FEK–3.1 Je dán výraz $\dfrac{3u-1}{u+2}-\dfrac{2u+2}{6-3u}-\dfrac{u^2+1}{3u^2-12}$

a) Určete hodnotu tohoto výrazu pro $u=-1$. [2 b.]

b) Upravte tento výraz. [2 b.]

c) Napište, pro které hodnoty u má výraz smysl. [2 b.]

Řešení:

a) $\dfrac{-4}{1}-\dfrac{0}{9}-\dfrac{2}{-9}=-\dfrac{34}{9}$

b) $$\frac{(3u-6)(3u-1)+(2u+2)(u+2)-u^2-1}{3(u^2-4)}=$$
$$=\frac{9u^2-18u-3u+6+2u^2+2u+4u+4-u^2-1}{3(u^2-4)}=$$
$$=\frac{10u^2-15u+9}{3(u^2-4)}$$

c) $u\neq\pm2$

FEK–3.2 Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. [4 b.]

Řešení

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

FEK–3.3 Je dána rovnice $\frac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$.

a) Stanovte podmínky řešitelnosti v $\mathbb{R}$. [2 b.]

b) Řešte danou rovnici. [4 b.]

c) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení:

a) $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3, +\infty)$

b)

$$\begin{aligned} 2x-3 &= x^2 - 6x + 9 \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x-6)(x-2) &= 0 \\ x_1 = 6 &\quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

c) $L(6) = \frac{1}{2}\log(12-3) = \frac{1}{2}\log 9 = \log 3$
$P(6) = \log(6-3) = \log 3 \quad \Rightarrow \quad L(6) = P(6)$
$L(2) = \frac{1}{2}\log(4-3) = 0$
$P(2)$ není def. $\quad \Rightarrow \quad$ 3 není kořenem

FEK–3.4

a) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $3 + 2x - \frac{x}{5} > \frac{2x+4}{2} - 5$. [2 b.]

b) Je tato nerovnice splněna pro $x = 10$? [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned} 3 + 2x - \frac{x}{5} &> \frac{2x+4}{2} - 5 \\ 30 + 20x - 2x &> 10x + 20 - 50 \\ 8x &> -60 \\ x &> -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

b) Je splněna.
$L(10) = 23 - \frac{10}{5} = 21, \quad P(10) = \frac{24}{2} - 5 = 7, \quad L(10) > P(10)$

FEK–3.5 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{1}{x}$.

a) Určete její definiční obor a nakreslete její graf pro $x \in D(f) \cap \langle -5; 5 \rangle$. [2 b.]

b) Vypočtěte funkční hodnoty $f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{a}), f(-\frac{1}{a})$, kde $a \neq 0$. [2 b.]

c) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu $\langle 1; 5 \rangle$. [2 b.]

d) Je funkce f sudá nebo lichá? Zdůvodněte. [2 b.]

Řešení:

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $f(-5) = -\dfrac{1}{5}$, $f(5) = \dfrac{1}{5}$, hyperbola v I. a III. kvadrantu.

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \quad f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2$

$f\left(\dfrac{1}{a}\right) = a \quad f\left(-\dfrac{1}{a}\right) = -a$

c) $\max\limits_{x \in <1,5>} f(x) = f(1) = 1$

$\min\limits_{x \in <1,5>} f(x) = f(5) = \dfrac{1}{5}$

d) $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x) \quad \Rightarrow f(x)$ je lichá funkce

FEK–3.6 Mezi čísla 6 a -4 vložte tři čísla tak, aby s danými dvěma tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. [4 b.]

Řešení $a_1 = 6,\ a_2 = 6 + d,\ a_3 = 6 + 2d,\ a_4 = 6 + 3d,\ a_5 = -4$

$a_5 = a_1 + 4d \ \Rightarrow\ d = \dfrac{-4-6}{4} = -\dfrac{5}{2} \ \Rightarrow$

Vložená čísla: $a_2 = \dfrac{7}{2},\ a_3 = 1,\ a_4 = -\dfrac{3}{2}$

FEK–3.7 Je dán trojúhelník s vrcholy A = $[-3; 1]$, B = $[2; -1]$, C = $[1; 3]$.

a) Vypočtěte velikost strany BC. [2 b.]

b) Vypočtěte délku těžnice t_b. [4 b.]

Řešení

a) $|BC| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{17} \doteq 4,123$

b) $B_1 = \dfrac{A+C}{2} = [-1, 2]$
$t_b = |BB_1| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \doteq 4,24$