I. Základní poznatky z logiky a teorie množin

1. Jsou dány množiny
   $A=\{1,2,4,7,11,16\}, B=\{1,3,7,13\}, C=\{1,6,11,19\}$. Určete:

   a) $A\cup B$ $[\{1,2,3,4,7,11,13,16\}]$
   b) $B\cup C$ $[\{1,3,6,7,11,13,19\}]$
   c) $A\cup B\cup C$ $[\{1,2,3,4,6,7,11,13,16,19\}]$
   d) $A\cap B$ $[\{1,7\}]$
   e) $A\cap C$ $[\{1,11\}]$
   f) $A\cap B\cap C$ $[\{1\}]$

2. Jsou dány množiny $A=\{x\in R: |x-2|<1 \wedge x\geq 2\}, B=\{x\in R: |x+2|\geq 3\}$.
   Zapište množiny $A, B, A\cup B, A\cap B$ pomocí intervalů.
   $[A=<2;3),\ B=(-\infty;-5>\cup<1;\infty),\ A\cup B=(-\infty;-5>\cup<1;\infty),\ A\cap B=<2;3)]$

3. Jsou dány množiny $A=\{0;4;-4\}$ a $B=<-4;4)$. Určete:
   a) $A\cup B$ $[\langle -4,4\rangle]$
   b) $A\cap B$ $[\{0,-4\}]$
   c) $A-B$ $[\{4\}]$
   d) $B-A$ $[(-4,0)\cup(0,4)]$
   e) načrtněte AxB

4. Je dána množina $A=\{-2,-1,0,1,2\}$. Znázorněte graficky binární relace:
   a) $R=\{(x,y)\in A\times A, x>y\}$
   b) $S=\{(x,y)\in A\times A, x^2-y^2<1\}$
   c) $T=R\cap S$

5. Užitím Vennových diagramů rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny A,B,C dané základní množiny platí:

   a) $(A\cap\overline{B})\cup B=A\cup B$ [platí]
   b) $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$ [neplatí]
   c) $\overline{C}\cap(A\cap B)=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{C}\cap B)$ [platí]

6. Rozhodni o pravdivosti těchto výroků:

   a) Číslo 3 je kořenem rovnice $x^2+9=0$ právě tehdy, když $\sqrt{9}=-3$.
   b) Číslo 7 je menší než číslo 10 tehdy a jen tehdy, když číslo 8 je menší než číslo 12.

7. Řešte tabulkou pravdivost následujících výrokových formulí:

a) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B)$
b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$
c) $[(X \Rightarrow Y) \wedge Y'] \Rightarrow X'$
Určete, které z nich jsou tautologiemi.

II. Úpravy algebraických výrazů

1. Vypočtěte:

a) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{zt^{-3}}\right)^{-2}$ $\left[\dfrac{y^6z^2}{x^4t^6}\right]$

b) $\left(\dfrac{3ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\dfrac{4a}{5xy^2}\right)^{-3}$ $\left[\left(\dfrac{20x}{3b}\right)^3\right]$

c) $\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^4}\cdot\sqrt[4]{8a^3b^5}\cdot\sqrt[6]{2a^5b^4}\cdot\sqrt[12]{4a^2b^8}$ $\left[4a^2b^4\cdot\sqrt[12]{8a^{11}b^5}\right]$

2. Určete nejmenší společný násobek mnohočlenů:

a) $5a^2-5b^2; 3a^3-3ab^2; 6ab^2-6b^3$ $\left[30ab^2(a^2-b^2)\right]$
b) $(c-a)(c-b); (b-c)(b-a); (a-b)(a-c)$ $[(a-c)(b-c)(a-b)]$

3. Proveďte dělení:

a) $(6x^4-2x^3-4x^2+1):(2x^2-3x+1)$ $\left[3x^2+\dfrac{7}{2}x+\dfrac{7}{4}+\dfrac{7x-3}{4(2x^2-3x+1)}\right]$

b) $(x^5-3x^3+2x^2-3):(5x^2-1)$ $\left[\dfrac{1}{5}x^3-\dfrac{14}{25}x+\dfrac{2}{5}-\dfrac{14x+65}{25(5x^2-1)}\right]$

c) $(3x^6-5x^4+2x^3-1):(x^3+2x+1)$ $\left[3x^3-11x-1+\dfrac{x(22x+13)}{x^3+2x+1}\right]$

4. Upravte a stanovte podmínky:

a) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$ $\left[\dfrac{1}{x^3}, x\neq 0\right]$

b) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ $[4x, x>0, x\neq 1]$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot x^{1/3}\cdot x^{-1}}{x^{-1/2}\cdot\sqrt[12]{x^5}}$ $[x, x>0]$

d) $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)\cdot(a^3-b^3)}$ $[a-b, a\neq \pm b]$

e) $\left(\dfrac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\dfrac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\dfrac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{-1/2}:\ \sqrt[4]{t^2-4}$ $\left[\dfrac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}, t>2\right]$

5. Upravte algebraické výrazy:

a) $2n-\left(\dfrac{2n-3}{n+1}-\dfrac{n+1}{2-2n}-\dfrac{n^2+3}{2n^2-2}\right)\cdot\dfrac{n^3+1}{n^2-n}$ $\left[\dfrac{2(n-1)}{n}, n\neq\pm1, n\neq 0\right]$

b) $\left[\left(\dfrac{a+2}{a-2}\right)^3:\dfrac{a^3+4a^2+4a}{3a^2-12a+12}\right]\cdot\dfrac{a}{3}$ $\left[\dfrac{a+2}{a-2}, a\neq\pm2, a\neq 0\right]$

c) $\left[b^2-\dfrac{a}{1+\left(\dfrac{b-a}{a}\right)^{-1}}\cdot\left(\dfrac{a\cdot b}{b-a}-a\right)\right]:\dfrac{a^2+ab+b^2}{b}$ $[b-a, a\neq 0, b\neq 0, a\neq b]$

d) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $[1, a\neq b, a\geq 0, b\geq 0]$

e) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ $\left[-\dfrac{a+b}{\sqrt{a}}, a>0,\ b>0\right]$

f) $\left[\left(\dfrac{x^2+y^2}{2y}-x\right):\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)\right]:\dfrac{x^3-xy^2}{4}$ $\left[\dfrac{2}{x+y}, x\neq 0, y\neq 0, x\neq\pm y\right]$

g) $\dfrac{a^2+a-2}{a^4-3a^3}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$ $\left[\dfrac{a+2}{a^4}, a\neq 3, a\neq 0, a\neq\pm1\right]$

h) $\dfrac{a\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$ $[\sqrt{ab}, a>0, b>0]$

i) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^2}}} : \dfrac{a^{1/2}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}$ $\left[a\sqrt[5]{a^2}, a>0\right]$

6. Zjednodušte a udejte podmínky existence výrazů:

a) $\left(\dfrac{a^3-ab^2+b^3}{(a-b)^3}-\dfrac{b}{a-b}\right)\cdot\left(\dfrac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{b}{a}\right)$ $[1, a\neq 0, a\neq b]$

b) $\left[\left(\dfrac{3}{a-b}-\dfrac{3a}{b^3-a^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right):\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}\right]\cdot\dfrac{2}{a+b}$ $\left[\dfrac{6}{a-b}, a\neq\pm b, a\neq-\dfrac{b}{2}\right]$

c) $\dfrac{m-n}{m^{1/2}-n^{1/2}}-\dfrac{m^{3/2}-n^{3/2}}{m-n}$ $\left[\dfrac{\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}, m\geq 0, n\geq 0, m\neq n\right]$

d) $\left(\dfrac{a^{-2/3}}{b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-2/3}}\right):\left(\dfrac{a^{-1/3}}{b^{-1/2}}-\dfrac{b^{-1/2}}{a^{-1/3}}\right)$ $\left[\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+b}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}}, a\neq 0, b>0, b\neq\sqrt[3]{a^2}\right]$

e) $\left(\dfrac{3x^{-1/3}}{x^{2/3}-2x^{-1/3}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$ $\left[\dfrac{x^2}{2x-1}, x\neq\dfrac{2}{3}, x\neq 2, x\neq 1, x\neq\dfrac{1}{2}\right]$

7. Rozložte na součiny, resp. upravte krácením:

a) $x^2-2ax+a^2-b^2$ $[(x-a-b)\cdot(x-a+b)]$

b) $abx^2-2a\sqrt{ab}x+a^2-b^2$ $[(x\sqrt{ab}-a-b)\cdot(x\sqrt{ab}-a+b), ab\geq 0]$

c) $\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-13x+15}$ $\left[\dfrac{x-2}{2x-3}, x\neq 5, x\neq\dfrac{3}{2}\right]$

d) $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2-17x+10}$ $\left[\dfrac{x-3}{x-5}, x\neq\dfrac{2}{3}, x\neq 5\right]$

e) $\dfrac{2x^3-5x^2-2x+5}{x^2-4x+3}$ $\left[\dfrac{(2x-5)(x+1)}{x-3}, x\neq 3, x\neq 1\right]$

III. Funkce

1. Do téže soustavy souřadnic načrtněte grafy funkcí a vyznačte důležité body (průsečíky s osami x a y, vrcholy apod.)

a) $y = x^2$ $\quad y = x^2 - 5$ $\quad y = (x-5)^2$ $\quad y = (x+5)^2$

b) $y = x^3$ $\quad y = -x^3$ $\quad y = x^{-3}$

c) $y = \sqrt{x}$ $\quad y = -\sqrt{x}$ $\quad y = \sqrt{-x}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$ $\quad y = \sqrt[3]{x-1}$ $\quad y = \sqrt[3]{1-x}$

e) $y = 2^x$ $\quad y = 2^{-x}$ $\quad y = 3 - 2^x$

f) $y = 3^x$ $\quad y = \log_3 x$

g) $y = \log x$ $\quad y = 1 - \log x$ $\quad y = \log(1-x)$

h) $y = \log_2 x$ $\quad y = \log_{1/2} x$ $\quad y = \log_2 |x|$

i) $y = \sin x$ $\quad y = |\sin x|$ $\quad y = 2 + \sin\frac{x}{2}$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

j) $y = \mathrm{tg}x$ $\quad y = |\mathrm{tg}x|$ $\quad y = \mathrm{tg}2x$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

k) $y = \mathrm{cotg}x$ $\quad y = \mathrm{cotg}2x$ $\quad y = \mathrm{cotg}\frac{x}{2}$ pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

l) $y = \cos x$ $\quad y = 2\cos x$ $\quad y = \cos 2x$ $\quad y = \cos\frac{x}{2}$ pro $x \in \langle 0, 4\pi \rangle$

2. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ $\quad [(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)]$

b) $y = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad [\langle -3, 3 \rangle]$

c) $y = (x^2 + 3x)^{-1/2}$ $\quad [(-\infty, -3) \cup (0, \infty)]$

d) $y = \dfrac{2\cos x}{2 + \sin x}$ $\quad [(-\infty, \infty)]$

e) $y = 2\log(x-1)$ $\quad [(1, \infty)]$

f) $y = \log(x-1)^2$ $\quad [(-\infty, 1) \cup (1, \infty)]$

3. Určete definiční obor funkce:

a) $y = \log \frac{2-x}{2+x}$ $\quad [(-2,2)]$

b) $y = \ln e^{1/\ln x}$ $\quad [(0,1) \cup (1,\infty)]$

c) $y = \ln x^3$ $\quad [(0,\infty)]$

d) $y = \ln \ln x$ $\quad [(1,\infty)]$

e) $y = \ln \ln \sin x$ $\quad [\varnothing]$

IV. Rovnice a nerovnice

1. Řešte rovnice:

a) $\frac{x^2 - 2x - 8}{4 - x} = 1$ $\quad [-3]$

b) $\frac{y+4}{y-2} + \frac{7y-8}{8-2y-y^2} = \frac{y-2}{y+4}$ $\quad$ [nemá řešení]

c) $\frac{a}{a+x} + \frac{a-x}{a} = \frac{11}{10}$, a je parametr $\quad \left[-\frac{5a}{7}, \frac{2a}{3}\right]$

d) $1 - \frac{2b}{x-a} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ax - x^2}$, a,b jsou parametry $\quad [b, 2a+b]$

2. Pro která x, resp. y je splněna nerovnice:

a) $(y-3)^2 - (y+6)^2 > 3 - 8y$ $\quad [(-\infty,-3)]$

b) $\frac{x^2 + 5x + 8}{x^2 - 5x - 6} \geq 0$ $\quad [(-\infty,-1) \cup (6,\infty)]$

3. Řešte nerovnice:

a) $\frac{3-2x}{2x-5} \geq 0$ v oboru přirozených čísel $\quad [2]$

b) $\frac{x-5}{x+3} < 3$ $\quad [(-\infty,-7) \cup (-3,\infty)]$

4. Řešte nerovnice:

a) $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{3x-2}$ $\left[\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)\right]$

b) $\frac{2x-1}{x-1} \geq \frac{x+2}{x+1}$ $\left[\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,\infty\right)\right]$

c) $\frac{y}{y-2} - \frac{3}{y+1} \leq 1$ $\left[\left(-1,2\right)\cup\left(8,\infty\right)\right]$

5. Pro která m má rovnice

a) $3(x+1) = 4 + mx$ kořen větší než –1 ? $\left[\left(-\infty,3\right)\cup\left(4,\infty\right)\right]$

b) $x^2 + 2mx + m^2 = 4$ oba kořeny záporné ? $\left[m > 2\right]$

6. Zjistěte, která x, resp. y vyhovují nerovnici:

a) $|3y+9| > 4y+3$ v oboru přirozených. čísel $\left[1,2,\dots,5\right]$

b) $-3x < \frac{x}{2} - \frac{|3+2x|}{4}$ $\left[\left(\frac{1}{4},\infty\right)\right]$

c) $y - 3 \leq |2y+1|$ [každé reálné číslo]

d) $\frac{3}{|x+1|} > 1$ v oboru celých čísel $\left[-3,-2,0,1\right]$

7. Vyřešte rovnice a nerovnice:

a) $|x-7| + 4x = |2x-5|$ $\left[-\frac{2}{5}\right]$

b) $|y+3| - |y-2| = -5$ $\left[(-\infty,-3>\right]$

c) $|2y+1| - |3-y| < y$ $\left[\left(-2,1\right)\right]$

d) $3|x-1| + |3x-1| \leq x-1$ [nemá řešení]

e) $|x^2-4| \geq x-4$ [každé reálné číslo]

f) $x^2 + 10 > |16-3x^2|$ $\left[\left(-\sqrt{13},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{13}\right)\right]$

8. Řešte v R, x je neznámá, a, m jsou parametry:

a) $\frac{x^2}{x^2-a^2}-\frac{x+a}{x-a}+\frac{a}{x+a}=0$ [pro a=0 je rovnice splněna pro jakékoliv $x \neq 0$, pro $a \neq 0$ má rovnice jediné řešení x = -2a]

b) $\frac{1-x}{1-m}-\frac{1+x}{1+m}+\frac{1-x}{1+2m+m^2}=0$

[pro $m \neq \pm 1,-3$ existuje jediné řešení $x=\frac{1+m+2m^2}{3+m}$, pro m = -3 rovnice nemá řešení]

9. V RxR, příp. RxRxR řešte soustavy rovnic jinou metodou než dosazovací:

a) $x-y+3=0,\ \frac{y}{x}=\frac{3}{2}$ $[(6,9)]$

b) $\frac{7}{x}-\frac{3}{y}=5,\ \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$ $\left[\left(-1,-\frac{1}{4}\right)\right]$

c) $3x+2py=1, (3p-1)x-py=1$ $\left[\left(\frac{3}{1+6p},\frac{3p-4}{p(1+6p)}\right) \text{ pro } p \neq -\frac{1}{6}, p \neq 0\right]$

d) $\frac{x+1}{y+1}=2, \frac{y+2}{z+1}=4, \frac{z+3}{x+1}=\frac{1}{2}$ $[(5,2,0)]$

e) $2x+3y=12,\ 3x+2z=11, 3y+4z=10$ $[(3,2,1)]$

10. Řešte soustavy rovnic:

a) $x+y^2=7,\ xy^2=12$ $\left[(3,2),(3,-2),\left(4,\sqrt{3}\right),\left(4,-\sqrt{3}\right)\right]$

b) $x^2-xy+y^2=7,\ x-y=1$ $[(-2,-3),(3,2)]$

c) $x^2+y^2=\frac{5}{2}xy,\ x-y=\frac{1}{2}xy$ $[(-1,-2),(2,1)]$

11. Která reálná čísla vyhovují rovnici:

a) $x+\sqrt{x^2-9}=21$ $\left[\frac{75}{7}\right]$

b) $\sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)}}-\sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}}=\frac{3}{2}$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

c) $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

d) $3+\sqrt{x-1}=x$ $[5]$

e) $21+\sqrt{x^2-9}=x$ [nemá řešení]

e) $x-\sqrt{2-x}\leq 1$ $\left[(-\infty,\frac{1+\sqrt{5}}{2}>\right]$

12. Která přirozená čísla vyhovují nerovnicím:

a) $\frac{2x}{5} + 2 < 2(x-2) < x + 3$ $[4,5,6]$

b) $-1 \leq 2 - \sqrt{2-x} \leq 1$ $[1]$

13. Graficky vyřešte soustavu nerovnic

a) $3x + y - 6 \leq 0,\ x - 3y + 6 \geq 0$

Které dvojice přirozených čísel vyhovují? $[(1,1), (1,2)]$

b) $2x + 3y < 6,\ \ 4x + 6y > 7$

c) $y > x^2 - 4x + 2,\ \ x - y \geq 2$

Které dvojice celých čísel vyhovují? $[(2,-1), (2,0), (3,0), (3,1)]$

14. Řešte rovnice:

a) $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$, je-li jeden z kořenů číslo $\frac{3}{2}$ $\left[-1, \frac{3}{2}, 2\right]$

b) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0$, jestliže má kořen $(2+i)$ $\left[2+i, 2-i, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

V. Logaritmy, logaritmické a exponenciální rovnice

1. Stanovte z tak, aby

a) $\log_z 4 = 2$ $[2]$

b) $\log_z 100 = 2$ $[10]$

c) $\log_z 0{,}0001 = 2$ $\left[\frac{1}{100}\right]$

2. Určete:

a) $\log_2 4$ $[2]$

b) $\log_2 \frac{1}{8}$ $[-3]$

c) $\log_2 \sqrt[3]{4}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

d) $\log_2 2$ $[1]$

3. Co je větší

a) $\log_2 5$ nebo $\log_2 7$ $\qquad [\log_2 7]$

b) $\log_{1/2} 5$ nebo $\log_{1/2} 7$ $\qquad [\log_{1/2} 5]$

4. Zjednodušte výraz:

a) $\log a - 2\log b + \frac{3}{4}\log e - 3 - \frac{1}{2}\log(a-1)$ $\qquad \left[\log\frac{a\sqrt[4]{e^3}}{1000b^2\sqrt{a-1}}, a>1, b>0\right]$

b) $3\log a + \log b + 2 - \frac{1}{3}\log(c+3) + \frac{1}{4}\log(b-2)$

$\left[\log\frac{100a^3b\sqrt[4]{b-2}}{\sqrt[3]{c+3}}, a>0, b>2, c>-3\right]$

5. Určete výraz, jehož logaritmováním dostaneme:

a) $\frac{3}{2}(\log a - \log b) - \frac{\log c}{4} + \log(a-b)$ $\qquad \left[\frac{\sqrt{(a/b)^3}\,(a-b)}{\sqrt[4]{c}}, a>b, b>0, c>0\right]$

b) $\log(a-2) + \frac{\log c}{2} - \frac{1}{3}(\log c + 2\log b)$ $\qquad \left[\frac{(a-2)\sqrt{c}}{\sqrt[3]{cb^2}}, a>2, b>0, c>0\right]$

6. Určete všechna řešení rovnic v oboru reálných čísel:

a) $\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4$ $\qquad [9/8]$

b) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$ $\qquad [9/2]$

c) $3^{\log x} + 5^{\log y} = 14$; $3^{2\log x} - 5^{2\log y} = 56$ $\qquad [100,10]$

d) $2\log(x-2) - \log(14-x) = 0$ $\qquad [5]$

e) $\log_3(x-1) - 2\log_3(x-3) = 0$ $\qquad [5]$

f) $\frac{\log_2(x-1)}{\log_2(3-x)} = \log_2 4$ $\qquad [\text{nemá řešení}]$

7. Řešte rovnice:

a) $3^3 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$ $\left[\frac{7}{3}\right]$

b) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

c) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ $[-1{,}7012]$

d) $8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \quad 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$ $\left[\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right]$

VI. Goniometrické výrazy, rovnice a nerovnice

1. Zjistěte, kdy platí nerovnice:

a) $\mathrm{tg}x \geq -1$ $\left[x \in < -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \text{ celé}\right]$

b) $\sin y < -\frac{1}{2}$ $\left[y \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right), k \text{ celé}\right]$

c) $\cos 4\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\alpha \in < -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}), k \text{ celé}\right]$

d) $\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2} < 1$ $\left[\beta \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k+1)2\pi\right), k \text{ celé}\right]$

2. Dokažte, že pro úhel x platí:

a) $\frac{\cos x - \mathrm{cotg}x}{\mathrm{cotg}x} = \sin x - 1$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}, k \text{ celé}\right]$

b) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{\cos 2x} = \frac{2\mathrm{tg}x}{\sin 2x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{4}, \ k \text{ celé}\right]$

Napište podmínky pro x.

3. Zjednodušte dané výrazy a určete, kdy jsou reálné:

a) $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ $\left[\frac{1}{\cos x}, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \text{ celé}\right]$

b) $\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \mathrm{cotg}^2 x}$ $\left[1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \text{ celé}\right]$

c) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ $\left[2\mathrm{tg}\alpha\ ,\ \alpha \neq k\dfrac{\pi}{2}, \text{k celé}\right]$

d) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}-\dfrac{1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$ $\left[\dfrac{2}{\sin\alpha-1}, \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\ , \text{k celé}\right]$

4. Řešte rovnice:

a) $\mathrm{tg}x = 3\cot gx$ $\left[x \neq k\dfrac{\pi}{2}, x = \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ , \text{k celé}\right]$

b) $\sin 2x = \sin x$ $\left[x = k\pi, x \neq \pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ \text{k celé}\right]$

c) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

$[x = 30° + k.360°, 150° + k.360°, 270° + k.360°, \text{k celé}]$

d) $2\mathrm{tg}x - 3\cot gx = 1$ $[x = 56°19' + k.180°, 135° + k.180°,\ \text{k celé}]$

e) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 0$ $[x = k.180°, 60° + k.180°, \text{k celé}]$

f) $\sin\dfrac{x}{2} + \cos x = 1$ $[x = k..360°, 60° + k.720°, 300° + k.720°, \text{k celé}]$

g) $\sin^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 0$ $[x = 80°32' + k.180°, 45° + k.180°, \text{k celé}]$

5. Vypočítejte stranu a obsah pravidelného pětiúhelníka

a) vepsaného $\left[a = 2r\sin\alpha, P = \tfrac{5}{2}r^2\sin 2\alpha, \alpha = 36°\right]$

b) opsaného kružnici o poloměru r $\left[a = 2r\ \mathrm{tg}\alpha\ , P = 5r^2\mathrm{tg}\alpha, \alpha = 36°\right]$

6. Určete velikost všech úhlů a stran trojúhelníka, pro který platí:

a) $\alpha = 30°, b = 10, a = 5$ $\left[\beta = 90°, \gamma = 60°, c = 5\sqrt{3}\right]$

b) $\alpha = 60°, c = a = 16$ $[\beta = \gamma = 60°, b = 16]$

c) $\alpha = 120°, a = b = 5$ [nemá řešení]

VII. Posloupnosti

1. Vypočtěte žádané prvky aritmetické posloupnosti:

a) $d = -12, a_n = 15, s_n = 456, n = ?, a_1 = ?$ $[n = 8, a_1 = 99]$

b) $a_1 = 6, s_{10} = 195, a_{10} = ?, d = ?$ $[a_{10} = 33, d = 3]$

2. Určete aritmetickou posloupnost, u které platí:

$a_1 + a_4 + a_6 = 71 \qquad a_5 - a_2 - a_3 = 2$ $\qquad [a_1 = 5, d = 7]$

3. Strany pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost. Delší odvěsna je 24. Vypočtěte obvod trojúhelníka. $[o = 72]$

4. Určete a_1 a q v geometrické posloupnosti, pro kterou platí:

a) $a_1 + a_4 = 112 \qquad a_2 + a_3 = 48$ $\qquad \left[a_1 = 4, q = 3 ; a_1 = 108, q = \frac{1}{3}\right]$

b) $a_7 - a_5 = 48 \quad a_6 + a_5 = 48 \qquad s_n = 1023$ $\qquad [a_1 = 1, q = 2, n = 10]$

5. Stanovte takové číslo, aby zvětšeno postupně o 7,15 a 27 dalo tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. $[9]$

6. U geometrické posloupnosti reálných čísel je součet prvních čtyř členů 15, dalších čtyř 240. Určete tuto posloupnost. $[a_1 = 1, q = 2 ; a_1 = -3, q = -2]$

7. Řešte rovnice

a) $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \ldots$ $\qquad [-6, 4]$

b) $\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \ldots$ $\qquad \left[\frac{1}{2}, -\frac{5}{7}\right]$

c) $-\frac{2}{5} = x - 2x^2 + x^3 - 2x^4 + \ldots$ $\qquad \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right]$

8. Je dán čtverec o straně a. Spojnice středů jeho stran tvoří opět čtverec, spojnice středů nového čtverce tvoří opět čtverec atd. Které mezi se blíží součet obsahů těchto čtverců? $[2a^2]$

VIII. Analytická geometrie

1. V trojúhelníku ABC (A[4;-2], B[2;6], C[-2;0]) najděte rovnici těžnice z bodu C.

$[2x - 5y + 4 = 0]$

2. Jaké úseky tvoří na osách souřadnic přímka jdoucí body A[1; 4,5]; B[-4; -3].

$[p = -2, q = 3]$

3. Určete rovnici přímky jdoucí bodem A[6,5], která na osách vymezuje úseky, jejichž součet je 22. $[x + y - 11 = 0,\ 5x + 6y - 60 = 0]$

4. Určete, pro které hodnoty parametru <u>a</u> přímka $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$

   a) je rovnoběžná s osou x,

   b) je rovnoběžná s osou y,

   c) prochází počátkem.

   Napište rovnice těchto přímek.

   [a) $-5y + 33 = 0$ b) $x - 56 = 0; 5x + 8 = 0$ c) $33x - 56y = 0;\ 3x - 8y = 0$]

5. Jaká je rovnice přímky jdoucí bodem A a svírající s osou x úhel φ v případech:

   a) A [6, 4] $\varphi = 60^\circ$ $[\, x\sqrt{3} - y + 4 - 6\sqrt{3} = 0\,]$

   b) A [4,–3] $\varphi = 135^\circ$ $[\, x + y - 1 = 0\,]$

   c) A [0,–2] $\varphi = 150^\circ$ $[\, x\sqrt{3} + 3y + 6 = 0\,]$

6. Jaká je rovnice přímky, která prochází průsečíkem přímek $x - 5y + 1 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou $y = 2x$?

   $[26x - 13y + 44 = 0]$

7. Jakou vzdálenost má bod M [5;7] od přímky určené body A [-4; 5] a B [11; -3]

   $[\, d = 6\,]$

8. Určete střed a poloměr kružnice

   a) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0$ $[\, S = [3\,;-5] \quad r = 6\,]$

   b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$ $[\, S = [0\,;-3] \quad r = 4\,]$

   c) $x^2 + y^2 - 2x + y + \frac{1}{4} = 0$ $[\, S = [1;-\tfrac{1}{2}] \quad r = 1\,]$

9. Najděte rovnici kružnice, která má střed v bodě S = [6, 7] a dotýká se přímky $5x - 12y - 24 = 0$. $[x^2 + y^2 - 12x - 14y + 49 = 0]$.

10. Stanovte rovnici kružnice dotýkající se dvou rovnoběžných přímek $2x + y - 5 = 0$

a $2x + y + 15 = 0$, jedné v bodě A = [2, 1]. $[(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20]$

11. Najděte vrchol a ohnisko paraboly. Načrtněte!

a) $y^2 - 12x - 6y + 57 = 0$ $[\ V = [4, 3] \quad F = [7, 3]\ ]$

b) $x^2 + 6x - 9y = 0$ $[\ V = [-3\,; -1] \quad F = [-3\,, \frac{5}{4}]\ ]$

c) $2y^2 - 11x + 12y + 73 = 0$ $[\ V = [5\,; -3] \quad F = [\frac{51}{8}\,, -3]\ ]$

12. Najděte souřadnice středu a velikosti poloos křivek. Načrtněte!

a) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 150y - 111 = 0$ [elipsa $S = [2, 3] \quad a = 5, b = 4$]

b) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$ [elipsa $S = [-2, 1] \quad a = 4, b = 3$]

c) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$ [hyperbola $S = [1, -2] \quad a = 2,\ b = 3$]

d) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 18y + 9 = 0$ [elipsa $S = [3, 1] \quad a = 3,\ b = 2$]

e) $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$ [hyperbola $S = [1, -2] \quad a = 1,\ b = 2$]

IX. Komplexní čísla

1. Napište ve tvaru a+bi:

a) $(3 + 4i)(1 - i)$ $[7 + i]$

b) $(3 + 2i\sqrt{2})(3 - 2i\sqrt{2})$ $[17]$

c) $(2 - i\sqrt{3})^2$ $[1 - 4i\sqrt{3}]$

d) $(3 - i)^3$ $[18 - 26i]$

e) $(1 + 3i)^2 + (5 - i)^2$ $[16 - 4i]$

2. Upravte na zlomek s reálným jmenovatelem:

a) $\dfrac{2i - 1}{4i + 3}$ $\left[\dfrac{1 + 2i}{5}\right]$

b) $\dfrac{2 - 5i}{-1 + 3i}$ $\left[\dfrac{-17 - i}{10}\right]$

c) $\dfrac{7 - 5i}{2 + i}$ $\left[\dfrac{9 - 17i}{5}\right]$

d) $\dfrac{3i - 5}{1 + i} - i + 2$ $[1 + 3i]$

3. Pro která reálná čísla x, y platí:

a) $(3-2i)(i-x)=2y-i$ $[x=-2, y=4]$

b) $x(2+3i)+y(4-3i)=33i-8$ $[x=6, y=-5]$

c) $5(2-i)x+(3i-2)y+i=(i-2)x-4(1-i)y+5$ [nemá řešení]

d) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)x+(1-6i)y=\frac{(2-3i)}{4}$ $\left[x=\frac{3}{10}, y=\frac{1}{5}\right]$

4. Určete absolutní hodnotu daných komplexních čísel:

a) $3-4i$ [5]

b) $1/(1+i)-1/(1-i)$ [1]

c) $1-i\sqrt{3}$ [2]

d) $(2-i)(-1+3i)$ $\left[5\sqrt{2}\right]$

5. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní čísla:

a) $(1+i)$ $\left[\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)\right]$

b) $i-1$ $\left[\sqrt{2}(\cos 3\pi/4+i\sin 3\pi/4)\right]$

c) $1-i\sqrt{3}$ $[2(\cos 5\pi/3+i\sin 5\pi/3)]$

d) $-1-i\sqrt{3}$ $[2(\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3)]$

e) $(-1+i)/(1+i)$ $[\cos\pi/2+i\sin\pi/2]$

6. Určete kvadratickou rovnici, jejíž jeden kořen je:

a) $3-i/2$ $[4x^2-24x+37=0]$

b) $2i$ $[x^2+4=0]$

7. Pomocí Moivreovy věty určete a znázorněte graficky:

a) $\sqrt[3]{i}$ $\left[\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{3};k=0,1,2\right]$

b) $\sqrt[4]{1}$ $\left[\cos\frac{0+2k\pi}{4}+i\sin\frac{0+2k\pi}{4};k=0,1,2,3\right]$

c) $\sqrt[5]{-32}$ $\left[2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{5}\right);k=0,1,2,3,4\right]$

X. Kombinatorika, binomická věta

1. Z kolika prvků lze vytvořit 210 variací druhé třídy ? $[15]$

2. Kolik tanečních párů lze vytvořit z 18 mužů a 15 žen ? $[270]$

3. Kolika způsoby můžeme vybrat z 5 chlapců a 5 dívek volejbalové mužstvo, mají-li v něm být 2 dívky ? $[50]$

4. Kolika způsoby lze vybrat ze 6 kandidátů do komise 3 z nich ? $[20]$

5. Kolik různých přirozených čísel lze vytvořit z cifer 0,1,2,3,4, nemá-li se žádná cifra v číslech opakovat ? $[260]$

6. Kolik různých převodů lze vytvořit sadou šesti ozubených koleček o různém počtu zubů ? $[30]$

7. Zjednodušte a vypočtěte:

   a) $\binom{4}{2}+\binom{6}{2}-\binom{7}{2}$ $[0]$

   b) $\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}$ $[56]$

   c) $\binom{7}{5}+\binom{7}{4}-\binom{8}{5}+\binom{8}{4}$ $[70]$

   d) $(n+3)!/(n+1)!+(n+1)!/(n-1)!-2(n+2)!/n!$ $[2]$

8. Řešte v oboru přirozených čísel rovnice:

   a) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}=\left(n^3+59\right)/6$ $[1]$

   b) $6\binom{n}{3}+2\binom{n}{2}=\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{0}$ [nemá řešení]

   c) $\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-2}{n-4}=16$ $[7]$

   d) $\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{3}=\dfrac{n^3}{2}+88$ $[6]$

9. Řešte v oboru přirozených čísel nerovnice:

   a) $n\binom{n}{2}+\binom{n+1}{3}<30n$ $[2, 3, 4, 5, 6, 7]$

b) $2\binom{n}{2}+\binom{n+3}{2}+\binom{n+5}{2}\le 153$ $[2, 3, 4, 5, 6, 7]$

c) $\binom{n}{n-3}-\binom{n+3}{3}>0$ [nemá řešení]

d) $n\cdot(n-2)!>n!+(n-1)!$ [nemá řešení]

10.Rozveďte pomocí binomické věty a zjednodušte:

a) $(x+y)^5+(x-y)^5$ $[2x(x^4+10x^2y^2+5y^4)]$

b) $(1+i)^4$ $[-4]$

c) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)^5$ $[-11\sqrt{2}-i31\sqrt{3}]$