21. Komplexní čísla

1) Je dáno komplexní číslo $a = \dfrac{15i \pm 15\sqrt{3}}{3i}$.

   a) Určete jeho absolutní hodnotu.
   b) Určete číslo komplexně sdružené k a.
   c) Určete vzdálenost čísel $a, \overline{a}$.

2) Vypočtěte $(-2+2i)^6$ pomocí Moivrovy věty.

3)

   a) Nakreslete číslo $\overline{a}$, je-li $a = \left(2 - \dfrac{3}{2}i\right)(-1+1{,}4i)$.
   b) Užitím Moivrovy věty umocněte $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^6$

4) Vypočtěte komplexní čísla, která zobrazují vrcholy čtverce se středem v počátku, je-li vrchol A obrazem komplexního čísla $a = 3-4i$ a vypočtěte jeho obvod.

5)

   a) Sestrojte $\left(\sqrt{3}-i\right)(-2+i)$.
   b) Zobrazte množinu všech obrazů komplexních čísel z, která splňují nerovnici

$$|z-2| \le |y-1+3i|.$$

6) Užitím Moivrovy věty umocněte $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{11}$.

7)

   a) Vypočtěte $\dfrac{|4-3i|}{10i} + \dfrac{|8+6i|}{5}$.
   b) Zobrazte $|z+2+3i| \le 2$.

8)

   a) Je dán pravidelný osmiúhelník se středem v $P[0;0]$ a bodem $A = a = -4i$.
      Vypočtěte obvod osmiúhelníka a délku nejkratší úhlopříčky.
   b) Vypočtěte $\dfrac{(1-2i)^2}{3-2i}$.

9)

   a) Zobrazte v Gaussově rovině $(3-i)\left(-\sqrt{3}-i\right)$.
   b) Vypočtěte $\dfrac{4-2i}{3-i} + \dfrac{2i^{48} - 3i^{57} + 2i^{73}}{i^{60} + 3i^{35}}$.
   c) Zobrazte $|z-5| - |z-1| \le 0 \wedge |z-i| \ge 2$.

10)

   a) Dokažte, že číslo $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$ je komplexní jednotka a určete její argument.
   b) Zjednodušte $1 + i + 2i^2 - 3i^3 + i^4 + i^5 + i^6$.

11)

a) Určete množinu $M = \left\{ x \in C; \left| \frac{x-4}{x-8} \right| = 1 \right\}$.

b) Vypočtěte $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{100}$.

c) Rozložte na součin $4x^2 + 10y^2; x, y \in R$.

12) Je dáno komplexní číslo $a = \frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i} + (3+i)(-1+2i)$.

a) Znázorněte ho v Gaussově rovině.

b) Vypočtěte a^5.

13) V Gaussově rovině zobrazte všechna $x \in C$, pro která platí:

$$\log_2 \frac{|x|^2 - |x| + 2}{1 + |x|} < 2.$$

14) Vypočtěte součet $s = 1 + x + x^2 + ... + x^{19}$, kde $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

15) Zobrazte množinu všech komplexních čísel x, pro která platí:

$$|z \cdot \bar{z} - 2| \cdot |z \cdot \bar{z} - 4| \cdot ||z| - 4| = 0$$

16) Určete $\sqrt[6]{i}$ a znázorněte v Gaussově rovině.

17) Určete početně i ze znázornění v Gaussově rovině:

$$\sqrt[4]{-2+2i}.$$

18) Vyjádřete

a) $\sin 3x, \cos 3x$.

b) $\sin 4x, \cos 4x$

pomocí goniometrických.funkcí úhlu x.

Výsledky
(21. Komplexní čísla)

1) $|a| = 10, \overline{a} = 5 + 5\sqrt{3}i, \varphi = 300°, |a - \overline{a}| = 10\sqrt{3}$
2) $512i$
3)
   a) $a = 4{,}1 + 4{,}3i$
   b) 2^6
4) $b = 4 + 3i, c = -3 + 4i, d = -4 - 3i, o = 20\sqrt{2}$
5)
   a) -----
   b) polorovina
6) $2^{10}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$
7)
   a) $2 - \frac{1}{2}i$
8)
   a) $o = 32\sqrt{2 - \sqrt{2}}, u = 4\sqrt{2}$
   b) $-\frac{1}{13} - \frac{18}{13}i$
9)
   a) -----
   b) $\frac{19}{10} + \frac{3}{10}i$
10)
   a) -----
   b) $-1 + 5i$
11)
   a)
   b) -1
   c) $\left(2x + \sqrt{10}i\right)\left(2x - \sqrt{10}i\right)$
12)
   a) -----
   b) $a = -1 - i$
   c) $4 + 4i$
13) $x^2 + y^2 < \left(\frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right)^2$
14) $s = 1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)i$
15) sjednocení 3 soustředných kružnic se středy $S[0;0]$ a poloměry $r_1 = \sqrt{2}; r_2 = 2; r_3 = 4$
16) $\pm 1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$
17) $z = 2^{\frac{3}{8}}\left(\cos\left(\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$