18. Elipsa

1) Najděte osovou rovnici elipsy, která se přímky $3x-4y-27=0$ dotýká v bodě $T[5,-3]$.
2) K elipse $4x^2+5y^2=120$ veďte tečny kolmé k přímce $2x+4y-7=0$.
3) Na elipse $4x^2+9y^2=36$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od přímky $p: 2x+4y-15=0$ byla co nejmenší.
4) Vypočítejte délku tětivy elipsy $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ jdoucí jejím středem a svírající s hlavní poloosou úhel $45°$.
5) V rovnici elipsy $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$ určete b tak, aby přímka $2x+3y=12$ byla její tečnou.
6) Je dána přímka $4x+5y-a=0$ a elipsa $9x^2+25y^2=900$.
   Pro která a je přímka sečnou, tečnou, nesečnou?
7) V soustavě souřadnic je dána elipsa tak, že její hlavní osa splývá s osou x a střed elipsy je v počátku. Hlavní poloosa má velikost $a=5$, vedlejší poloosa má velikost $b=3$.
   Určete průsečíky tečen elipsy, jejímiž dotykovými body jsou krajní body tětiv procházejících ohnisky kolmo k hlavní ose elipsy.
8) Vyšetřete množinu bodů v rovině, jejíž souřadnice vyhovují rovnici
   $$y=2-\frac{1}{3}\sqrt{7-6x-x^2}.$$
9) Napište rovnice tečen elipsy $4x^2+9y^2=36$, jejichž směrnice $k=1$.
10) Napište rovnici elipsy se středem v počátku jdoucí body $M[\sqrt{3},-2]$, $N[-2\sqrt{3},1]$. Osy elipsy jsou souřadnicové osy.
11) Je dána elipsa $5x^2+9y^2=45$ a bod $M[0,-3]$.
    a) Dokažte, že M je bodem vnější oblasti elipsy.
    b) Napište rovnice tečen elipsy procházejících bodem M.
    c) Vypočtěte odchylku těchto tečen.
12) Určete střed, velikosti poloos a souřadnice ohnisek elipsy $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$.
13) Dokažte, že parametrické rovnice
    $$x=a\cdot\cos\varphi \wedge y=\frac{a}{3}\sqrt{3}\cdot\sin\varphi,\ a>0, \varphi\in\langle 0;2\pi)$$
    jsou rovnicemi elipsy.
14) Napište osovou rovnici elipsy, která má $e=2\sqrt{2}$ a prochází bodem $M[2,\sqrt{6}]$.
15) Určete rovnice tečen elipsy $3x^2+8y^2=45$, které mají od jejího středu vzdálenost $d=3$.
16) Určete rovnice tečen elipsy $4x^2+9y^2-24x+18y+9=0$ v jejích průsečících s osou x.
17) Určete střed a ohniska elipsy $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$.
18) Která elipsa se středem v poč. prochází bodem $A\left[3,\frac{12}{5}\right]$ a dotýká se přímky $4x+5y-25=0$?

Výsledky
(18. Elipsa)

1) $9x^2 + 20y^2 = 405$
2) $t_1 : 2x - y + 12 = 0, t_2 : 2x - y - 12 = 0$
3) $M\left[\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right]$
4) $12\sqrt{\frac{2}{13}}$
5) $b = \frac{2\sqrt{11}}{3}$
6) tečna: $a = \pm 50$
   sečna: $a \in (-50, 50)$
   nesečna: $a \in (-\infty, -50) \cup (50, \infty)$
7) $K\left[\frac{25}{4}, 0\right], L\left[-\frac{25}{4}, 0\right], O[0,5], M[0,-5]$
8) $S[-3,2], a = 4, b = \frac{4}{3}$
9) $t_1 : x - y + \sqrt{13} = 0, t_2 : x - y - \sqrt{13} = 0$
10) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$
11)
   a) ---
   b) $t_1 : 2x - 3y - 9 = 0, t_2 : 2x + 3y + 9 = 0$
   c) $\alpha = 67°23'$
12) $S[1, 2], a = 3, b = 2, F_1\left[1 - \sqrt{5}, 2\right], F_2 = \left[1 + \sqrt{5}, 2\right]$
13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{3}} = 1$
14) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$
15) $t_1 : 3x + 4y - 15 = 0, t_2 : 3x + 4y + 15 = 0, t_3 : 3x - 4y + 15 = 0, t_4 : 3x - 4y - 15 = 0$
16) $t_1 : 2\sqrt{3}x + 3y - 9 - 6\sqrt{3} = 0, t_2 : -2\sqrt{3}x + 3y - 9 + 6\sqrt{3} = 0$
17) $S[3,-2], F_1\left[3 + \sqrt{7}, -2\right], F_2\left[3 - \sqrt{7}, -2\right]$
18) $256x^2 + 225y^2 = 3600$