TRNAVSKÁ UNIVERZITA V TRNAVE

P E D A G O G I C K Á   F A K U L T A

POŽIADAVKY NA PRIJÍMACIE SKÚŠKY Z MATEMATIKY V UČITEĽSKOM ŠTÚDIU PRE 1. A 2. STUPEŇ ZÁKLADNÝCH ŠKÔL

(okruhy tém, súbor úloh, ukážky testov)

T R N A V A

2 0 0 0

Obsah

Poznámka: Uchádzači o učiteľstvo pre 1. – 4. ročník ZŠ, zamerajte sa hlavne na okruhy a príklady na s.24-30.

I. Úprava algebraických výrazov

1. Z jednotlivých vzorcov vyjadrite požadovanú neznámu:

   a) $Q = mc(t_2 - t_1)$ $\qquad t_1 =$

   b) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ $\qquad b =$

   c) $z = \dfrac{-b}{a-b}$ $\qquad a =$

2. Rozložte na súčin a) $x^2 + 6xy + 9y^2$ f) $a^6 - a^4 - a^2 + 1$

   b) $1 - u^4v^2$ g) $t^4 - t^3 + t - 1$

   c) $a^2 - b^2 - 8b - 16$ h) $x^3 - 8x^2 - x + 8$

   d) $x^3 + x^2 + x + 1$ i) $x^4 + 4$

   e) $2r^3 - r^2 - 12r + 6$

3. Zjednodušte a) $\dfrac{27a^3 - 8}{9a^2 + 6a + 4}$ b) $\dfrac{6a^3 + 13a^2 + 4a - 6}{3a^2 + 8a + 6}$

   c) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^3 - 5x^2 + x + 2}$

4. Dokážte nasledujúce vzťahy a určte podmienky ich platnosti (prípadne zdôvodnite, prečo neplatia):

   a) $\dfrac{3a^{-4}b^{-3}}{5c^3d^{-4}} \cdot \dfrac{15c^{-3}d^{-2}}{4a^{-3}b^{-6}} \cdot \dfrac{2b^{-3}d^{-2}}{3c^{-6}a^{-1}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}=x-1$

c) $\left(\sqrt[3]{4p.\sqrt{2p^{-1}}}\right):\left[\sqrt{8p^{-3}.\left(\sqrt[3]{2p^{2}}\right)^{-1}}\right]=p^{2}$

d) $\dfrac{a^{4}-b^{4}}{a^{2}-b^{2}}:\left[\left(1+\dfrac{b^{2}}{a^{2}}\right).\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^{2}}{b^{2}}\right)\right]=\dfrac{a+b}{a-b}$

e) $\left[\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{3}:\dfrac{x^{3}+4x^{2}+4x}{3x^{2}-12x+12}\right]\cdot\dfrac{x}{3}=\dfrac{x+2}{x-2}$

f) $\dfrac{1-a^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{a-1}=\dfrac{2}{1-a}$

g) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^{2}-n^{2}}\right)=m-n$

h) $\sqrt{\dfrac{x^{2}-5x+6}{x^{2}-7x+10}\cdot\sqrt{\dfrac{x-5}{x-3}}}=1$

5. Dokážte, že:

a) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1$

b) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)=\dfrac{(a+b)\sqrt{a}}{a}$

c) $\left[(-x)^{-2n}:(-x)^{-2n-1}\right]^{-2}.\left[(-x)^{2n+1}.(-x)^{-2n+1}\right]^{3}=x^{-8}$

d) $\left[\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}=\dfrac{x^{2}}{2x-1}$

e) $\left(\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{x^{3}}-y\sqrt{y}\right).\left(x\sqrt{\dfrac{x}{y^{3}}}-x\sqrt{x}+\sqrt{y^{3}}\right)=x^{3}y^{-3}-x^{3}+2(xy)^{\frac{3}{2}}-y^{3}$

f) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}:\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}}=2^{\frac{15}{4}}$

g) $\sqrt{x\sqrt[3]{y^{-1}}}:\sqrt[3]{y^{2}\sqrt{x^{3}}}+\sqrt[6]{y}:y=\dfrac{2}{\sqrt[6]{y^{5}}}$

Výsledky

1. a) $t_1 = t_2 - \dfrac{Q}{mc}$ **b)** $b = \dfrac{af}{a-f}$ **c)** $a = \dfrac{zb-b}{z}$

2. a) $(x + 3y)^2$ **b)** $(1 - u^2v)(1 + u^2v)$ **c)** $(a + b + 4)(a - b - 4)$

d) $(x + 1)(x^2 + 1)$ **e)** $(2r - 1)(r - \sqrt{6})(r + \sqrt{6})$

f) $(a - 1)^2(a + 1)^2(a^2 + 1)$ **g)** $(t - 1)(t + 1)(t^2 - t + 1)$

h) $(x - 8)(x - 1)(x + 1)$ **i)** $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ **3. a)** $3a - 2$

b) $2a - 1$ **c)** $\dfrac{1}{2x+1}$

II. Nerovnice

1. Riešte v R:

$$|x-1|+|x-4| \leq |x-2|+|x-3|$$

2. Riešte v R:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4} > 0$$

3. Riešte v R:

$$|4x-x^2-3| \leq 3$$

4. Riešte v R:

$$\frac{(x+1)(x+4)}{(x+2)(x+3)} > 0$$

5. Riešte v R:

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)} > x$$

6. Riešte v R:

$$\sqrt{x+20} < x$$

7. Graficky znázornite riešenie sústavy nerovníc:

$$y \geq 0$$
$$x-y \geq 0$$
$$x+3y \leq 12$$

8. Graficky znázornite riešenie sústavy nerovníc:

$$x \leq 0$$
$$y \leq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 9$$

9. Riešte v R:

$\log_2 \log_3 \log_4 x > 0$

10. Riešte v R:

$\log_3 (3x+3) \geq \log_3 (2x^2+2x)$

Výsledky

1. $(-\infty; 1> \cup <4; \infty)$ **2.** $<-1; \infty)$ **3.** <0; 4>

4. $(-\infty; -4) \cup (-3; -2) \cup (-1; \infty)$ **5.** $(-3; \infty)$ **6.** $(5; \infty)$

7. trojuholník [0,0] ; [12,0] ; [3,3] **8.** štvrťkruh v 3.kvadrante S[0,0], r=3

9. $(64; \infty)$ **10.** $\left(0; \frac{3}{2}\right\rangle$

III. Rovnice

1. Riešte v R:

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{5}-1\right)\right]\right\}=\frac{14x}{28}+\frac{x+11}{16}$$

2. Riešte v R:

$$3x-\frac{2+\frac{3x}{5}}{3}=2(4-x)+\frac{1-\frac{4}{3}x}{5}$$

3. Riešte v R^+:

$$\frac{\sqrt{3}}{x}=\frac{1}{2}+\frac{x}{x+\sqrt{3}}$$

4. Riešte v R:

$$\sqrt{x\,.\,\sqrt{x^2+8}+4}-2=x$$

5. Riešte v Z:

$$3\ .\ \sqrt{\frac{x+7}{x-5}}+\sqrt{\frac{x-5}{x+7}}=\frac{13}{2}$$

6. Riešte v R:

$$|x-20|+|3x+15|=45$$

7. Riešte v RxR graficky:

$$x+y=2$$
$$x^2+y^2=4$$

8. Riešte v R^4:

$$2x + 3y - z = 7$$
$$-2x + 4y - 3{,}5z + t = -1$$
$$6x - 2y + \sqrt{2}\,z - 3t = 13$$
$$2x - 3y + z + t = 0$$

9. Riešte v R^2:

$$\log x + \log y = \log 10\,000$$
$$\log x - \log y = \log 4$$

10. Riešte v R:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2-7x} = \left(\frac{2}{5}\right)^{8-3x}$$

Výsledky

1. x = 155/13 **2.** x = 7/4 **3.** x = $\sqrt{3}$ **4.** x = 0; -1 **5.** x = 9 **6.** x = -10; 5

7. [0,2] ; [2,0] **8.** [2;1;0;-1] **9.** [200;50] **10.** x = 1

IV. Slovné úlohy

1. Obdĺžnik s rozmermi 72 cm a 48 cm treba rozdeliť na čo najmenší počet zhodných štvorcov. Určte rozmery strán zhodných štvorcov aj ich počet.

2. Orba osevnej plochy bola naplánovaná 9 traktormi po 15 hodín denne za 8 dní. Za koľko dní ukončí orbu rovnakým výkonom 12 traktorov po 18 hodín denne?

3 . Jeden robotník vyrobil za hodinu 15 súčiastok, druhý 12 a tretí 10. Koľko hodín pracoval každý z nich, keď spolu odpracovali 15 hodín a každý vyrobil rovnaký počet súčiastok?

4. Čerstvé huby obsahujú 90 % vody, sušené iba 12 % . Koľko čerstvých húb treba na 5 kg sušených ?

5. Koľko 20 % a 45 % kyseliny treba zmiešať, aby sme dostali 250 ml 35 % kyseliny?

6. Dvaja robotníci vykonajú určitú prácu spolu za 12 dní. Prvý by ju sám vykonal za 20 dní. Za koľko by túto prácu vykonal druhý robotník sám?

7. Dvaja bežci behajú po uzavretej dráhe dlhej 390 m. Ak po spoločnom štarte bežia opačnými smermi, stretnú sa za 30 sekúnd. Ak bežia rovnakým smerom, stretnú sa za 13 minút. Aká je ich priemerná rýchlosť v m/s pri rovnomernom pohybe?

8. Parník potrebuje na cestu 48 km proti prúdu a 48 km späť spolu 5 hodín. Akou rýchlosťou pôjde parník v kľudnej vode, ak rýchlosť

prúdu bola 4 km/h?

9. Koľko cm^3 96 % alkoholu je potrebné, aby sme vyrobili ¾ l 40 % alkoholu?

10. Kedy tvoria ručičky na hodinách medzi desiatou a jedenástou hodinou priamy uhol?
Kedy sa ručičky medzi desiatou a jedenástou hodinou prekrývajú?

Výsledky

1. 24 cm, 6 štvorcov **2.** 5 **3 .** 4, 5, 6 **4.** 44 kg **5.** 100 ml 20%, 150 ml 45% **6.** 30 **7.** 27/4 a 25/4 m/s **8.** 20 km/h **9.** 312,5 cm^3
10. 10 hod. 21 min. 49 sek. ; 10 hod. 54 min. 33 sek.

V. Postupnosti a rady

1. V aritmetickej postupnosti s diferenciou d = -12 určte $n \in N$, pre ktoré platí $a_n = 15$ a zároveň súčet prvých n členov je $s_n = 456$.

2. Koľko členov aritmetickej postupnosti treba sčítať, aby ich súčet dal 182, ak platí $a_1 + a_4 + a_6 = 71$ i $a_5 - a_2 - a_3 = 2$.

3. Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{2n-1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.

4. Určte s_{13} (súčet prvých trinástich členov) aritmetickej postupnosti, kde $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 90$.

5. Súčet tretieho a deviateho člena aritmetickej postupnosti sa rovná najmenšej hodnote trojčlena $2x^2 - 4x + 10$. Určte súčet prvých jedenásť členov tejto postupnosti.

6. V geometrickej postupnosti platí $a_2 - a_1 = 15$ a $a_3 - a_2 = 60$. Určte súčet prvých štyroch členov tejto postupnosti.

7. Medzi čísla 5 a 640 vložte toľko čísel, aby spolu s nimi vznikla geometrická postupnosť, v ktorej súčet vložených čísel je 630.

8. Aký je objem kvádra, ak jeho povrch sa rovná 78, súčet dĺžok strán z jedného vrcholu je 13 a tie dĺžky tvoria tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti?

9. Medzi čísla 3 a 18 vložte dve čísla tak, aby prvé tri členy tvorili geometrickú postupnosť a posledné tri aritmetickú postupnosť.

10. Štyri čísla sú za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti, ich dekadické logaritmy sú štyrmi za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti s diferenciou d = 1 a súčtom $s_4 = 22$. Ktoré sú to čísla?

11. V nekonečnom konvergentnom geometrickom rade je súčet prvých troch členov 19/18 a ich súčin 1/27. Určte súčet tohto radu.

12. Súčet nekonečného geometrického radu sa rovná 9 a súčet druhých mocnín jeho členov je 81/2. Určte tento geometrický rad.

13. Určte hodnotu výrazu:

$$x.\sqrt{x^3}.\sqrt[4]{x^3}.\sqrt[8]{x^3}\ \ldots$$

14. Vyriešte v R:

$$\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \ldots$$

Výsledky

1. n = 8 **2.** 7 **3.** a_1 = 1/3, d = 2/3 **4.** 195 **5.** 44 **6.** 425

7. 10,20,40,80,160,320 **8.** 27 **9.** [6, 12], [-9/2, 27/4]

10. 10^4, 10^5, 10^6, 10^7 **11.** 1 **12.** $a_1 = 6$, q=1/3 **13.** x^4 **14.** 4, -6

VI. Exponenciálne rovnice

1. Riešte rovnicu: $9.2^{x} = 3^{x+2} - 5.3^{x}$

2. Riešte rovnicu: $3^{3}.27^{2x-3} = 81^{3x-5}$

3. Riešte rovnicu: $3.3^{x} + 4.3^{x+1} + 5.3^{x+2} = 405.2^{x-1}$

4. Riešte rovnicu: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

5. Riešte rovnicu: $4^{\sqrt{x+1}} = 64.2^{\sqrt{x+1}}$

6. Riešte rovnicu: $0{,}25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+1}}$

7. Riešte rovnicu: $\sqrt[2x+3]{4^{3-x}} = 1024$

8. Riešte rovnicu: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} = 5^{x}$

9. Riešte rovnicu: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$

10. Riešte rovnicu: $3.16^{x} + 2.81^{x} = 5.36^{x}$

Výsledky

1. x= 2 **2.** x = 7/3 **3.** x = 3 **4.** x = 2 **5.** x = 35 **6.** x = 11/3

7. x = -12/11 **8.** $x = \frac{\log 9}{\log 27 - \log 5}$ **9.** x = 2 **10.** $x_1 = 0$ $x_2 = 1/2$

VII. Logaritmické rovnice

1. Riešte rovnicu: $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$

2. Riešte rovnicu: $x^{3+4\log x} = 10\,x^6$

3. Riešte rovnicu: $\log x + \dfrac{1}{\log x} = 2$

4. Riešte rovnicu: $\log\sqrt{3x-2} + \log\sqrt{4x-7} = \log 13$

5. Riešte rovnicu: $\log_3 \log_8 \log_2 (x+9) = \log_3 2 - 1$

6. Riešte rovnicu: $\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{1/3} x = 6$

7. Riešte rovnicu: $\dfrac{\log(2x+10)}{2} = \log(x+1)$

8. Riešte rovnicu: $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$

9. Riešte rovnicu: $\log x + \dfrac{1}{2}\log x + \dfrac{1}{4}\log x + \ldots = 2$

10. Riešte rovnicu: $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

Výsledky

1. $x_1 = 10$; $x_2 = 1/10$; $x_3 = 1$ **2.** $x_1 = 10$; $x_2 = 1/\sqrt[4]{10}$ **3.** $x = 10$ **4.** $x=5$
5. $x = 7$ **6.** $x = 9$ **7.** $x = 3$ **8.** $x = 3$ **9.** $\mathbf{x} = 10$ **10.** $x = 16$

VIII. Vektorová algebra a analytická geometria lineárnych útvarov

1. Dané sú vektory $\vec{a}[2,3,-1]$, $\vec{b}[1,-2,3]$, $\vec{c}[2,-1,1]$. Určte súradnice vektora $\vec{x}$, ktorý je kolmý na vektor $\vec{a}$ aj $\vec{b}$ a súčasne $\vec{x}.\vec{c} = -6$.

2. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je určená parametricky:

   x = 1 – t + 3s

   y = 7 + 2t – s

   z = -3 – t + s; t, s $\in R$

3. Zistite, či body $M[2,2,-2]$, $N[1,1,4]$, $P[0,2,0]$, $Q[3,1,2]$ ležia v jednej rovine.

4. Daný je bod $H[2,3,5]$ a priamka p = $\{[1+t;-3-3t;2-2t], t \in R\}$. Určte súradnice bodu P, ktorý je pätou kolmice zostrojenej z bodu H na priamku p.

5. Dané sú body $A[3,1,-2]$, $B[-1,1,-2]$, $C[1,6,10]$, $D[3,4,-2]$. Vypočítajte objem štvorstena ABCD.

6. Určte vzájomnú polohu priamky p a roviny ρ.

p: x = 2 – t	ρ: x = 1 + 4r - s
y = 1 + 2t	y = 2r - s
z= 3 + t, t$\in R$	z = 1 – 3r + s; r,s $\in R$

7. Daná je priamka p a bod $E[4,-2,5]$. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom E a je kolmá na priamku p.

p: x = 3 – t

y = 2 – 4t

z = -1 + 3t; t∈ R

8. Určte vzájomnú polohu roviny 2x + y + z + 8 = 0 a priamky $\overleftrightarrow{PQ}$, kde $P[0,-2,0]$, $Q[1,0,2]$. Ak sú rôznobežné, určte súradnice ich priesečníka R.

9. Daný je pravidelný štvorboký ihlan ABCDV, ktorého hrana podstavy má dĺžku a = 6 a výška je v = $3.\sqrt{2}$. Dokážte, že priamky $\overleftrightarrow{AV}$ a $\overleftrightarrow{CV}$ sú na seba kolmé.

10. Vypočítajte veľkosť strán a vnútorných uhlov trojuholníka ABC. $A[-1,-3,0]$, $B[-1,2,5]$, $C[-6,2,5]$.

Výsledky

1. $[\vec{x}[-3;3;3]\ ]$ **2.** $[x-2y-5z-2=0]$ **3.** áno

4. $\left[P\left[-\frac{9}{14},\frac{27}{14},\frac{74}{14}\right]\right]$ **5.** $[V=24j^3]$

6. $[\text{ich prienikom je bod } \mathrm{R}[4,-3,1]]$

7. $[x+4y-3z+19=0]$ **8.** $[R[-1,-4,-2]]$

9. využite skalárny súčin vektorov **AV, CV**

10. $\begin{bmatrix} |AB|=5\sqrt{2}, \alpha=35°16' \\ |AC|=5.\sqrt{3}, \beta=90° \\ |BC|=5, \gamma=54°44' \end{bmatrix}$

IX. Planimetria

1. Vypočítajte vnútorné uhly trojuholníka, ktorého vrcholy sú body označujúce číslice: 4, 7, 11 na číselníku hodín.

2. Z dvoch podobných trojuholníkov má jeden obvod 100 cm, druhý má strany postupne dlhšie o 10, 12, 18 cm. Vypočítajte dĺžky strán obidvoch trojuholníkov.

3. Zostrojte úsečku dĺžky x = $\sqrt{15}$.

4. Bodom N vo vnútri konvexného uhla veďte priamku tak, aby na ramenách vyťala úseky, ktorých dĺžky sú v pomere 3:4.

5. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáme r (polomer opísanej kružnice hľadaného trojuholníka) a výšku v_a a stranu c.

6. Vo vnútri Δ ABC je daný ľubovoľný bod M. Dokážte, že pre veľkosti uhlov AMB, ACB platí: $|AMB| > |ACB|$.

7. Je daná kružnica k (S; 2 cm). Ďalej je daný bod A tak, že $|AS| = 6$ cm. Zostrojte rovnoramenný trojuholník so základňou AB, ktorému je kružnica k vpísaná.

8. Zostrojte kružnicu, ktorá prechádza daným bodom M a dotýka sa dvoch rôznobežných priamok.

9. Zostrojte lichobežník, ak sú dané obe jeho základne i ramená.

10. Zostrojte rovnobežník, ak sú dané jeho uhlopriečky.

Výsledky

1. Úlohu riešime pomocou vzťahu obvodového a príslušného stredového uhla. Výsledok: 45°, 60°, 75°. **2.** Najskôr vypočítame koeficient podobnosti trojuholníkov z obvodov obidvoch trojuholníkov pomocou ktorého vypočítame strany prvého trojuholníka a následne druhého. Výsledok: prvý trojuholník má strany 25, 30, 45 cm; druhý trojuholník má strany 35, 42, 63 cm. **3.** Pomocou Euklidovej vety o výške pravouhlého trojuholníka. Platí: 15 = 5 . 3. Zostrojíme preponu: $c = AB + BC = 3 + 5$. Opíšeme nad preponou c Talesovu polkružnicu a výška vztýčená v bode B je hľadaná dĺžka X. **4.** Pomocou rovnoľahlosti so stredom vo vrchole konvexného uhla. **5.** Narysujeme stranu c = AB, nájdeme stred opísanej kružnice k. Z bodu A narysujeme kružnicu o polomere v_a, ku ktorej z bodu B zostrojíme dotyčnicu. C je priesečník opísanej kružnice a dotyčnice. **6.** Zostrojíme bodmi C, M priamku. Potom využijeme vzťahy medzi vonkajšími a vnútornými uhlami trojuholníka. **7.** Z bodu A zostrojíme dotyčnicu ku kružnici k. Takéto dotyčnice existujú dve. Označme dotykový bod T_1 na strane AB a na strane AC písmenom T_2. Vzhľadom na súmernosť rovnoramenného trojuholníka nanesieme na dotyčnici na strane AB vzdialenosť $T_1B = AT_1$. Ďalší postup je už zrejmý. **8.** Využijeme rovnoľahlosť medzi ľubovoľnou kružnicou a kružnicou prechádzajúcou bodom M. Stred rovnoľahlosti je priesečník daných rôznobežiek. **9.** Riešenie nám napovie, ak zostrojíme trojuholník z rozdielu základné a obidvoch ramien. **10.** Uhlopriečky sa rozpoľujú. Úloha má nekonečne veľa riešení.

X. Goniometria

1. Vyjadrite veľkosť uhlov v oblúkovej miere (ako racionálne násobky čísla π):
   55°, 354°, 517°.

2. Vyjadrite veľkosť uhlov v stupňoch: $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{\pi}{12}$.

3. Bez použitia uhlomeru zostrojte uhol α , ak

   a) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ b) cos α = 0,4 c) $tg\alpha = \frac{7}{5}$.

4. Vypočítajte (bez tabuliek a kalkulačky) hodnotu súčinu

   $s = \mathrm{tg}\left(\frac{22}{3}\pi\right).\cot\mathrm{g}\left(-\frac{2}{3}\pi\right).\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right).\sin\left(\frac{11}{4}\pi\right)$.

5. Určte (bez tabuliek a kalkulačky) hodnoty cos x, tg x a cotg x, ak sin x = 0,6
   a $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

6. Určte (bez tabuliek a kalkulačky) hodnotu sin 2x, ak $\sin x = -\frac{2}{3}$
   a $x \in \left(\frac{3}{2}\pi;2\pi\right)$.

7. V intervale $\left\langle -\pi;2\pi \right\rangle$ načrtnite grafy funkcií:

   a) $f = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f = 2.\sin|x|$.

8. Ukážte, že pre každé $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, platí $\mathrm{tg}\ x = \cot\mathrm{g}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

9. Vyriešte v R: a) $\cos x - \sqrt{3}.\sin x = 0$ b) $\mathrm{tg}\ x + \cot\mathrm{g}\ x = 2$.

10. Vyriešte v R: $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} \leq 0$.

Výsledky

1. $\dfrac{11}{36}\pi$, $\dfrac{59}{30}\pi$, $\dfrac{517}{180}\pi$ **2.** 210°, 15° **3.** Využiť definíciu goniometrickej funkcie a konštrukciu pravouhlého trojuholníka. **4.** - $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

5. $-\dfrac{4}{5}$, $-\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{4}{3}$ **6.** $-\dfrac{4}{9}\sqrt{5}$

9. a) $\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{k}\pi \wedge \quad k \in Z$; **b)** $\bigcup_{\mathrm{k}\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{k}\pi\right\}$

10. $\langle (2k+1)\pi ; (k+1)2\pi \rangle \ \wedge\ \mathrm{k} \in Z$

7.

XI. Trigonometria

1. Vypočítajte strany pravouhlého trojuholníka, ak prepona má dĺžku 5 cm a polomer vpísanej kružnice má veľkosť 1 cm.

2. Vypočítajte obsah obdĺžnika ABCD, ak jeho uhlopriečka má veľkosť 8 cm a uhol medzi uhlopriečkami je 45°.

3. Riešte Δ ABC, v ktorom $\alpha = 113°$, β = 48°a polomer kružnice trojuholníku opísanej je r = 10 cm.

4. Riešte Δ ABC, v ktorom: S = 2423, a = 42,5 a β = 124°38′ .

5. V trojuholníku ABC je uhol oproti strane a = $\sqrt{2}$ dvojnásobkom uhla oproti strane b = 1. Vypočítajte obvod trojuholníka ABC.

6. Rovnobežník ABCD má obsah 40 cm^2, $|AB| = 8{,}5$ cm a $|BC|$ = 5,65 cm. Vypočítajte veľkosti jeho uhlopriečok.

7. Vrchol stožiara vidíme vo výškovom uhle α = 45°. Ak sa priblížime k stožiaru o 10 m vidíme vrchol pod uhlom β = 60°. Aká je výška stožiara?

8. Určte veľkosti strán pravouhlého trojuholníka, keď polomer kružnice opísanej je r = 2,5 cm a obvod trojuholníka je 12 cm.

9. Určte strany a uhly pravouhlého trojuholníka, ak polomer opísanej kružnice r = 5 cm a polomer vpísanej kružnice ρ = 2 cm.

10. Na hmotný bod pôsobia dve sily F_1 = 85 N a F_2 = 48 N, ktorých vektory zvierajú uhol 57°. Aká veľká je výslednica týchto síl a aký uhol zviera jej vektor s vektorom sily F_1?

Výsledky

1. odvesny majú dĺžku 3 a 4 **2.** S = 16 . $\sqrt{2}$ **3.** a = 18,41 ; b = 14,86 ; c = 6,51 ; γ = 19° **4.** c = 138,5 ; b = 166,37 ; α = 12°8′ ; γ = 43°14′

5. $o = 2 + \sqrt{2}$ **6.** e = 7 cm, f = 12,6 cm **7.** v = 23,65 m **8.** {3,4,5}

9. strany 8,6,10 cm; uhly 34°, 53°, 90° **10.** F = 118 N ; φ = 20°

Ukážky prijímacích testov z roku 1999

Učiteľstvo pre 1. – 4. ročník ZŠ

I.

1. O 8^{00} vyštartuje z mesta A do mesta B chodec rýchlosťou v =5 km/h. O 9^{00} vyštartuje z mesta B do mesta A auto rýchlosťou v = 60 km/h. O 10^{00} sa stretnú. Zistite kedy príde auto do mesta A.

2. Riešte v R^+ $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2+x} + 4 = 0$

3. Vypočítajte obsah pravouhlého trojuholníka ABC (s pravým uhlom pri vrchole C), ak poznáte výšku na stranu AB v_c = CX = 4cm, kde X je päta výšky v_c a ak viete, že XB = 3cm.

4. Nech strany kvádra sú v pomere a:b:c = 2:3:4 a pomer povrchu kvádra P k objemu kvádra V je P:V = 13:18. Vypočítajte rozmery kvádra.

5. Riešte v R $\frac{3}{2x+1} < -1$

Výsledky:

1. o 10.10 hod. **2.** $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x = 1/4$ **3.** 16,66 **4.** 6, 9, 12 cm
5. $x \neq -1/2$, $(-2, -1/2)$

II.

1. O 8^{00} vyštartoval z mesta A do mesta B cyklista rýchlosťou v = 15 km/h. O 9^{15} vyštartovalo z mesta A do mesta B auto rýchlosťou w = 60 km/h. Kedy príde do cieľa (do mesta B) cyklista, ak auto príde do mesta B o 10^{45} ?

2. Riešte v R^+ $\quad x - \dfrac{6}{x+1} = 0$

3. Vypočítajte obsah rovnoramenného trojuholníka ABC, ak poznáte dĺžky ťažníc t_a= t_b= 7,5cm, t_c= 9cm (prepona je AB) .

4. Vypočítajte polomer rotačného kužeľa, ak viete, že jeho výška v = 6cm a pomer plášťa Q k objemu kužeľa V je Q:V = 5:8.

5. Riešte v R^- $\quad \dfrac{2}{3x-1} > 1$

Výsledky:

1. o 14.00 hod. **2.** 2 **3.** 36 cm^2 **4.** r = 8 cm **5.** Ø

III.

1. Vypočítajte, aký čas trvala cesta cyklistovi z mesta A do mesta B a späť, ak viete, že vzdialenosť miest A a B je 20 km a že z B do A išiel o 1km/hod rýchlejšie ako z A do B, pričom cestu z B do A prešiel o 1 hodinu skôr ako z A do B.

2. Riešte v R $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{5}{2}$

3. Vypočítajte dĺžku strany kosoštvorca, ak dĺžky jeho uhlopriečok u_1 a u_2 sú 8cm a 6cm.

4. Vypočítajte dĺžky strán kvádra ABCD $A'B'C'D'$, ak poznáte obsahy jeho rezov BC $A'D'$= 20cm^2, AC $A'C'$ = 20cm^2 a obsah podstavy ABCD = 12cm^2.

5. Riešte v R $\frac{6}{x+8}<1$

Výsledky:

1. 9 hodín **2.** x = 2, x = 1/5 **3.** 5 cm **4.** a = 3, b = 4, c = 4

5. $(-\infty,-8)\cup(-2,\infty)$

IV.

1. Vzdialenosť medzi mestami A a B je 100 km. Auto prešlo z mesta A do B rýchlosťou v_1 a z mesta B do A rýchlosťou v_2. Vypočítajte rýchlosť auta z mesta B do mesta A, ak viete, že cesta z A do B a späť trvala 2 hodiny a 55 minút a že rýchlosť z A do B bola 60 km/h.

2. Riešte rovnicu $\sqrt{3(x-1)}+x=1$

3. V kružnici s priemerom d =10 cm je daná tetiva, ktorej vzdialenosť od stredu S kružnice je 3 cm. Vypočítajte dĺžku tetivy.

4. Nádoba objemu 6.π litra má tvar rotačného valca. Jej priemer je 3x menší ako jej výška. Určte rozmery nádoby.

5. Riešte v R $\frac{2x+2}{x+3} \le 1$

Výsledky:

1. $v_2 = 80$ km/h **2.** x = 1 **3.** 8 cm **4.** r = 1, v = 6

5. $(-\infty,-8)\cup(-2,\infty)$

V.

1. Riešte v R $\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+10}=1$

2. Z mesta A vyštartuje o 8^{15} chodec do mesta B rýchlosťou 5 km/h. Zároveň vyštartuje z mesta B do mesta A cyklista rýchlosťou 15 km/h. Vzdialenosť miest A, B je 100 km. V akej vzdialenosti od mesta A sa stretnú?

3. V pravouhlom trojuholníku ABC (s pravým uhlom pri vrchole C) je dĺžka odvesien a=6cm, b=8cm. Vypočítajte dĺžku ťažnice t_c z vrcholu C na stranu AB.

4. Vypočítajte povrch kvádra, ak poznáte rozmery jeho podstavy a=9cm, b=12cm a dĺžku jeho telesovej uhlopriečky u=20cm.

5. Riešte v R $\frac{1}{2x+3}>1$

Výsledky:

1. x_1 = -6, x_2 = 5 **2.** 25 km **3.** 5 cm **4.** $216+210\sqrt{7}$ cm^3

5. (- 3/2, -1)

VI.

1. Riešte v R $\frac{3}{3-x}+\frac{8}{22+x}=1$

2. Z mesta A vyštartuje o 9^{00} cyklista do mesta B rýchlosťou 10 km/h. Zároveň vyštartuje z mesta B do mesta A iný cyklista rýchlosťou 30 km/h. Stretnú sa vo vzdialenosti 50 km od mesta A. Určte vzdialenosť miest A, B.

3. V pravouhlom trojuholníku ABC (s pravým uhlom pri vrchole C) je dĺžka odvesny b=8cm a dĺžka ťažnice na stranu AB t_c=5cm. Vypočítajte obsah trojuholníka ABC.

4. Vypočítajte dĺžku telesovej uhlopriečky AC' kvádra ABCD$A'B'C'D'$, ak poznáte rozmery jeho podstavy a=9cm, b=12cm a ak viete, že objem kvádra je 2160 cm^3.

5. Riešte v R $\frac{1}{3x-5}<1$

Výsledky:

1. $x_1 = -2$, $x_2 = -12$ **2.** 200 km **3.** 24 cm^2 **4.** 25 cm

5. $(-\infty,5/3)\cup(2,\infty)$

VII.

1. Riešte v R $\frac{7}{x+2}+\frac{3}{x-22}=1$

2. Z mesta A vyštartuje o 11^{00} auto do mesta B rýchlosťou v. Zároveň vyštartuje z mesta B do mesta A iné auto trojnásobnou rýchlosťou. Stretnú sa vo vzdialenosti 30 km od mesta A. Určte vzdialenosť miest A, B.

3. V pravouhlom trojuholníku ABC (s pravým uhlom pri vrchole C) je daná veľkosť odvesny AC=b=6cm a dĺžka ťažnice na stranu AB t_c=5cm. Určte dĺžku prepony AB.

4. Vypočítajte objem kvádra, ak poznáte dĺžku jeho telesovej uhlopriečky u=25 cm a ak viete, že rozmery jeho podstavy sú a=9cm, b=12cm.

5. Riešte v R $\frac{1}{2-3x}>1$

Výsledky:

1. $x_1 = 4$, $x_2 = 26$ **2.** 120 km **3.** 10 cm **4.** 2160 cm^3 **5.** (1/3; 2/3)

Učiteľstvo pre 5. – 9. ročník ZŠ

(v kombinácie s matematikou)

VIII.

1. Riešte v R $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$

2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A=(1,2) a je kolmá na priamku $2x-3y+5 = 0$.

3. Pre členy aritmetickej postupnosti platí: $a_1.a_3 = 12$, $a_2/a_4 = 1/2$, $a_1>0$. Vypočítajte $s = a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}$.

4. Obdĺžnik ABCD má strany a = 4cm, b = 2cm. Vypočítajte obsah trojuholníka BXY, ak X je stred AC, Y je stred CX.

5. Prvý robotník vykope výkop za 4 hodiny, druhý robotník za 6 hodín. Za aký čas vykopú výkop spoločne?

Výsledky:

1. $(\pi/2 + k.\pi) \cup (-\pi/4 + k.\pi), k \in Z$ **2.** $3x + 2y - 7 = 0$ **3.** 72

4. 1 cm^3 **5.** 2,4 hod.

IX.

1. Riešte v R $\log^2 x - \log x - 2 = 0$

2. Napíšte rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi B = (1,1,2), C = (2,1,3) a je kolmá na rovinu $\rho: x+y+z-1 = 0$.

3. Pre členy geometrickej postupnosti platí: $a_1 . a_4 = -2$, $a_2 + a_3 = -1$, $|q| > 1$. Vypočítajte a_{1999}.

4. Je daný obdĺžnik ABCD so stranami a = 4cm, b = 2cm. Vypočítajte obsah trojuholníka DXY, ak X je stred strany AB a Y je stred strany BC.

5. Jeden cyklista prejde vzdialenosť z mesta A do mesta B za 12 hodín, druhý za 8 hodín. Vypočítajte, kedy sa stretnú, ak prvý cyklista vyrazí o 8^{00} z mesta A do mesta B a druhý o 8^{00} z mesta B do mesta A.

Výsledky:

1. $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}1$ **2.** $x - z + 1 = 0$ **3.** $\left((-2)^{1999} - 1\right)/6$

4. 3 cm^2 **5.** o 12 hod. 48 min.

X.

1. Riešte v R $\quad 4.9^x + 12^x - 3.16^x = 0$

2. Napíšte rovnicu priamky kolmej na rovinu 2x-3y+4z+5=0 a prechádzajúcu bodom B=(1,2,3).

3. Pre aritmetickú postupnosť platí: $s_{10} = 1$, $s_{20} = 52$. Vypočítajte prvý člen a_1 a diferenciu d.

4. Je daný obdĺžnik ABCD so stranami a = 3cm, b = 2cm. Označme S priesečník uhlopriečok AC,BD, X stred AB, R stred BC, Z stred SR. Vypočítajte vzdialenosť bodu S od priamky XZ.

5. Bazén možno napustiť pomocou dvoch čerpadiel. Len prvým čerpadlom sa bazén napustí za 5 hodín, len druhým čerpadlom za 15 hodín. O 5^{00} sme začali napúšťať bazén pomocou druhého čerpadla. O 8^{00} sme zapli aj prvé, takže odvtedy sa bazén napúšťal oboma čerpadlami. Kedy bude bazén plný?

Výsledky:

1. x = 1 **2.** $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 + 4t, t \in R$ **3.** a_1 = - 2,15; d = 0,5

4. 0,6 cm **5.** o 11.00 hod.

XI.

1. Riešte rovnicu $4^x + 2^x - 2 = 0$

2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A = (1,2,3) a je rovnobežná s priesečnicou rovín α: x+2y+3z-1 = 0, β: 3x+2y+z+1 = 0.

3. Pre geometrickú postupnosť platí: $s_3 = 4$, $s_6 = 36$. Vypočítajte prvý člen a_1 a kvocient q, ak viete, že je rôzne od 1.

4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC (s pravým uhlom pri vrchole C). Označme X pätu výšky na stranu c, Y pätu výšky z X na AC. Vypočítajte polomer kružnice opísanej trojuholníku AXY, ak viete, že b = 3cm, c = 5cm.

5. Prvý robotník vykope výkop za štyri hodiny, spolu s druhým ho vykopú za 2 hodiny a 24 minút. Za aký čas by výkop vykopal druhý robotník, ak by kopal sám?

Výsledky:

1. x = 0 **2.** $x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = 3 + t, t \in R$ **3.** $a_1 = 4/7$, q = 2

4. 0,9 cm **5.** 6 hod.

XII.

1. Riešte v R: $4 \sin^2 x + 7 \cos 2x = 2$

2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom priamky p: $3x + y + 10 = 0$ s priamkou q: $7x - y - 5 = 0$ a je rovnobežná s priamkou r: $x - 7 = 0$.

3. Určte súčet prvých 75 členov aritmetickej postupnosti, ak viete, že súčet prvých 27 členov tejto postupnosti je 540 a platí: $a_{15} - a_7 = 12$.

4. Určte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou rovnostranného trojuholníka ABC so stranou dĺžky 1 cm okolo jeho výšky na stranu c.

5. Dvaja murári omietli spolu budovu za 72 dní. Ako dlho by to trvalo prvému murárovi, keby pracoval sám, ak viete, že druhý by ju sám omietol za 180 dní.

Výsledky:

1. $(-\pi/4 + k\pi) \cup (\pi/4 + k\pi), k \in Z$ **2.** $2x + 1 = 0$ **3.** 4200

4. $\pi.\sqrt{3}/24$ cm^3 **5.** 120 dní

XIII.

1. Riešte v R:

$$\sqrt{2x+5}+1-2x=0$$

2. Zostrojte priamku p, ktorá prechádza bodom B = (3,-1) a je kolmá na priamku q, ktorá prechádza bodmi A = (1,1) a C = (2,3).

3. Pre členy aritmetickej postupnosti platí:

$$a_2 . a_4 = -1$$
$$a_2 - a_4 = -2$$

Určte súčet prvých tridsať členov tejto postupnosti.

4. Daný je obdĺžnik ABCD, v ktorom AB = a = 2 cm, BC = b = 3 cm. Označme S stred strany BC. Vypočítajte výsku v na stranu AS v trojuholníku ABS.

5. Prvý robotník vykoná danú prácu za 12 dní, druhý robotník vykoná tú istú prácu za 4 dni. Za aký čas vykonajú danú prácu obaja robotníci spoločne?

Výsledky:

1. $x_1 = 2, x_2 = - 1/2$ **2.** x + 2y – 1 = 0 **3.** 375 **4.** 1,2 cm **5.** 3 dni