41)}$

$\underline{S \cong 0{,}047m^2 \cong 47cm^2}$

Př.: V krychli ABCDEFGH, kdy a=3cm, b=6cm, c=8cm, byl veden řez rovinou BGE;
1) vypočítejte velikost stran trojúhelníku BGE
2) vypočítejte velikost vnitřních úhlů trojúhelníku BGE
3) vypočítejte obsah řezu rovinou



1) $|EB| = \sqrt{a^2 + c^2}$

$|EB| = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}08^2}$

$\underline{|EB| \cong 8{,}54\text{cm}}$

$|BG| = \sqrt{b^2 + c^2}$

$|BG| = \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}08^2}$

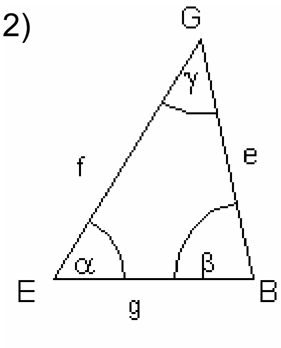
$\underline{|BG| = 10\text{cm}}$

$|GE| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|GE| = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}06^2}$

$\underline{|GE| \cong 6{,}71\text{cm}}$

2)



$g^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\gamma$

$\cos\gamma = \dfrac{e^2 + f^2 - g^2}{2ef}$

$\cos\gamma = \dfrac{0{,}1^2 + 0{,}0671^2 - 0{,}0854^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0671}$

$\underline{\gamma \cong 57{,}51°}$

$e^2 = g^2 + f^2 - 2gf\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{g^2 + f^2 - e^2}{2gf}$

$\cos\alpha = \dfrac{0{,}0854^2 + 0{,}0671^2 - 0{,}1^2}{2 \cdot 0{,}0854 \cdot 0{,}0671}$

$\underline{\alpha \cong 80{,}99°}$

$f^2 = e^2 + g^2 - 2eg\cos\beta$

$\cos\beta = \dfrac{e^2 + g^2 - f^2}{2eg}$

$\cos\beta = \dfrac{0{,}1^2 + 0{,}0854^2 - 0{,}0671^2}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0854}$

$\underline{\beta \cong 41{,}5°}$

3) $S = \dfrac{1}{2} e \cdot f \cdot \sin\gamma$

$S = \left(\dfrac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}0671 \cdot \sin 57{,}51°\right)\text{m}^2$

$\underline{S \cong 0{,}002829\text{m}^2 \cong 28{,}3\text{cm}^2}$