<u>Vzájemná poloha dvou přímek v rovině</u>

Z planimetrie víme, že přímky v rovině mohou být:

1. rovnoběžné různé - nemají společný žádný bod
2. rovnoběžné splývající - mají společné všechny body
3. různoběžné - mají společný jeden bod, který se nazývá průsečík

Máme-li zadané dvě přímky pomocí jejich rovnic, k určení jejich vzájemné polohy je třeba vyřešit soustavu rovnic, která je tvořena dvěma zadanými rovnicemi přímek. Na základě počtu řešení této soustavy, je možné určit vzájemnou polohu zadaných přímek. Počet řešení dané soustavy, odpovídá počtu bodů, které mají dané přímky společné.

<u>a) dvě přímky vyjádřené v parametrickém tvaru</u>

Nechť jsou dány přímky

p: $x = x_A + tu_x$ $\qquad$ q: $x = x_B + sv_x$

$y = y_A + tu_y;\ t \in R$ $\qquad$ $y = y_B + sv_y;\ s \in R$.

Určit jejich vzájemnou polohu nyní znamená určit vlastně parametr t. Toto je možné provést pomocí metody porovnávací, tedy:

$x_A + tu_x = x_B + sv_x$

$y_A + tu_y = y_B + sv_y$

Počet řešení této soustavy rovnic určuje pak počet společných bodů, které přímky mají a tím i jejich polohu. Souřadnice průsečíku v případě různoběžných přímek lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p resp. dosazením parametru s do parametrického vyjádření přímky q.

<u>Geometrická interpretace:</u>

1. přímky jsou rovnoběžné různé - vektory $(u_x; u_y)$ a $(v_x; v_y)$ jsou rovnoběžné
2. přímky splývají - vektory $(u_x; u_y)$ a $(v_x; v_y)$ jsou rovnoběžné a navíc bod $[x_A; y_A]$ leží na přímce q, resp. bod $[x_B; y_B]$ leží na přímce p
3. přímky jsou různoběžné - vektory $(u_x; u_y)$ a $(v_x; v_y)$ jsou různoběžné

<u>Příklady:</u>

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p a q:

1. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t;\ t \in R$ a q: $x = 1 - 2s$, $y = -1 + 6s;\ s \in R$,
2. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t;\ t \in R$ a q: $x = -1 + \frac{3}{2}s$, $y = 13 - \frac{9}{2}s;\ s \in R$,
3. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t;\ t \in R$ a q: $x = -3s$, $y = 5 - 2s;\ s \in R$.

<u>b) jedna přímka daná parametricky, druhá přímka daná obecně</u>

Nechť jsou dány přímky

p: $x = x_A + tu_x$ $\qquad$ q: $ax + by + c = 0$

$y = y_A + tu_y;\ t \in R$

Určit vzájemnou polohu těchto přímek je možné pomocí dosazovací metody: parametrické vyjádření x a y dosadíme do obecné rovnice druhé přímky:

$a(x_A + tu_x) + b(y_A + tu_y) + c = 0$, čímž dostáváme jednu rovnici pro jednu neznámou - pro t. Počet kořenů této rovnice určí i počet společných bodů daných dvou přímek a tím i jejich polohu. Souřadnice průsečíku v případě různoběžných přímek lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p.

<u>Geometrická interpretace:</u>

1. přímky jsou rovnoběžné různé - vektory $(u_x; u_y)$ a $(a; b)$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový
2. přímky splývají - vektory $(u_x; u_y)$ a $(a; b)$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový, a bod $[x_A; y_A]$ leží na přímce q
3. přímky jsou různoběžné - vektory $(u_x; u_y)$ a $(a; b)$ nejsou kolmé, tj. jejich skalární součin není nulový

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p a q:

1. p: $x = 1 - 2t$, $y = -3 + 3t; t \in R$ a q: $3x - 2y + 1 = 0$,
2. p: $x = 1 - 2t$, $y = -3 + 3t; t \in R$ a q: $3x - 2y - 9 = 0$,
3. p: $x = 1 - 2t$, $y = -3 + t; t \in R$ a q: $3x - 2y - 9 = 0$.

c) obě přímky dané obecně

Nechť jsou dány přímky

p: $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ $\qquad$ q: $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

Určit vzájemnou polohu daných přímek je možné řešením soustavy daných dvou rovnic o dvou neznámých - x a y, tedy souřadnicích možného průsečíku. Počet řešení této soustavy rovnic určuje pak počet společných bodů, které přímky mají a tím i jejich polohu.

Geometrická interpretace:

1. přímky jsou rovnoběžné různé - normálové vektory $(a_1; b_1)$ a $(a_2; b_2)$ jsou rovnoběžné, tj. platí $(a_1; b_1) = k(a_2; b_2)$, kde $k \in R$, a navíc $c_1 \neq kc_2$
2. přímky splývají - normálové vektory $(a_1; b_1)$ a $(a_2; b_2)$ jsou rovnoběžné, tj. platí $(a_1; b_1) = k(a_2; b_2)$, kde $k \in R$, a navíc $c_1 = kc_2$ (první rovnice je k-násobkem druhé)
3. přímky jsou různoběžné - vektory $(a_1; b_1)$ a $(a_2; b_2)$ jsou různoběžné

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p a q:

1. p: $2x - 5y + 2 = 0$ a q: $4x - 10y + 1 = 0$,
2. p: $2x - 5y + 2 = 0$ a q: $-6x + 15y - 6 = 0$,
3. p: $2x - 5y + 2 = 0$ a q: $4x + 10y - 3 = 0$.