

FEK-4.1 Je dán výraz $\frac{3x+2}{x-3} - \frac{x-5}{6-2x} - \frac{x^2+3}{2x^2-18}$

a) Určete hodnotu tohoto výrazu pro $x = 2$. [2 b.]

b) Upravte tento výraz. [2 b.]

c) Napište, pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ má výraz smysl. [2 b.]

Řešení

a) $\frac{8}{-1} - \frac{-3}{2} - \frac{7}{-10} = -\frac{29}{5}$

b)
$$\begin{aligned} & \frac{(2x+6)(3x+2) + (x+3)(x-5) - x^2 - 3}{2(x^2-9)} = \\ & = \frac{6x^2 + 22x + 12 + x^2 - 2x - 15 - x^2 - 3}{2(x^2-9)} = \\ & = \frac{6x^2 + 20x - 6}{2(x^2-9)} = \frac{3x^2 + 10x - 3}{x^2 - 9} \end{aligned}$$

c) $x \neq \pm 3$

FEK-4.2 Řešte v \mathbb{R} rovnici $2 \sin x = -1$.

[4 b.]

Řešení

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

FEK-4.3 Je dána rovnice $\frac{1}{2} \log(2x + 7) = \log(x - 4)$.

a) Stanovte podmínky řešitelnosti v \mathbb{R} . [2 b.]

b) Řešte danou rovnici. [4 b.]

c) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení:

a) $2x + 7 > 0 \Rightarrow x > -\frac{7}{2} \wedge x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in (4, +\infty)$

b)

$$\begin{aligned} 2x + 7 &= x^2 - 8x + 16 \\ x^2 - 10x + 9 &= 0 \\ (x - 9)(x - 1) &= 0 \\ x_1 = 9 \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

c) $L(9) = \frac{1}{2} \log(18 + 7) = \frac{1}{2} \log 25 = \log 5$
 $P(9) = \log(9 - 4) = \log 5 \Rightarrow L(9) = P(9)$
 $L(1) = \frac{1}{2} \log(2 + 7) = \frac{1}{2} \log 9 = \log 3$
 $P(1)$ není def. $\Rightarrow 1$ není kořenem

FEK-4.4

a) V \mathbb{R} řešte nerovnici $-\frac{x}{3} + 2x - 4 < \frac{-x+2}{5} + 2x$. [2 b.]

b) Je tato nerovnice splněna pro $x = -10$? [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} + 2x - 4 &< \frac{-x+2}{5} + 2x \\ -\frac{x}{3} - 4 &< \frac{-x+2}{5} \\ -5x - 60 &< -3x + 6 \\ -2x &< 66 \\ x &> -33 \end{aligned}$$

b) Je splněna.

$$L(-10) = \frac{10}{3} - 20 - 4 = -\frac{62}{3} = -20\frac{2}{3},$$

$$P(-10) = \frac{12}{5} - 20 = -\frac{88}{5} = -17\frac{3}{5}, \quad L(-10) < P(-10)$$

FEK-4.5 Je dána funkce $f: y = -2x^2 + 4x + 1$.

a) Určete definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$ funkce f . [2 b.]

b) Sestrojte graf funkce f pro $x \in \langle -1; 3 \rangle$. [6 b.]

Řešení

a) $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = (-\infty, 3 >$

b) Parabola, $V = [1, 3]$, $f(-1) = -5$, $f(3) = -5$.

FEK-4.6 Mezi čísla 9 a $-\frac{1}{3}$ vložte dvě čísla tak, aby s danými dvěma tvořila po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. [4 b.]

Řešení $a_1 = 9$, $a_2 = 9q$, $a_3 = 9q^2$, $a_4 = -\frac{1}{3}$

$$a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{3}}{9}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

Vložená čísla: $a_2 = -3$, $a_3 = 1$

FEK-4.7 Je dán trojúhelník s vrcholy $A = [3; 8]$, $B = [-1; 2]$, $C = [8; -4]$.

a) Určete velikosti stran daného trojúhelníka. [4 b.]

b) Rozhodněte, zda je daný trojúhelník pravoúhlý. [2 b.]

Řešení

$$\begin{aligned} \text{a) } |AB| &= \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \\ |AC| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ |BC| &= \sqrt{(-9)^2 + 6^2} = \sqrt{117} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sqrt{(\sqrt{52})^2 + (\sqrt{117})^2} = \sqrt{169} = 13 \Rightarrow \Delta ABC \text{ je pravoúhlý}$$