FEK–2.1 Je dán výraz $\dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{x+3}{6-2x} - \dfrac{x^2+1}{2x^2-18}$

a) Určete hodnotu tohoto výrazu pro $x = -2$. [2 b.]

b) Upravte tento výraz. [2 b.]

c) Napište, pro které hodnoty x má výraz smysl. [2 b.]

Řešení:

a) $\dfrac{-3}{-5} - \dfrac{1}{10} - \dfrac{5}{-10} = 1$

b) $$\frac{(2x+6)(2x+1)+(x+3)^2-x^2-1}{2(x^2-9)} =$$
$$= \frac{4x^2+14x+6+x^2+6x+9-x^2-1}{2(x^2-9)} =$$
$$= \frac{4x^2+20x+14}{2(x^2-9)} = \frac{2x^2+10x+7}{x^2-9}$$

c) $x \neq \pm 3$

FEK–2.2 Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$. [4 b.]

Řešení

$$3x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

FEK–2.3 Je dána rovnice $\frac{1}{2}\log(2x-2) = \log(x-5)$.

a) Stanovte podmínky řešitelnosti v $\mathbb{R}$. [2 b.]

b) Řešte danou rovnici. [4 b.]

c) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení:

a) $2x - 2 > 0 \;\Rightarrow\; x > 1 \;\wedge\; x - 5 > 0 \quad\Rightarrow\quad x > 5 \quad\Rightarrow$
$x \in (5, +\infty)$

b)

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= x^2 - 10x + 25 \\ x^2 - 12x + 27 &= 0 \\ (x-9)(x-3) &= 0 \\ x_1 = 9 &\quad x_2 = 3 \notin D(f) \end{aligned}$$

c) $L(9) = \frac{1}{2}\log(18-2) = \frac{1}{2}\log 16 = \log 4$
$P(9) = \log(9-5) = \log 4 \quad\Rightarrow\quad L(9) = P(9)$
$L(3) = \frac{1}{2}\log(6-2) = \frac{1}{2}\log 4 = \log 2$
$P(3)$ není def. $\quad\Rightarrow\quad$ 3 není kořenem

FEK–2.4

a) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{2x+5}{3} - x < \dfrac{x}{2} + 4$. [2 b.]

b) Je tato nerovnice splněna pro $x = -4$? [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned} \frac{2x+5}{3} - x &< \frac{x}{2} + 4 \\ 4x + 10 - 6x &< 3x + 24 \\ -14 &< 5x \\ x &> -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

b) Není splněna.
$L(-4) = \dfrac{-3}{3} + 4 = 3, \quad P(-4) = -\dfrac{4}{2} + 4 = 2, \quad L(-4) \not< P(-4)$

FEK–2.5 Je dána funkce $f\colon y = x^3$.

a) Určete její definiční obor a nakreslete graf pro $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$.
[2 b.]

b) Vypočtěte funkční hodnoty $f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{a}), f(-\frac{1}{a})$, kde $a \neq 0$.
[2 b.]

c) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu $\langle -2; 2 \rangle$.
[2 b.]

d) Je funkce f sudá nebo lichá? Zdůvodněte. [2 b.]

Řešení:

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$
$f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^3} \quad f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^3}$

c) $\max\limits_{x \in <-2,2>} f(x) = f(2) = 8$
$\min\limits_{x \in <-2,2>} f(x) = f(-2) = -8$

d) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \Rightarrow f$ je lichá funkce

FEK–2.6 Mezi čísla 5 a 15 vložte čtyři čísla tak, aby s danými dvěma tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. [4 b.]

Řešení $a_1 = 5,\ a_2 = 5 + d,\ a_3 = 5 + 2d,\ a_4 = 5 + 3d,\ a_5 = 5 + 4d,\ a_6 = 15$

$a_6 = a_1 + 5d \ \Rightarrow\ d = \dfrac{15 - 5}{5} = 2 \ \Rightarrow$

Vložená čísla: $a_2 = 7,\ a_3 = 9,\ a_4 = 11\ a_5 = 13$

FEK–2.7 V rovnoběžníku ABCD jsou dány tři vrcholy A = [−2; 0], B = [1; −1], C = [3; 2].

a) Určete souřadnice čtvrtého vrcholu D. [4 b.]

b) Určete souřadnice středu S rovnoběžníka. [2 b.]

Řešení

a)

1. 1. způsob řešení
   $S = \dfrac{A+C}{2} = [\frac{1}{2}, 1]$,
   $S = \dfrac{B+D}{2} \;\Rightarrow$
   $$2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + d_1, \;\Rightarrow\; d_1 = 0$$
   $$2 \cdot 1 = -1 + d_2 \;\Rightarrow\; d_2 = 3$$
   $D = [0, 3]$
2. 2.způsob řešení
   a je přímka procházející bodem A rovnoběžně s přímkou BC:
   $x = -2 + 2t,\; y = 3t,\; t \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; 3x - 2y + 6 = 0$
   c je přímka procházející bodem C rovnoběžně s přímkou AB:
   $x = 3 + 3t,\; y = 2 - t,\; t \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x + 3y - 9 = 0$
   $a \cap c = D \;\Rightarrow\; 3(9 - 3y) - 2y + 6 = 0 \;\Rightarrow\; y = 3,\; x = 0 \;\Rightarrow$
   $D = [0, 3]$

b) $S = \dfrac{A+C}{2} = [\frac{1}{2}, 1]$