

Inverzní funkce

D: Je-li funkce f **prostá**, pak k ní existuje právě jedna funkce, která se označuje symbolem f^{-1} a která je dána takto:

1. definičním oborem funkce f^{-1} je obor hodnot funkce f , tj. $D(f^{-1}) = H(f)$
2. každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ tak, že platí: $f(x) = y$.

Funkce f^{-1} se nazývá **inverzní funkce** k funkci f .

V: Inverzní funkce f^{-1} k funkci f je stejně ryze monotónní jako funkce f .

Poznámka: Grafy funkcí f a f^{-1} ležící v téže kartézské soustavě souřadnic Oxy jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$.

Komentář: Inverzní funkce k dané funkci je v podstatě taková funkce, která vznikne prohozením souřadných os, tj. x zaměníme za y . Důležitou vlastností funkcí, k nimž je možné sestrojovat funkce inverzní, je, aby funkce byly **prosté**. Jinak by totiž (po záměně os) nově vznikla relace (tedy „funkce“ inverzní), která by nebyla funkcí (tj. jednomu x by odpovídaly dvě různé funkční hodnoty na ose y). Se záměnou os x a y souvisí též záměna definičního oboru původní funkce s oborem hodnot funkce inverzní a naopak (blíže - viz příklady).

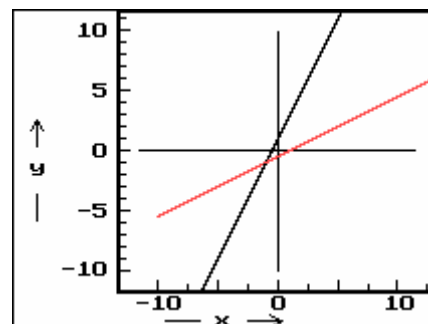
Najděte k dané funkci funkci inverzní (pokud je to možné):

1. $f: y = 2x + 1$

Řešení: Formálně vyměníme x a y a z takto získané rovnice vyjádříme

$$y: x = 2y + 1 \Rightarrow f^{-1}: y = \frac{x-1}{2}. \text{ Obě funkce je možné nakreslit do}$$

téhož grafu, přičemž platí: $D(f) = H(f^{-1}) = R$ a $H(f) = D(f^{-1}) = R$.



2. $g: y = \frac{2x+1}{x-1}$

Řešení: $g: y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+2+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+2+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$ a

tento graf umíme nakreslit. Inverzní funkce: $x = \frac{2y+1}{y-1} \Rightarrow$

$$xy - x = 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow g^{-1}: y = \frac{x-2+2+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}.$$

$D(g) = H(g^{-1}) = R - \{1\}$ a $H(g) = D(g^{-1}) = R - \{2\}$

3. $h: y = \frac{3x+4}{x+2}$

Řešení: $h: y = \frac{3x+4}{x+2} = \frac{3x+6-6+4}{x+2} = \frac{3(x+2)-6+4}{x+2} = 3 - \frac{2}{x+2}.$

Inverzní funkce: $x = \frac{3y+4}{y+2} \Rightarrow xy + 2x = 3y + 4 \Rightarrow y = \frac{-2x+4}{x-3}$

$$\Rightarrow h^{-1}: y = \frac{-2x+4}{x-3} = \frac{-2x+6-6+4}{x-3} = \frac{-2(x-3)-2}{x-3} = -2 - \frac{2}{x-3}.$$

$D(h) = H(h^{-1}) = R - \{-2\}$ a $H(h) = D(h^{-1}) = R - \{3\}$

4. $j: y = \frac{x^2}{3}$

Řešení: k této funkci není možné sestrojít inverzní funkci na celém jejím definičním oboru, neboť daná funkce j není na svém definičním oboru prostá. Proto je třeba zvolit interval (a většinou se volí největší možný), na kterém by prostá byla. V tomto případě jde o interval $\langle 0; \infty \rangle$, na kterém je možné provést již výše naznačený postup.

Inverzní funkce: $j: y = \frac{x^2}{3} \Rightarrow j^{-1}: y = \sqrt{3x}.$

$D(j) = H(j^{-1}) = \langle 0; \infty \rangle$, $H(j) = D(j^{-1}) = \langle 0; \infty \rangle$

