FEK–1.1 Je dán výraz $\dfrac{2u-3}{u+1} - \dfrac{u+1}{2-2u} - \dfrac{u^2-3}{2u^2-2}$

a) Určete hodnotu tohoto výrazu pro $u = -2$. [2 b.]

b) Upravte tento výraz. [2 b.]

c) Napište, pro které hodnoty u má výraz smysl. [2 b.]

Řešení:

a) $\dfrac{-7}{-1} - \dfrac{-1}{6} - \dfrac{1}{6} = 7$

b) $$\frac{(2u-2)(2u-3)+(u+1)^2-u^2+3}{2(u^2-1)} =$$
$$= \frac{4u^2-4u-6u+6+u^2+2u+1-u^2+3}{2(u^2-1)} =$$
$$= \frac{4u^2-8u+10}{2(u^2-1)} = \frac{2u^2-4u+5}{u^2-1}$$

c) $u \neq \pm 1$

FEK–1.2 Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = -1$. [4 b.]

Řešení

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{7} &= \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} &= \frac{25\pi}{28} + k\pi \\ x &= \frac{25\pi}{14} + 2k\pi \end{aligned}$$

FEK–1.3 Je dána rovnice $\frac{1}{2}\log(3x+31) = \log(x-3)$.

a) Stanovte podmínky řešitelnosti v $\mathbb{R}$. [2 b.]

b) Řešte danou rovnici. [4 b.]

c) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení:

a) $3x + 31 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{31}{3}$
$x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$

$$x \in (3, +\infty)$$

b)

$$\begin{aligned} 3x + 31 &= x^2 - 6x + 9 \\ x^2 - 9x - 22 &= 0 \\ (x-11)(x+2) &= 0 \\ x_1 = 11 &\quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

c) $L(11) = \frac{1}{2}\log(33+31) = \frac{1}{2}\log 64 = \log 8$
$P(11) = \log(11-3) = \log 8 \quad \Rightarrow \quad L(11) = P(11)$
$L(-2) = \frac{1}{2}\log(-6+31) = \frac{1}{2}\log 25 = \log 5$
$P(-2) =$ není def. $\quad \Rightarrow \quad -2$ není kořenem

FEK–1.4

a) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{x+3}{2} + x > -\dfrac{x}{3} + 4$. [2 b.]

b) Je tato nerovnice splněna pro $x = 1$? [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2} + x &> -\frac{x}{3} + 4 \\ 3x + 9 + 6x &> -2x + 24 \\ 11x &> 15 \\ x &> \frac{15}{11} \end{aligned}$$

b) Není splněna.
$L(1) = \dfrac{4}{2} + 1 = 3, \quad P(1) = -\dfrac{1}{3} + 4 = \dfrac{11}{3}, \quad L(1) \not> P(1)$

FEK–1.5 Je dána funkce $f\colon y = \dfrac{x^2}{2}$.

a) Určete její definiční obor a nakreslete graf pro $x \in \langle -2; 2\rangle$. [2 b.]

b) Vypočtěte funkční hodnoty $f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2}), f(a+1), f(a-1)$. [2 b.]

c) Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce f na intervalu $\langle -2; 2\rangle$. [2 b.]

d) Je funkce f sudá nebo lichá? Zdůvodněte. [2 b.]

Řešení:

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-2) = f(2) = 2$, parabola

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

$f(a+1) = \dfrac{(a+1)^2}{2} \quad f(a-1) = \dfrac{(a-1)^2}{2}$

c) $\max\limits_{x\in<-2,2>} f(x) = f(-2) = f(2) = 2$

$\min\limits_{x\in<-2,2>} f(x) = f(0) = 0$

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} = f(x) \quad \Rightarrow \quad f$ je sudá funkce

FEK–1.6 Mezi čísla 4 a 14 vložte tři čísla tak, aby s danými dvěma tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. [4 b.]

Řešení $a_1 = 4,\ a_2 = 4 + d,\ a_3 = 4 + 2d,\ a_4 = 4 + 3d,\ a_5 = 14$

$a_5 = a_1 + 4d \ \Rightarrow\ d = \dfrac{14 - 4}{4} = \dfrac{5}{2} \ \Rightarrow$

Vložená čísla: $a_2 = \dfrac{13}{2},\ a_3 = 9,\ a_4 = \dfrac{23}{2}$

FEK–1.7 Na souřadnicové ose x určete bod C tak, aby byl stejně vzdálen od bodů A $= [-\frac{3}{2}; 1]$, B $= [\frac{5}{2}; 3]$. [6 b.]

Řešení:

$$\begin{aligned}
(x+1,5)^2 + (y-1)^2 &= (x-2,5)^2 + (y-3)^2 \quad \wedge \quad y = 0 \\
x^2 + 3x + 2,25 + 1 &= x^2 - 5x + 6,25 + 9 \\
8x &= 12 \\
x &= \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad C = [\frac{3}{2}, 0]
\end{aligned}$$