FEK–5.1 Je dán výraz $\dfrac{2u+4}{u+1}+\dfrac{3u-2}{2-2u}-\dfrac{2u^2+1}{2u^2-2}$

a) Určete hodnotu tohoto výrazu pro $u=3$. [2 b.]

b) Upravte a zjednodušte tento výraz. [2 b.]

c) Napište, pro které hodnoty $u \in \mathbb{R}$ má výraz smysl. [2 b.]

Řešení:

a) $\dfrac{10}{4}+\dfrac{7}{-4}-\dfrac{19}{16}=-\dfrac{7}{16}$

b) $\dfrac{(2u+4)(2u-2)-(3u-2)(u+1)-2u^2-1}{2(u^2-1)}=$

$=\dfrac{4u^2+4u-8-3u^2-u+2-2u^2-1}{2(u^2-1)}=$

$=\dfrac{-u^2+3u-7}{2(u^2-1)}$

c) $u \neq \pm 1$

FEK–5.2 Je dána rovnice $\log_5(3x-1)=3$.

a) Stanovte definiční obor této rovnice. [2 b.]

b) Řešte danou rovnici v $\mathbb{R}$. [2 b.]

Řešení

a) $x > \dfrac{1}{3}$

b)

$$\begin{aligned} 3x-1 &= 5^3 \\ 3x &= 126 \\ x &= 42 > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Závěr: Rovnice má řešení $x = 42$.

FEK–5.3 Je dána rovnice $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2x-1}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$.

a) Určete definiční obor této rovnice. [2 b.]

b) Řešte v $\mathbb{R}$ danou rovnici. [4 b.]

c) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení

a) $x \neq -1, x \neq -2$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3x+3-2x^2-3x+2}{(x+2)(x+1)} &= \frac{2x+1}{(x+2)(x+1)} \\ -2x^2+5 &= 2x+1 \\ 2x^2+2x-4 &= 0 \\ x^2+x-2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x_1 = -2 & \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

c) $L(-2)$ není def. $\Rightarrow$ -2 není řešení

$L(1) = \dfrac{3}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$P(1) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 1 je řešení

FEK–5.4

a) Pro která $x \in \mathbf{R}$ je $\left(\frac{16}{24}\right)^{x+1} < 1$? [2 b.]

b) Nakreslete graf funkce $y = k^x$, kde k je konstanta. [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{16}{24}\right)^{x+1} &< 1 \\
\left(\frac{16}{24}\right)^{x+1} &< \left(\frac{16}{24}\right)^{0} \\
x+1 &> 0 \\
x &> -1
\end{aligned}$$

b) Graf jsou exponenciely, procházejí bodem $[0, 1]$, pro $k > 1$ rostoucí, pro $k < 0$ klesající.

FEK–5.5 Je dána funkce $y = f(x)$, kde $f(x) = -x^2 + 2$.

a) Nakreslete graf funkce f pro $x \in \langle -2, 2\rangle$. [2 b.]

b) Nakreslete graf funkce $y = |f(x)|$ pro $x \in \langle -2, 2\rangle$. [4 b.]

c) Určete definiční obor $\mathrm{D}(g)$ funkce $y = g(x)$, kde $g(x) = \sqrt{-x^2 + 2}$. [2 b.]

Řešení:

a) Parabola, $V = [0, 2]$
$f(-2) = f(2) = -2,\ f(0) = 2,\ f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$

b)
1. $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   $y = x^2 - 2 \ \Rightarrow$ parabola, otočená nahoru, vrchol $V = [0, -2]$
2. $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
   $y = -x^2 + 2 \ \Rightarrow$ parabola, otočená dolů, vrchol $V = [0, 2]$,

c) $-x^2 + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad D(g) =< -\sqrt{2}, \sqrt{2} >$

FEK–5.6 V aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 0,5$ je $a_4 = 1$. Vypočtěte první a devátý člen této posloupnosti. [4 b.]

Řešení

$a_1 = a_4 - 3d = 1 - 1,5 = -0,5$

$a_9 = a_4 + 5d = 1 + 2,5 = 3,5$

FEK–5.7 Pro které hodnoty parametrů $p, q, r \in R$ jsou rovnice $2px - 3qy + 4r = 0$, $(1-3p)x + (2q+1)y - r = 0$ obecnými rovnicemi téže přímky? [6 b.]

Řešení

a) $r \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{2p}{1-3p} &= k \\ \frac{-3q}{2q+1} &= k \\ \frac{4r}{-r} &= k \ \Rightarrow \ k = -4 \ (r \neq 0) \end{aligned}$$

$$\frac{2p}{1-3p} = -4 \ \Rightarrow \ 10p = 4 \ \Rightarrow \ p = \frac{2}{5}$$
$$\frac{-3q}{2q+1} = -4 \ \Rightarrow \ 5q = -4 \ \Rightarrow \ q = -\frac{4}{5}$$

b) Pro $r = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2p}{1-3p} &= \frac{-3q}{2q+1} \\ 4pq + 2p &= -3q + 9pq \\ -5pq + 2p + 3q &= 0 \end{aligned}$$

Např. pro

$$\begin{aligned} 2p &= 1 - 3p & &\Rightarrow \ p = \frac{1}{5} \\ -3q &= 2q + 1 & &\Rightarrow \ q = -\frac{1}{5} \\ 4r &= -r & &\Rightarrow \ r = 0 \end{aligned}$$