FEK–17.1 Je dán výraz $V(n) = 4\frac{(n-1)!}{(n-3)!} - 2\frac{(n+2)!}{(n-1)!} + (n-1)\frac{n!}{(n-2)!}$.

a) Určete hodnotu daného výrazu pro $n = 4$. [2 b.]

b) Pro která přirozená čísla n má daný výraz smysl? Upravte daný výraz tak, aby neobsahoval zlomky (vzniklé součiny nemusíte roznásobovat).

[4 b.]

Řešení

a) $4\frac{3!}{1!} - 2\frac{6!}{3!} + 3\frac{4!}{2!} = 24 - 240 + 36 = -180$

b) $n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq 3$
$4(n-1)(n-2) - 2(n+2)(n+1)n + (n-1)^2 n$

FEK–17.2 Je dána rovnice $5 - \frac{x}{3} = 2{,}5 - \frac{3x+1}{12}$.

a) Řešte rovnici v $\mathbb{R}$. [2 b.]

b) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned} 60 - 4x &= 30 - 3x - 1 \\ -x &= -31 \\ x &= 31 \end{aligned}$$

b) $L = 5 - \frac{31}{3} = -\frac{16}{3}$,

$P = \frac{5}{2} - \frac{94}{12} = \frac{15-47}{6} = -\frac{16}{3}$, $\quad L = P$

FEK–17.3 Je dána rovnice $\dfrac{-20}{x-2}+\dfrac{15}{x-3}=\dfrac{-6}{x-1}$.

a) Určete definiční obor této rovnice. [2 b.]

b) Řešte danou rovnici v $\mathbb{R}$. [4 b.]

c) Proveďte zkoušku. [2 b.]

Řešení

a) $x\neq 2,\ x\neq 3,\ x\neq 1$

b)

$$\begin{aligned}
-20(x-3)(x-1)+15(x-2)(x-1) &= -6(x-2)(x-3)\\
-20x^2+80x-60+15x^2-45x+30 &= -6x^2+30x-36\\
-5x^2+35x-30 &= -6x^2+30x-36\\
x^2+5x+6 &= 0\\
(x+2)(x+3) &= 0 \ \Rightarrow\ x_1=-2,\ \ x_2=-3
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
L(-2) &= \frac{-20}{-4}+\frac{15}{-5}=5-3=2\\
P(-2) &= \frac{-6}{-3}=2\\
L(-3) &= \frac{-20}{-5}+\frac{15}{-6}=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}\\
P(-3) &= \frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

FEK–17.4

a) V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $\dfrac{5-3x}{3}+3<\dfrac{3x-8}{4}$. [2 b.]

b) Je tato nerovnice splněna pro $x=20$? [2 b.]

Řešení

a)

$$\begin{aligned}\frac{5-3x}{3}+3 &< \frac{3x-8}{4}\\ 20-12x+36 &< 9x-24\\ 80 &< 21x\\ x &> \frac{80}{21}\end{aligned}$$

b) Nerovnice je splněna.

$L(20)=\dfrac{-55}{3}+3=\dfrac{-46}{3}$

$P(20)=\dfrac{52}{4}=13, \quad L(20)<P(20)$

FEK–17.5 Je dána funkce $f\colon y = \log x$.

a) Určete její definiční obor a nakreslete její graf pro $x \in \langle\frac{1}{10}; 10\rangle$. [2 b.]

b) Vypočtěte funkční hodnoty $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(10)$, $f(10^n)$, $f(10^{-n})$, kde $n \in N$. [2 b.]

c) Najděte x, pro které platí $\log x = \frac{1}{2}$. [2 b.]

d) Je funkce f monotónní? Zdůvodněte. [2 b.]

Řešení:

a) $D(f) = (0, +\infty)$, $f\left(\frac{1}{10}\right) = -1$, $f(10) = 1$

b) $f\left(\frac{1}{10}\right) = \log 10^{-1} = -1 \quad f(10) = \log 10 = 1$
$f(10^n) = n \quad f(10^{-n}) = -n$

c) $x = \sqrt{10}$

d) Funkce $f(x)$ je rostoucí, neboť inverzní funkce $y = 10^x$ je rostoucí.
Nebo:
Jde o logaritmickou funkci se základem větším než 10.

FEK–17.6 Mezi čísla 4 a 19 vložte dvě čísla tak, aby s danými dvěma tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. [4 b.]

Řešení

$a_1 = 4,\ \ a_2 = 4 + d,\ \ a_3 = 4 + 2d,\ \ a_4 = 19$

$a_5 = a_1 + 3d \ \Rightarrow\ d = \dfrac{19 - 4}{3} = 5 \ \Rightarrow$

Vložená čísla: $a_2 = 9,\ a_3 = 14,$

FEK–17.7 Přímky p, q jsou dány obecnými rovnicemi $p\colon 3x+y-5=0$, $q\colon 2x+3y-8=0$.

a) Vypočtěte průsečík R přímek p, q. [4 b.]

b) Napište obecnou rovnici přímky r, která prochází bodem R a počátkem soustavy souřadnic.

[2 b.]

Řešení

a) $3x+y-5=0 \;\wedge\; 2x+3y-8=0$
$\Rightarrow\; 2x+3(5-3x)-8=0 \;\Rightarrow\; -7x=-7 \;\Rightarrow\; x=1$
$\Rightarrow\; y=5-3=2 \;\Rightarrow\; R=[1,2]$

b) $r:\; y=\dfrac{2}{1}x=2x \quad\Rightarrow\quad 2x-y=0$