Exponenciální rovnice

Rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá v exponentu, se nazývají **exponenciální rovnice**. Důležitou roli zde hraje věta, jejíž platnost přímo vyplývá z vlastností exponenciální funkce. Exponenciální funkce je totiž buď rostoucí nebo klesající (a tedy ryze monotónní) a tedy prostá. Proto platí následující věta:

V: Pro všechna reálná čísla x, y a pro každé $a \in R^+ - \{1\}$ platí: je-li $a^x = a^y$, pak $x = y$.

Poznámka: *Jinými slovy platí-li rovnost mezi dvěma mocninami, které mají stejný základ, musí se nutně rovnat i exponenty.*

Řešte v R rovnici o neznámé x: $5^{5-x} = 5^{3x-3}$.

Řešení: na základě právě uvedené věty si stačí uvědomit, že uvedená rovnost platí, pokud exponenty v obou mocninách budou stejné (vzhledem k tomu, že jsou stejné základy mocnin - na obou stranách rovnice je základem číslo 5), tedy pokud bude platit: $5 - x = 3x - 3$, což je jednoduchá lineární rovnice, kterou je možné upravit na tvar $-4x = -8$, odkud dostáváme: $x = 2$. To je výsledek celého příkladu. Zbývá už jen *ODP*: $O = R$, $D = R$, $P = \{2\}$

Z právě uvedeného příkladu je jasná i „filosofie" řešení: snažit se vždy rovnici upravit tak, abychom dostali rovnost dvou mocnin o stejném základu. Jinými slovy se snažit převést všechny mocniny na mocniny o stejném základu pomocí známých vztahů probíraných v 1. ročníku. Na základě věty uvedené v záhlaví pak máme skoro hotovo.

V dalších řešených příkladech již nebudu vypisovat jednotlivé kroky se slovním komentářem, ale budu se snažit v úpravách postupovat pomalu, aby byl sled myšlenek jasný

Řešte v R rovnici o neznámé x: $\dfrac{1}{3^{5-4x}} = 81$.

Řešení:

$\dfrac{1}{3^{5-4x}} = 81$

$\dfrac{1}{3^{5-4x}} = 3^4$

$3^{-(5-4x)} = 3^4$

$-(5-4x) = 4$

$4x = 9$

$x = \dfrac{9}{4}$

$O = R$, $D = R$, $P = \left\{\dfrac{9}{4}\right\}$

Řešte v R rovnici o neznámé x: $9^{x-1} . \dfrac{3^{2x}}{3^{x+1}} = 3^{2x} . 27$.

Řešení:

$\left(3^2\right)^{x-1} . \dfrac{3^{2x}}{3^{x+1}} = 3^{2x} . 3^3$

$3^{2x-2} . 3^{2x-x-1} = 3^{2x} . 3^3$

$3^{2x-2} . 3^{x-1} = 3^{2x} . 3^3$

$3^{2x-2+x-1} = 3^{2x+3}$

$3^{3x-3} = 3^{2x+3}$

$3x - 3 = 2x + 3$

$x = 6$

$O = R$, $D = R$, $P = \{6\}$

Řešte v R rovnici o neznámé x: $3^x + 3^{x+1} = 108$.

Řešení:

$3^x + 3^{x+1} = 108$

$3^x + 3^x . 3^1 = 108$

$3^x\left(1 + 3^1\right) = 108$

$3^x . 4 = 108$

$3^x = \dfrac{108}{4}$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$x = 3$

$O = R$, $D = R$, $P = \{3\}$

Řešte v R rovnici o neznámé x: $2^{x+3} + 2^{x+5} = 80$.

Řešení:

$2^{x+3} + 2^{x+5} = 80$

$2^x . 2^3 + 2^x . 2^5 = 80$

$2^x . \left(2^3 + 2^5\right) = 80$

$2^x . (8 + 32) = 80$

$2^x . 40 = 80$

$2^x = \dfrac{80}{40}$

$2^x = 2$

$x = 1$

$O = R$, $D = R$, $P = \{1\}$

Řešte v R rovnici o neznámé x: $4^x - 2^{x+1} = 48$.

Řešení:

$4^x - 2^{x+1} = 48$

$2^{2x} - 2^x . 2 = 48$ a tím jsme v podstatě skončili, protože není možné použít onu zmíněnou filosofii: upravit na rovnost dvou mocnin se stejným základem a na základě toto poté dát do rovnosti exponenty. Zde si musíme pomoci jinak. I když se totiž budeme snažit vytknout (jako v minulých příkladech), nepomůže to. Dostaneme totiž rovnici ve tvaru $2^x(2^x-2)=48$, kde „vadí“ v závorce člen 2^x (to v minulých příkladech nebylo). Bude tedy nezbytné se vrátit zpět k rovnici $2^{2x}-2^x.2=48$ a upravit první člen jinak: $(2^x)^2-2^x.2=48$. Nyní je možné rovnici převést na tvar $(2^x)^2-2^x.2-48=0$, která už připomíná kvadratickou rovnici. Použijeme tedy substituci: $y=2^x$ a rovnici napíšeme ve tvaru $y^2-2y-48=0$, což je kvadratická rovnice pro neznámou *y*. Po vyřešení (rozkladem nebo přes diskriminant) obdržíme dva kořeny: $y_1=8$ a $y_2=-6$. Musíme se ale „vrátit“ zpět k neznámé *x*, tedy zpět k substituci: $8=2^x$ a $-6=2^x$. První rovnici lze upravit na tvar $2^3=2^x$, odkud dostáváme $x=3$. Druhá rovnice $-6=2^x$ nemá řešení, protože exponenciální funkce (v základním tvaru) nabývá pouze kladných funkčních hodnot. Tedy řešením původní rovnice $4^x-2^{x+1}=48$ je pouze $x=3$. Tedy závěr je $O=R$, $D=R$, $P=\{3\}$.

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $3^{2x}-3.(3^x-3^2)=3^{x+2}$.

Řešení:

$3^{2x}-3.(3^x-3^2)=3^{x+2}$

$3^{2x}-3.3^x+3.3^2=3^x.3^2$

$3^{2x}-3.3^x+3.3^2=3^x.3^2$

$(3^x)^2-3.3^x+27=9.3^x$

$(3^x)^2-12.3^x+27=0$

substituce: $y=3^x$

$y^2-12y+27=0$

po vyřešení kvadratické rovnice: $y_1=3$ a $y_2=9$

$3=3^x \Rightarrow x=1$

$9=3^x \Rightarrow x=2$

$O=R$, $D=R$, $P=\{1;2\}$

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $5^x(5^x-20)=25(6.5^{x-2}+1)$.

Řešení:

$5^x(5^x-20)=5^2(6.5^{x-2}+1)$

$5^{2x}-20.5^x=6.5^x+5^2$

$5^{2x}-26.5^x-25=0$

$(5^x)^2-26.5^x-25=0$

substituce: $y=5^x$

$y^2-26y-25=0$

po vyřešení kvadratické rovnice: $y_1=1$ a $y_2=25$

$1=5^x \Rightarrow x=0$

$25=5^x \Rightarrow x=2$

$O=R$, $D=R$, $P=\{0;2\}$

Příklady k procvičení:

Řešte v *R*: $\dfrac{32^{x+1}}{16.2^{2x}}=4^{1+x}$ ($O=R$, $D=R$, $P=\{1\}$), $2^x-2^{4-x}=15$ ($O=R$, $D=R$, $P=\{4\}$), $6.(6^{2x-2}+1)=4.6^x-13.6^{x-1}$ ($O=R$, $D=R$, $P=\{0;2\}$), …