

32. Nekonečná řada

1) Převed'te na zlomky v základním tvaru:

- a) $8,\overline{4}$
- b) $2,600\overline{4}$
- c) $3,0\overline{12}$

2) Krychli o hraně a je vepsána koule, kouli krychle atd.

Určete součet povrchů a objemů těchto koulí a krychlí.

3) Určete obor konvergence řad a potom vypočtete součet řady:

- a) $1 - \sin x + \sin^2 x - \sin^3 x + \dots$
- b) $1 + \cotg x + \cotg^2 x + \cotg^3 x + \dots$

4) Z jednoho bodu ramene ostrého úhlu $\alpha = 60^\circ$, který je od vrcholu vzdálen 4 cm , ved'te kolmici na druhé rameno, pak opět zpět atd.

Určete délku takto vzniklé čáry.

5) Určete $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right)$.

6) Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[3]{x} + \dots = 2$$

7) Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \dots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}$$

8) Do rovnostranného trojúhelníka je vepsána kružnice, do zbývajících částí při vrcholech další kružnice.

Určete součet obsahů všech kruhů a poměr plochy jimi pokryté k obsahu trojúhelníka.

9)

a) Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$(2^x)^2 - \frac{32}{3} = 2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + \dots$$

b) Určete a_1 a n v geom. posloupnosti, ve které $a_n = 40$, $s_n = 75$ a kvocient je kořenem rovnice z a).

10) Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$2^x \cdot \sqrt{2^x} \cdot \sqrt[4]{2^x} \cdot \sqrt[8]{2^x} \cdot \dots = 0,25$$

11) Určete číslo, k němuž se blíží délka spirály, která vznikne tak, že nad průměrem $AB = 2r$ sestrojíme půlkružnici, jejíž střed označíme S ; nad průměrem BS opět sestrojíme půlkružnici, která leží v opačné polorovině a má střed S_1 ; nad průměrem SS_1 sestrojíme další půlkružnici atd.

12) Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \dots = \frac{5}{3}$$

13) Je dán čtverec o straně a . Do něj je vepsán čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce. Takto vzniklému čtverci je opět vepsán stejným způsobem další čtverec atd.

Určete součet

- a) obvodů,
- b) obsahů všech čtverců.

14) Dokažte, že platí:

$$\frac{0,46}{0,63} = \frac{11}{15}$$

15) V intervalu $\langle 0; 2p \rangle$ řešte rovnici:

$$1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots = 2 \cdot \operatorname{tg} x$$

16) Řešte v \mathbb{R} rovnici:

$$\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \dots$$

17) Vypočtěte:

a)
$$A = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\dots}$$

b)
$$B = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots$$

Výsledky (32. Nekonečná řada)

1)

a) $\frac{76}{9}$

b) $\frac{5851}{2250}$

c) $\frac{1003}{333}$

2) krychle: $S = 9a^2, V = \frac{\pi a^3}{6}$

koule: $S = \frac{3\pi a^2}{2}, V = \frac{(27 + 3\sqrt{3})a^3}{26}$

3)

a) obor konvergence $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, s = \frac{1}{1 + \sin x}$

b) obor konvergence $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\right), k \in Z, s = \frac{1}{1 - \cotg x}$

4) $s = 4\sqrt{3}$

5) $\frac{1}{2}$

6) $x = 10$

7) $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

8) $\frac{\pi a^2}{24}, \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

9)

a) $x = 2$

b) $a_1 = 5, n = 4$

10) $x = -1$

11) $s = 2\pi r$

12) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{5}{7}$

13)

a) $o = 4a(2 + \sqrt{2})$

b) $S = 2a^2$

14) -----

15) $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}$

16) $x_1 = -6, x_2 = 4$

17) $A = \frac{n+1}{4}, B = 9, n \neq 0$