

1. Limita funkce - výpočty, užití

Vypočtěte následující limity:

- | | | | |
|---|--|---|--|
| 1.1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+3}{x^2-1}$ | 1.8 $\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x$ | 1.15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$ | 1.22 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x \sin x}{x}$ |
| 1.2 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{x^2+1}$ | 1.9 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$ | 1.16 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$ | 1.23 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin^2 2x}{x^2}$ |
| 1.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5+10x}{x-5}$ | 1.10 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + 5 \cos \frac{x}{2} \right)$ | 1.17 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-6x+3}{x^3-1}$ | 1.24 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{2x^2}$ |
| 1.4 $-2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2-4x}{6-8x}$ | 1.11 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{-1}{x^2} + \log(x+2) \right)$ | 1.18 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2}$ | 1.25 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x^2+4x+4}$ |
| 1.5 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x$ | 1.12 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}+4}{1-x}$ | 1.19 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$ | 1.26 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$ |
| 1.6 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 2x$ | 1.13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x}$ | 1.20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x}$ | 1.27 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$ |
| 1.7 $\lim_{x \rightarrow -\frac{2\pi}{3}} (-\cos x)$ | 1.14 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-4x-5}{x+1}$ | 1.21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 4x}{2x}$ | 1.28 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$ |

- | | | | |
|--|---|--|--|
| 1.29 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$ | 1.36 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$ | 1.42 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ | 1.49 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3-2x^2+x-4)$ |
| 1.30 $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ | 1.37 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ | 1.43 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ | 1.50 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-2}$ |
| 1.31 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ | 1.38 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x \cdot \sin 2x}$ | 1.44 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x}$ | 1.51 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3-x+15}{3x^3+x^2+x-2}$ |
| 1.32 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ | 1.39 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \cdot \sin 2x}$ | 1.45 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ | 1.52 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-2x+1}{2x^3-3x^2+2}$ |
| 1.33 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ | 1.40 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$ | 1.46 $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3-2x^2+x-4)$ | 1.53 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$ |
| 1.34 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{cotg} x$ | 1.41 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$ | 1.47 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x^3-2x^2+x-4)$ | |
| 1.35 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \cdot \sin x}$ | | 1.48 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3-2x^2+x-4)$ | |

1.54 Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-3}{2x+1}$ a určete, pro která x se budou funkční hodnoty zadané funkce lišit od vypočtené limity o méně než 0,001.

1.55 Určete $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{2+4x^2}$ a určete, pro která x se budou funkční hodnoty zadané funkce lišit od vypočtené limity o méně než 0,01.

Určete asymptoty grafu funkce f :

- | | | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 1.56 $y = x + \frac{1}{x}$ | 1.57 $y = \frac{x}{1+x^2}$ | 1.58 $y = \frac{x^2}{x+1}$ | 1.59 $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ | 1.60 $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ |
| 1.61 $y = \frac{x^2-x-1}{2x}$ | 1.62 $y = \frac{4x-x^3}{x^2+4}$ | 1.63 $y = 2 - \frac{3}{x+1}$ | 1.64 $y = 3x + \frac{3}{x-2}$ | 1.65 $y = x \cdot 2^{x+3} + 4$ |

1.66 Napište rovnici tečny grafu funkce $f : y = \frac{1}{x}$ v bodě $T = [1; 1]$.

1.67 Napište rovnici tečny grafu funkce $f : y = x^2 + 1$ v bodě $T = [-2; y_0]$.

1.68 Napište rovnici tečny grafu funkce $f : y = 2 \sin x$ v bodě $T = [0; y_0]$.

2. Derivace - výpočty, tečna grafu funkce

Na základě definice derivace určete derivaci následujících funkcí:

2.1 $f: y = 4$

2.3 $h: y = x^3 - 2$

2.5 $j: y = -\frac{1}{x^4}$

2.6 $l: y = x + \frac{2}{x+6}$

2.2 $g: y = -5x + 2$

2.4 $k: y = 2x^2 + 4x - 3$

V následujících příkladech určete definiční obor funkce a její derivaci v libovolném bodě definičního oboru:

2.7 $y = x^4 + 3x^2 - 2$

2.8 $y = \frac{1}{5x}$

2.9 $y = \sqrt{x}$

2.10 $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

2.11 $y = \frac{x\sqrt{x^5}}{x^3}$

2.12 $y = \sin x + 5$

2.13 $y = -\cos x + \sin x + 2$

2.14 $y = x^2 + \sin x - \pi$

2.15 $y = 2x\sqrt{x}$

2.16 $y = (\sin x)^2$

2.17 $y = 2x \cdot \sin x$

2.18 $y = \frac{-2}{x} \cdot \cos x$

2.19 $y = \frac{x^3 - x + 2}{x^2}$

2.20 $y = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

2.21 $y = \frac{x^2}{x+1}$

2.22 $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

2.23 $y = (2x^4 - x)^2 - 2$

2.24 $y = \sin(x^3 - 2x^2 + x)$

2.25 $y = \cos^2(x^2 + 3x - 5)$

2.26 $y = \sin^2(-x^2 + 3)^3$

2.27 $y = \ln(x+5)$

2.28 $y = \ln(-x^2 + x)$

2.29 $y = \log^2(x^3 + 2x^2 - 15x)$

2.30 $y = \log_{\pi}^2(x^2 - 4)^3$

2.31 $y = \ln(\ln(\sin x))$

2.32 $y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$

2.33 $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$

2.34 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \ln \frac{x\sqrt{3} - 2}{x\sqrt{3} + 2}$

2.35 $y = 2e^{3x+2}$

2.36 $y = -e^{x^2+x+2}$

2.37 $y = e^{x-2} \operatorname{tg} x^3$

2.38 $y = 5^{x^2-2} \operatorname{cotg}^2(2x+1)^3$

2.39 $y = 2\sqrt{1-x} \cdot \cos x$

2.40 $y = \cos x^3 \cdot \operatorname{tg} x^3$

2.41 $y = e^{\cos x + \sin x} \cdot \operatorname{cotg} x$

2.42 $y = e^{\operatorname{tg} x + x^2} (x^2 + 4x - 7)$

Vypočítejte první a druhou derivaci následujících funkcí:

2.43 $y = \frac{2}{x}$

2.44 $y = (x^3 + 3x^2 - 25)^2$

2.45 $y = \frac{x^2}{x-1} + 15$

2.46 $y = \sin^2 3x \cdot \cos 3x$

2.47 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y = \frac{8}{x^2+4}$ v bodě $T = [2; y_0]$.

2.48 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce $g: y = 2 \sin 3x + 1$ v bodě $T = \left[\frac{\pi}{6}; y_0\right]$.

2.49 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce $h: y = x \cdot \ln \frac{x}{2}$ v bodě $T = [2e; y_0]$.

2.50 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y = \log x - 3$ v bodě $T = [1; y_0]$.

2.51 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y = \sin x$ v bodě $T = \left[\frac{\pi}{4}; y_0\right]$.

2.52 Ve kterém bodě má graf funkce $f: y = \sqrt{1-x^2}$ tečnu se směrnicí 1? Napište v tomto bodě rovnici tečny i normály.2.53 Napište rovnice tečen ke grafu funkce $f: y = 4x - x^2$ v jejích průsečících s osou x a y .2.54 Určete vzdálenost vrcholu paraboly $y = x^2 - 4x + 5$ od její tečny sestrojené v průsečíku paraboly s osou y .2.55 Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \sin x$ osu x ?**3. Průběh funkce**

Určete intervaly monotónnosti následujících funkcí:

3.1 $y = x^3 - 12x$

3.2 $y = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 2$

3.3 $y = 5x^6 - 6x^5 - 15x^4 - 40$

3.4 $y = x^5 - x^3$

3.5 $y = \frac{2x}{x^2+1}$

3.6 $y = \frac{1}{x} + x$

3.7 $y = \frac{x}{1-x^2} + 10$

3.8 $y = \frac{x}{1-x} + x$

3.9 $y = xe^{-x}$

3.10 $y = 2e^{-x^2}$

3.11 $y = x + \sin x$

3.12 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce:

3.13 $y = 2x^3 - 3x^2$

3.14 $y = (2x+3)(x^2+x+1)$

3.15 $y = x^3 + x^2 + x + 1$

3.16 $y = \frac{\ln x}{4x}$

3.17 $y = \ln^3 x$

3.18 $y = \left(\ln \frac{x}{2} - 1\right)^2$

3.19 $y = x - 2 \ln x$

3.20 $y = \sin 2x + 1$

3.21 $y = \cos^2 x$

3.22 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

3.23 $y = \operatorname{tg}^2 x$

3.24 $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

3.25 Najděte maximum a minimum funkce $f : y = 2x^3 - 27x^2 - 9$ v intervalu $\langle -4; 2 \rangle$.

Určete intervaly, v nichž je daná funkce konvexní a konkávní a určete jejich inflexní body:

3.26 $y = 4x^2 - 5x + 3$

3.27 $y = x^3 - 2x^5$

3.28 $y = x^4 - 4x^3$

3.29 $y = -x^3 + 6x^2 - 28$

3.30 $y = \frac{1}{x} + 1$

3.31 $y = \frac{1}{(2x+5)^2} - 4$

3.32 $y = \frac{2x-5}{x+3}$

3.33 $y = \frac{x^2}{x+1} - 10$

Vyšetřete průběhy funkcí:

3.34 $f : y = x^3 - 6x^2 + 9x$

3.35 $f : y = x^3 - 3x^2 + 7$

3.36 $f : y = \frac{x^2}{x-1}$

3.37 $f : y = \frac{5(x-2)}{x^2}$

3.38 $f : y = \sqrt{x^2 + 4x}$

3.39 $f : y = x + \sqrt[3]{x^2}$

3.40 $f : y = x + \frac{1}{x}$

3.41 $f : y = x^3 + \frac{x^4}{4}$

3.42 $f : y = x^2 \cdot e^{-x}$

3.43 $f : y = x \cdot e^{-x}$

3.44 $f : y = e^{x^2}$

3.45 $f : y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3.46 $f : y = \frac{\ln x}{x}$

3.47 $f : y = \frac{x}{\ln x}$

3.48 $f : y = \ln \left(\frac{e^x}{1-x^2} \right)$

3.49 $f : y = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

3.50 $f : y = 2x^2 - \ln x$

3.51 $f : y = x - \ln(1+x)$

3.52 $f : y = \ln(1+x^2)$

3.53 $f : y = x \cdot \ln x$

3.54 $f : y = \sin x + \cos x$

3.55 $f : y = \sin^2 x$

3.56 $f : y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

3.57 $f : y = x + \cos x$

4. Využití diferenciálního počtu

4.1 Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

4.2 Najděte pravoúhelník, který má: a) při daném obvodu maximální obsah, b) při daném obsahu minimální obvod.

4.3 Najděte rovnoramenný trojúhelník, který má při daném obvodu maximální obsah.

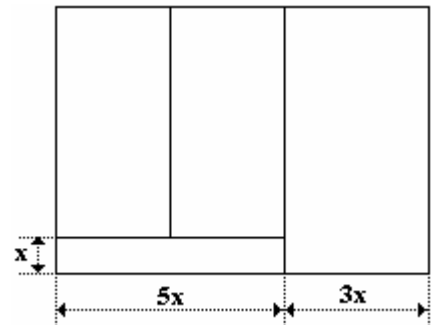
4.4 Do rovnoramenného trojúhelníku vepište pravoúhelník maximálního obsahu. Určete rozměry tohoto pravoúhelníku.

4.5 Ramena a menší základna lichoběžníka mají délku po 10 cm .

Určete jeho větší základnu tak, aby obsah lichoběžníka byl největší.

4.6 Drátěným pletivem délky 120 m je třeba ohradit obdélníkový pozemek ze tří stran (na čtvrté straně je dům) tak, aby měl největší obsah. Určete rozměry tohoto pozemku.

4.7 Celková délka všech stěn u domu znázorněného na obr. 1 má být 90 m . Při jaké šířce x chodby bude obsah podlah ostatních tří místností největší?



obr. 1

4.8 Najděte pravidelný čtyřboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem.

4.9 Do kužele o poloměru podstavy 4 dm a výšce 6 dm je vepsán válec největšího objemu. Zjistěte rozměry válce a jeho objem.

4.10 Kolikrát větší je objem koule než objem největšího válce vepsaného této kouli?

4.11 Na parabole $2x^2 - 2y - 9 = 0$ najděte bod, jehož vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je minimální.

4.12 Tvrdý papír tvaru obdélníku má rozměry 60 cm a 28 cm . V rozích se odstříhnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana odstřižených čtverců, aby objem krabice byl největší?

4.13 Jaké rozměry by musela mít podstava krabice na mléko, kdyby se mléko vyrábělo ve dvoulitrových krabicích, aby spotřeba papíru na výrobu krabice byla minimální? Krabici považujte za pravidelný čtyřboký hranol, odpad papíru na lepení, ... neuvažujte.

4.14 Zjistěte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu $32 m^3$ tak, aby na vyzdění jeho stěn a dna bylo potřeba co nejmenší množství materiálu.

4.15 Tunel má průřez ve tvaru obdélníka s přilehlým půlkruhem. Obvod průřezu je 18 m . Při jakém poloměru půlkruhu bude obsah průřezu největší?

4.16 K baterii o elektromotorickém napětí 10 V a vnitřním odporem $2\ \Omega$ je připojen spotřebič. Při jakém odporu spotřebiče bude jeho výkon maximální?

4.17 Dva světelné zdroje jsou umístěny 30 cm od sebe a poměr jejich svítivosti je $8:27$. Jak daleko od prvního zdroje leží na jejich spojnici bod, který je nejméně osvětlen? Předpokládejte, že světelné zdroje jsou stejného druhu a že paprsky dopadají na uvažované místo kolmo.

4.18 Silnice, která má šířku b , je osvětlována lampou, která je nad osou silnice. V jaké výšce nad silnicí musí být lampa, aby okraj silnice byl co nejvíce osvětlen?

4.19 Určete, kdy jsou si nejbližší předmět a skutečný obraz vytvořený spojnou čočkou o dané ohniskové vzdálenosti f .

4.20 Průřez odpadového kanálu má tvar rovnoramenného lichoběžníku. Jeho hloubka je h , obsah průřezu S . Jaký má být sklon bočních stěn, má-li být spotřeba materiálu na vyzdění kanálu minimální?

4.21 Základna nakloněné roviny má délku d . Určete (při konstantním d) výšku nakloněné roviny tak, aby kulička o hmotnosti m sjela z vrcholu nakloněné roviny v nejkratším čase. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

4.22 Drát délky 200 mm rozdělte na dvě části. Jednu potom ohněte do tvaru kruhu, druhou do tvaru čtverce. Rozdělení drátu proveďte tak, aby součet obsahů obou vytvořených ploch byl co nejmenší.

5. Neurčitý integrál

K dané funkci f určete v jejím definičním oboru primitivní funkci F tak, aby graf funkce F procházel daným bodem:

5.1 $f: y = 2 \sin x$; $A = \left[\frac{\pi}{3}; 3 \right]$

5.2 $f: y = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}$; $B = [1; -4]$

5.3 $f: y = 4e^x + 5 \sin x$; $C = [0; 5]$

5.4 $f: y = -1 + \frac{4}{x}$; $D = [e; -2]$

Vypočtěte:

5.5 $\int (x^3 + 5x^2 - 4x + 7) dx$

5.6 $\int (x+3)^2 (x-2) dx$

5.7 $\int \frac{x^5 + 3x^3 + 1}{4x^3} dx$

5.8 $\int \frac{x\sqrt{x^3} - 2\sqrt[4]{x^5} - 1}{x^2\sqrt[3]{x^4}} dx$

5.9 $\int \sqrt[6]{\frac{x^2\sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt{x}}} dx$

5.10 $\int \frac{x^3 + ax^2 + b}{5x} dx$

5.11 $\int \left(\frac{5-x^2}{x^3} \right)^2 dx$

5.12 $\int \left(\frac{x+3a}{a^2} \right)^3 dx$

5.13 $\int (4e^x + \cos x) dx$

5.14 $\int \frac{2 \sin 2x}{5 \sin x} dx$

5.15 $\int \frac{\sqrt{2} \sin 2x}{3 \cos x} dx$

5.16 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

5.17 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

5.18 $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

5.19 $\int (5 \sin^2 x + 5 \cos^2 x) dx$

5.20 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

5.21 $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

5.22 $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$

5.23 $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$

5.24 $\int \frac{3 - 2 \operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

5.25 $\int x \sin x dx$

5.26 $\int x \cos x dx$

5.27 $\int x^2 \cdot \sin x dx$

5.28 $\int x e^x dx$

5.29 $\int x^2 \cdot e^x dx$

5.30 $\int \ln x dx$

5.31 $\int x^2 \cdot \ln x dx$

5.32 $\int x^3 \cdot \ln x dx$

5.33 $\int \ln^2 x dx$

5.34 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

5.35 $\int \cos^2 x dx$

5.36 $\int e^x \cdot \sin x dx$

5.37 $\int e^x \cdot \cos x dx$

5.38 $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

5.39 $\int \frac{3 \ln x}{5x} dx$

5.40 $\int x e^{2x} dx$

5.41 $\int x \cdot \ln(x-1) dx$

5.42 $\int \frac{2x}{\sin^2 x} dx$

5.43 $\int \cos(\ln x) dx$

5.44 $\int x^3 \cdot e^{-x} dx$

5.45 $\int (4x+5)^8 dx$

5.46 $\int \frac{1}{(3x+2)^3} dx$

5.47 $\int \frac{4x}{x^2+1} dx$

5.48 $\int \frac{4x}{(x^2-5)^3} dx$

5.49 $\int x \sqrt{1-4x^2} dx$

5.50 $\int \sqrt[3]{5-6x} dx$

5.51 $\int x^3 \sqrt{2+5x^4} dx$

5.52 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$

5.53 $\int \frac{x^2}{1-3x^3} dx$

5.54 $\int \frac{dx}{(a-bx)^3} dx$

5.55 $\int \frac{x-5}{x+2} dx$

5.56 $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

5.57 $\int \sin^2 x dx$

5.58 $\int \frac{4}{\cos^2(3x+2)} dx$

5.59 $\int x \sin(x^2+3) dx$

5.60 $\int x^2 \cos(2-x^3) dx$

5.61 $\int \operatorname{tg} x dx$

5.62 $\int e^{2x+9} dx$

5.63 $\int x e^{1-5x} dx$

5.64 $\int (x+3) e^{x^2+6x} dx$

$$\begin{array}{lllll}
 5.65 \int (2e^x + e^{-x})^2 dx & 5.66 \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx & 5.67 \int e^{x^2} \cdot x^2 dx & 5.68 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & 5.69 \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx \\
 5.70 \int (1 + 3 \cos 2x) dx & 5.71 \int (1 + 3 \cos 2x)^2 dx & 5.72 \int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx & &
 \end{array}$$

6. Určitý integrál

Vypočtete:

$$6.1 \int_1^2 (4x^3 - 2x + 1) dx \quad 6.2 \int_2^4 (2\sqrt{x^3} + 1) dx \quad 6.3 \int_0^\pi 0,5(\sin x + \cos x) dx \quad 6.4 \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx \quad 6.5 \int_{-5}^{10} 4 dx$$

6.6 Vypočtete integrál $\int_{-1}^5 f(x) dx$, je-li $f(x) = 2x^2$ pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$, $f(x) = x + 1$ pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$ a $f(x) = \frac{6}{x}$ pro $x \in \langle 2; 5 \rangle$.

6.7 Vypočtete integrál $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx$, je-li $f(x) = \sin x$ pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$ a $f(x) = \cos x + 1$ pro $x \in \langle \pi; \frac{3}{2}\pi \rangle$.

Vypočtete:

$$6.8 \int_{-4}^2 2\sqrt{17-4x} dx \quad 6.9 \int_0^1 \frac{x}{(4x^2+1)^2} dx \quad 6.10 \int_{-1}^1 x^2(2x^3-1)^{15} dx \quad 6.11 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$$

$$6.12 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx \quad 6.13 \int_{-\pi}^{2\pi} 4 \sin x \cdot \cos x dx \quad 6.14 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin^2\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)} dx \quad 6.15 \int_0^1 3xe^{2x^2+1} dx$$

$$6.16 \int_0^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx \quad 6.17 \int_e^4 \frac{dx}{2x \cdot \ln x} \quad 6.18 \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \quad 6.19 \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$6.20 \int_1^{2e} \frac{1}{2} \ln x dx \quad 6.21 \int_0^\pi (2x+3) \sin x dx \quad 6.22 \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} x^2 \cdot \cos x dx \quad 6.23 \int_1^e 4x \cdot \ln x dx \quad 6.24 \int_e^{3e} \frac{\ln x}{x^3} dx$$

7. Užití integrálního počtu

7.1 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$ a $x = 1$.

7.2 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = (x+2)^3$, $y = 0$ a $x = -4$.

7.3 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$ a $x = 0$.

7.4 Vypočtete obsah plochy pod jedním „obloukem“ funkce $y = \sin x$.

7.5 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^3$ a $y = \sqrt{x}$.

7.6 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

7.7 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 - 6$ a $y = x$.

7.8 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 - 1$ a $y = 1 - x^2$.

7.9 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $x^2 + y = 4$ a $y = \frac{3}{x^2}$.

7.10 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^4$, $y = x^2$ a $y = 16$.

7.11 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 + 3$, $x + y - 9 = 0$ a osami x a y .

7.12 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 - 4x + 2$ a $y = -x^2 + 6x - 6$.

7.13 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = e^x$, $y = e^{-2x}$ a $x = 1$.

7.14 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \cos x$ a $y = \left| \frac{2\sqrt{2}}{\pi} x \right|$. (Nápověda: křivky se protnou v bodě $P = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.)

7.15 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $T_1 = [0; -3]$ a $T_2 = [3; 0]$.

7.16 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = x^2$, $y = 0$ a $x = 2$ kolem osy x .

7.17 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = \ln x$, $y = 0$ a $x = e$ kolem osy x .

7.18 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 1$ a $x = 4$ kolem osy x .

7.19 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = x$ a $y = 0$ kolem osy x .

7.20 Vypočtete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $x + y - 5 = 0$, $x = -5$, $x = 4$ a osou x . Vypočtete též objem tělesa, které vznikne rotací právě popsaného útvaru kolem osy x .

7.21 Vypočtete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$ a $y = -2$ kolem osy y .

7.22 Vypočtete objem kulové úseče, která je částí koule o poloměru r a jejíž výška je v .

7.23 Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru r .

7.24 Určete práci potřebnou k vynesení družice o hmotnosti 250 kg do výšky 300 km nad povrch Země. Hmotnost Země je $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, poloměr Země 6378 km a gravitační konstanta $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Při řešení neuvážíte kinetickou energii družice.

7.25 Vypočtete velikost tlakové síly, kterou působí voda na svislá obdélníková vrata propusti se základnou 8 m a výškou 6 m . Vypočtete také tlakovou sílu působící jen na dolní polovinu vrat.

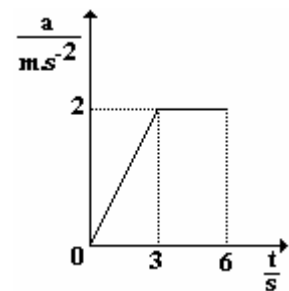
7.26 Vypočtete velikost tlakové síly, kterou působí voda na svislou desku ve tvaru rovnoramenného trojúhelníka ponořenou ve vodě, jejíž základna délky l je v úrovni vodní hladiny a výška je rovna h .

7.27 Vypočtete velikost tlakové síly, kterou působí voda na svislý polokruh, jehož průměr $2r$ je v úrovni vodní hladiny.

7.28 Čelo přehrady má průřez rovnoramenného lichoběžníka s horní základnou 20 m , dolní základnou 10 m a výškou 6 m . Vypočítejte velikost tlakové síly, kterou působí voda na přehradu.

7.29 Určete velikost tlakové síly, která působí na svislou desku tvaru rovnoramenného trojúhelníku, jejíž základna délky a , rovnoběžná s vodní hladinou, je v hloubce h a protilehlý vrchol leží v úrovni vodní hladiny.

7.30 Na obr. 2 je znázorněn graf závislosti velikosti zrychlení na čase pro pohyb hmotného bodu, který začínal svůj pohyb z klidu. Popište pohyb hmotného bodu, určete velikost rychlosti na konci sledovaného úseku a celkovou uraženou dráhu.



obr. 2

ŘEŠENÍ**1. Limita funkce - výpočty, užítí**

1.1 3	1.9 1	1.19 $\frac{1}{2}$	1.29 $\frac{3}{2}$	1.37 $\frac{1}{4}$	1.43 $\frac{1}{2}$
1.2 $\frac{3}{2}$	1.10 5	1.20 $\frac{1}{5}$	1.30 $-\frac{1}{56}$	1.38 $\frac{1}{2}$	1.44 3
1.3 -1	1.11 -1	1.21 10	1.31 8	1.39 $\frac{3}{4}$	1.45 neexistuje
1.4 $-\frac{1}{2}$	1.12 2	1.22 2	1.32 2	1.40 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1.46 ∞
1.5 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	1.13 3	1.23 28	1.33 $\frac{1}{2}$	1.41 $\frac{1}{4}$	1.47 $-\infty$
1.6 0	1.14 -6	1.24 $\frac{3}{2}$	1.34 1	1.42 $4\sqrt{2}$	1.48 $-\infty$
1.7 $\frac{1}{2}$	1.15 neexistuje	1.25 neexistuje	1.35 2		1.49 ∞
1.8 $\frac{3}{2}$	1.16 $\frac{2}{3}$	1.26 -4	1.36 $\frac{1}{2}$		1.50 ∞
	1.17 0	1.27 -3			1.51 $\frac{4}{3}$
	1.18 4	1.28 2			1.52 0

1.54 2; $x > \frac{4999}{2}$	1.57 $y = 0$	1.61 $x = 0$; $y = 0,5x - 0,5$	1.65 asymptoty nejsou
1.55 $-\frac{1}{2}$; $x > \frac{\sqrt{99}}{10}$	1.58 $x = -1$; $y = x$	1.62 $y = -x - 1$	1.66 $x + y - 2 = 0$
1.56 $x = 0$; $y = x$	1.59 $y = 1$	1.63 $y = 2$	1.67 $4x - y - 3 = 0$
	1.60 $y = x$	1.64 $x = 2$; $y = 3x$	1.68 $2x - y = 0$

2. Derivace - výpočty, tečna grafu funkce

2.1 0	2.3 $3x^2$	2.5 $\frac{4}{x^5}$	2.6 $1 - \frac{2}{(x+6)^2}$
2.2 -5	2.4 $4x + 4$		
2.7 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 4x^3 + 6x$			2.22 $D(f) = \mathbb{R} - \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $y' = \frac{-1}{1 - \cos x}$
2.8 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $y' = -\frac{1}{5x^2}$			2.23 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 2(2x^4 - x)(8x^3 - 1)$
2.9 $D(f) = \langle 0; \infty \rangle$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (pro $x \in (0; \infty)$)			2.24 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = (3x^2 - 4x + 1) \cdot \cos(x^3 - 2x^2 + x)$
2.10 $D(f) = (0; \infty)$; $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$			2.25 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = -(2x + 3) \cdot \sin(2(x^2 + 3x - 5))$
2.11 $D(f) = (0; \infty)$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$			2.26 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = -6x(-x^2 + 3)^2 \cdot \sin(2(-x^3 + 3)^3)$
2.12 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = \cos x$			2.27 $D(f) = (-5; \infty)$; $y' = \frac{1}{x+5}$
2.13 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = \sin x + \cos x$			2.28 $D(f) = (0; 1)$; $y' = \frac{-2x+1}{-x^2+x}$
2.14 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 2x + \cos x$			2.29 $D(f) = (-5; 0) \cup (3; \infty)$; $y' = 2 \frac{(3x^2 + 4x - 15) \cdot \log(x^3 + 2x^2 - 15x)}{(x^3 + 2x^2 - 15x) \cdot \ln 10}$
2.15 $D(f) = \langle 0; \infty \rangle$; $y' = 3\sqrt{x}$ (pro $x \in (0; \infty)$)			2.30 $D(f) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$; $y' = \frac{12x \cdot \log_{\pi}(x^2 - 4)^3}{(x^2 - 4) \cdot \ln \pi}$
2.16 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = \sin 2x$			2.31 $D(f) = \emptyset$; derivace neexistuje
2.17 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 2 \sin x + 2x \cos x$			2.32 $D(f) = (2k\pi; (2k+1)\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$; $y' = \frac{1}{\sin x}$
2.18 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $y' = 2 \frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$			
2.19 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $y' = \frac{x^3 + x - 4}{x^3}$			

2.20 $D(f) = (0; \infty)$; $y' = \frac{\sqrt{x}}{2x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

2.33 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = e^x + e^x \cdot e^{e^x} + e^x \cdot e^{e^x} \cdot e^{e^{e^x}}$

2.21 $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$; $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

2.34 $D(f) = \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$; $y' = \frac{\sqrt{2}}{3x^2 - 4}$

2.35 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = 6e^{3x+2}$

2.36 $D(f) = \mathbb{R}$; $y' = -(2x+1)e^{x^2+x+2}$

2.37 $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $y' = e^{x-2} \left(\operatorname{tg} x^3 + \frac{3x^2}{\cos^2 x^3} \right)$

2.38 $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}(\sqrt[3]{k\pi} - 1); k \in \mathbb{Z} \right\}$; $y' = 2.5^{x^2-2} \cdot \operatorname{cotg}(2x+1)^3 \left(x \cdot \operatorname{cotg}(2x+1)^3 \cdot \ln 5 - \frac{6(2x+1)^2}{\sin^2(2x+1)^3} \right)$

2.39 $D(f) = (-\infty; 1)$; $y' = -\sqrt{1-x} \left(\frac{\cos x}{1-x} + 2 \sin x \right)$ (pro $x \in (-\infty; 1)$)

2.40 $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $y' = 3x^2 \cdot \cos x^3$

2.41 $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $y' = e^{\cos x + \sin x} \left((\cos x - \sin x) \cdot \operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

2.42 $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $y' = e^{\operatorname{tg} x + x^2} \left(\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \right) (x^2 + 4x - 7) + 2x + 4 \right)$

2.43 $y' = -\frac{2}{x^2}$; $y'' = \frac{4}{x^3}$

2.44 $y' = 2(x^3 + 3x^2 - 25)(3x^2 + 6x)$; $y'' = 2(3x^2 + 6x)^2 + 2(x^3 + 3x^2 - 25)(6x + 6)$

2.45 $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$

2.46 $y' = 3 \cos 3x \cdot \sin 6x - 3 \sin^3 3x$; $y'' = -9 \sin 3x \cdot \sin 6x + 18 \cos 3x \cdot \cos 6x - \frac{27}{2} \sin 6x$

2.47 $x + 2y - 4 = 0$

2.49 $t: 2x - y - 2e = 0, n: x + 2y - 6e = 0$

2.51 $x\sqrt{2} - 2y + \sqrt{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

2.48 $t: y - 3 = 0, n: x - \frac{\pi}{6} = 0$

2.50 $x - y \ln 10 - 3 \ln 10 - 1 = 0$

2.52 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}: t: x - y = 0, n: x + y - \sqrt{2} = 0; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}: t: x - y + \sqrt{2} = 0, n: x + y = 0$

2.53 $[0; 0]: 4x - y = 0; [4; 0]: 4x + y - 16 = 0$

2.54 $\frac{16\sqrt{37}}{37}$

2.55 $\pm \frac{\pi}{4}$

3. Průběh funkce

Ve výsledcích úloh 3.1 až 3.24 je uvedena spolu s definičním oborem pouze množina, v níž je zadaná funkce rostoucí. Množina, v níž je funkce klesající, tvoří doplněk do definičního oboru dané funkce.

3.1 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

3.7 $D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}; x \in D(f)$

3.2 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-2; 0) \cup (4; \infty)$

3.8 $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}; x \in D(f)$

3.3 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-1; 0) \cup (2; \infty)$

3.9 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-\infty; 1)$

3.4 $D(f) = \mathbb{R}; x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{5}; \infty\right)$

3.10 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-\infty; 0)$

3.5 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-1; 1)$

3.11 $D(f) = \mathbb{R}; x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

3.6 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}; x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

3.12 $D(f) = (0; \infty); x \in (0; e^2)$

3.13 $D(f) = \mathbb{R}; x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty); x_{\max} = 0, x_{\min} = 1$

3.14 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in D(f)$; extrémů neexistují

3.15 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in D(f)$; extrémů neexistují

3.16 $D(f) = (0; \infty)$; $x \in (0; e^4)$; $x_{\max} = e^4$, minimum není

3.17 $D(f) = (0; \infty)$; $x \in D(f)$; extrémů neexistují

3.18 $D(f) = (0; \infty)$; $x \in (2e; \infty)$; $x_{\min} = 2e$, maximum není

3.19 $D(f) = (0; \infty)$; $x \in (2; \infty)$; $x_{\min} = 2$, maximum není

3.20 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in \left(\frac{\pi}{4}(4k-1); \frac{\pi}{4}(4k+1)\right)$; $k \in \mathbb{Z}$; $x_{\max} \in \left\{\frac{\pi}{4}(4k+1); k \in \mathbb{Z}\right\}$, $x_{\min} \in \left\{\frac{\pi}{4}(4k-1); k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.21 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in \left(\frac{\pi}{2}(2k+1); (k+1)\pi\right)$; $k \in \mathbb{Z}$; $x_{\max} \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $x_{\min} \in \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1); k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.22 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in \left(\frac{\pi}{4}(8k+1); \frac{\pi}{2}(2k+1)\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}(4k+3); 2\pi(k+1)\right) \cup \left(\pi(2k+1); \frac{\pi}{4}(8k+5)\right)$; $k \in \mathbb{Z}$; $x_{\max} \in \left\{\frac{\pi}{2}(4k+1); \frac{\pi}{4}(8k+5); 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $x_{\min} \in \left\{\frac{\pi}{4}(8k+1); \frac{\pi}{2}(4k+3); \pi(2k+1); k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.23 $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1); k \in \mathbb{Z}\right\}$; $x \in \left(k\pi; \frac{\pi}{2}(2k+1)\right)$; $k \in \mathbb{Z}$; $x_{\min} \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, maxima nejsou

3.24 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in D(f)$; extrémů neexistují

3.25 $D(f) = \mathbb{R}$; $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -4$

Ve výsledcích úloh 3.26 až 3.33 je uvedena spolu s definičním oborem pouze množina, v níž je zadaná funkce konvexní. Množina, v níž je funkce konkávní, tvoří doplněk do definičního oboru dané funkce.

3.26 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in D(f)$; inflexní bod není

3.27 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{10}\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{15}}{10}\right)$; $x_{\inf} \in \left\{-\frac{\sqrt{15}}{10}; 0; \frac{\sqrt{15}}{10}\right\}$

3.28 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$; $x_{\inf} \in \{0; 2\}$

3.29 $D(f) = \mathbb{R}$; $x \in (-2; \infty)$; $x_{\inf} = 2$

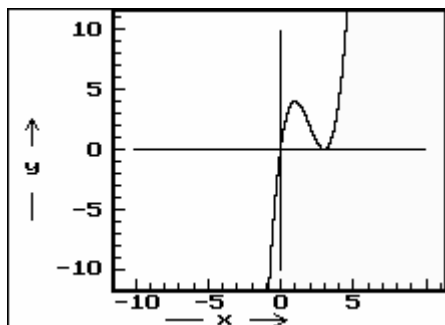
3.30 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $x \in (0; \infty)$; inflexní bod není

3.31 $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$; $x \in D(f)$; inflexní bod není

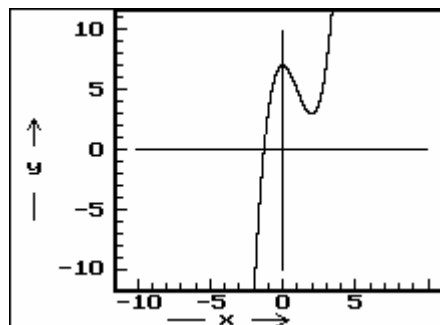
3.32 $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$; $x \in (-\infty; -3)$; inflexní bod není

3.33 $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$; $x \in (-\infty; -1)$; inflexní bod není

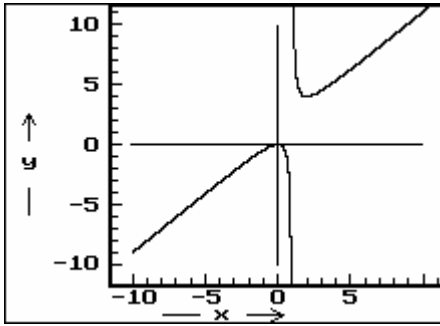
3.34 $D(f) = \mathbb{R}$



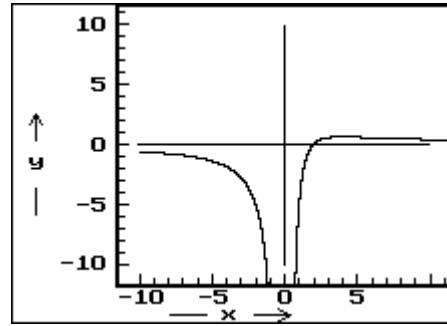
3.35 $D(f) = \mathbb{R}$



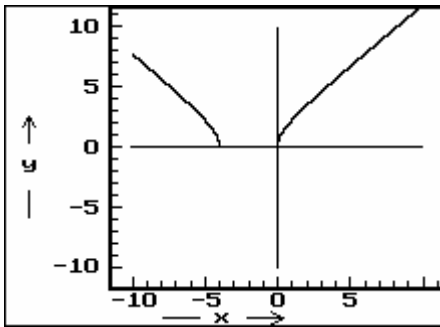
3.36 $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$



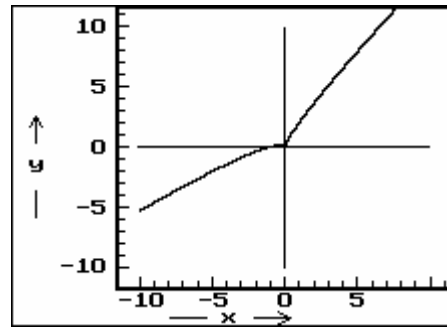
3.37 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$



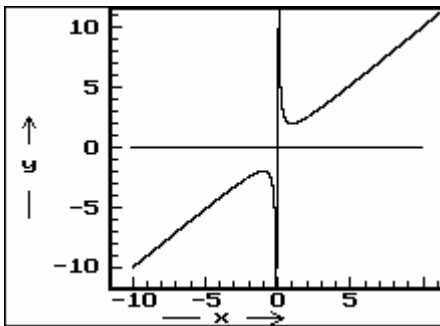
3.38 $D(f) = \mathbb{R} - (-4; 0)$



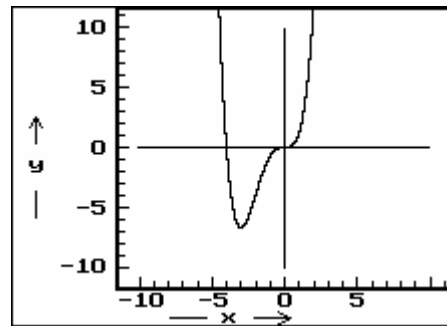
3.39 $D(f) = \mathbb{R}$



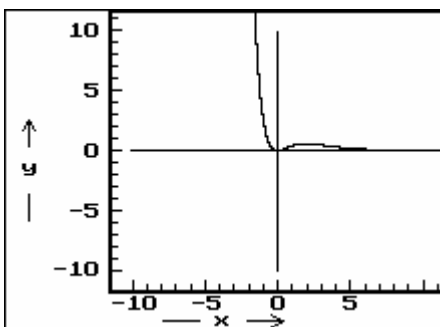
3.40 $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$



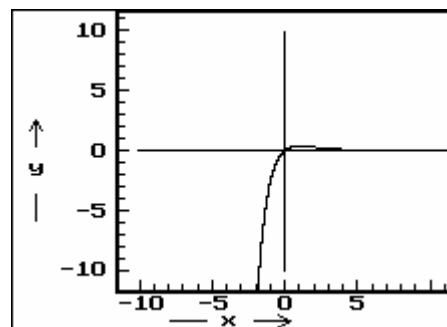
3.41 $D(f) = \mathbb{R}$



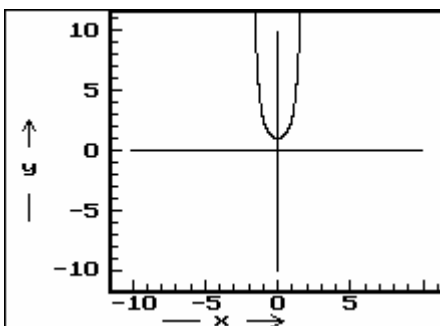
3.42 $D(f) = \mathbb{R}$



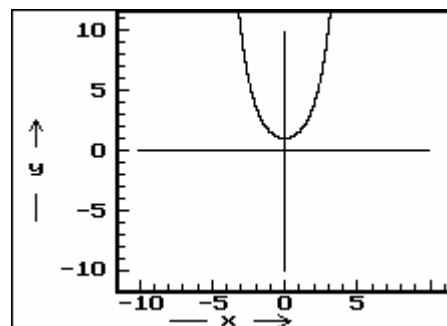
3.43 $D(f) = \mathbb{R}$



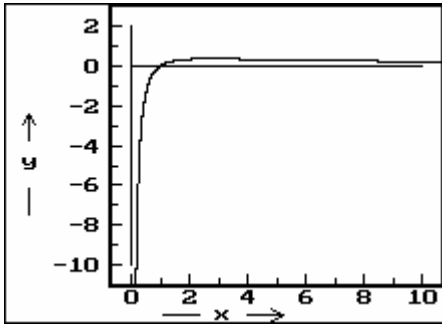
3.44 $D(f) = \mathbb{R}$



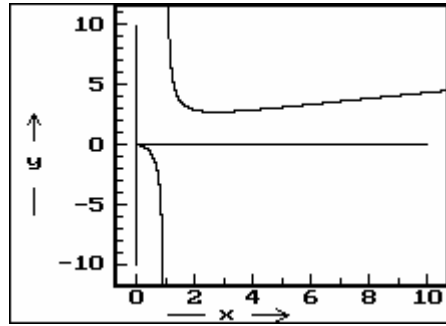
3.45 $D(f) = \mathbb{R}$



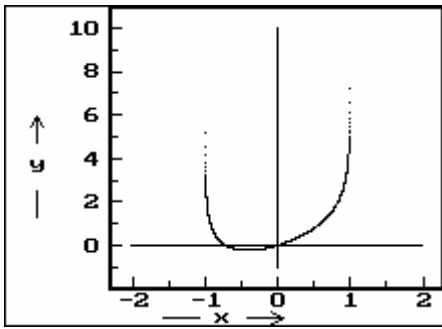
3.46 $D(f) = (0; \infty)$



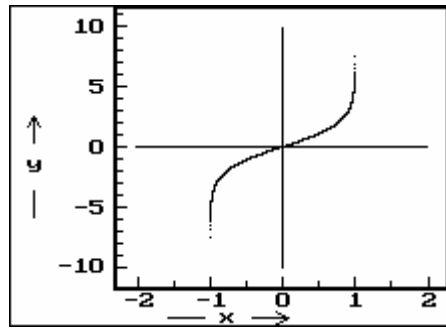
3.47 $D(f) = (0; 1) \cup (1; \infty)$



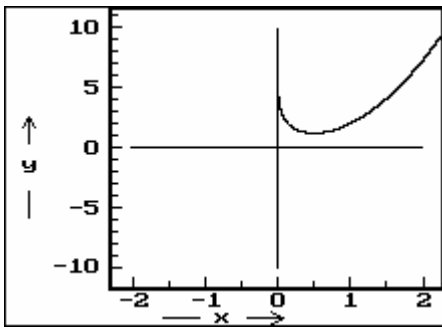
3.48 $D(f) = (-1; 1)$



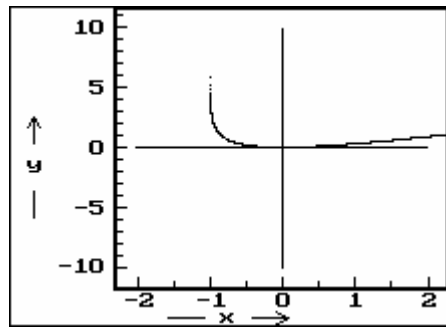
3.49 $D(f) = (-1; 1)$



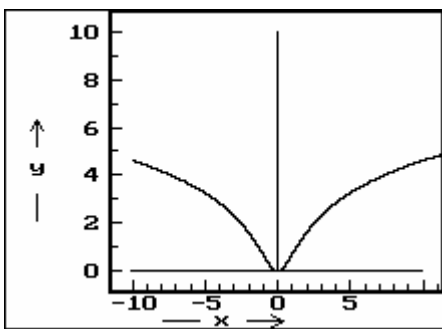
3.50 $D(f) = (0; \infty)$



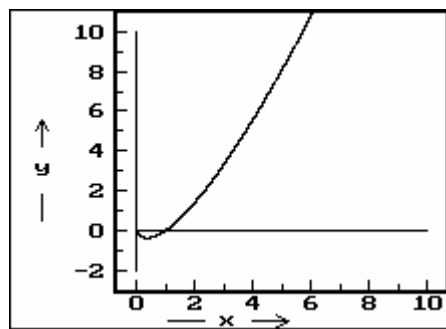
3.51 $D(f) = (-1; \infty)$



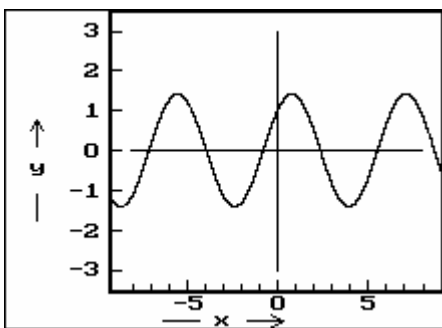
3.52 $D(f) = \mathbb{R}$



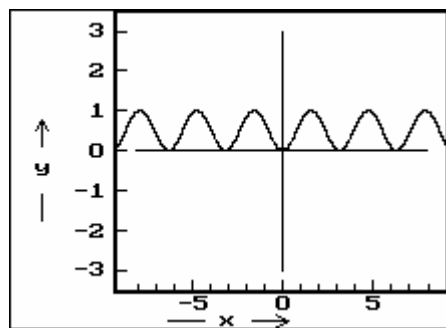
3.53 $D(f) = (0; \infty)$

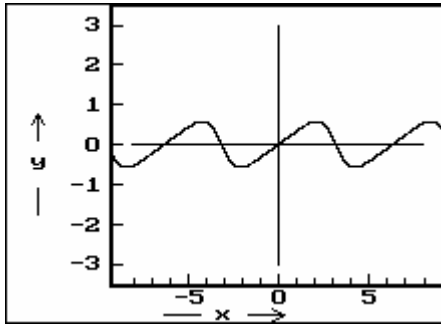
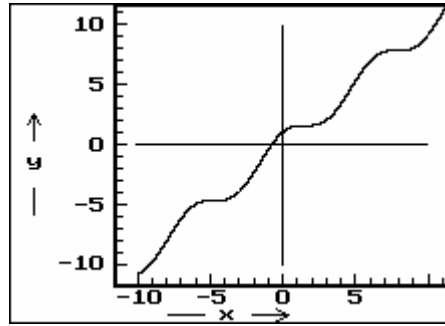


3.54 $D(f) = \mathbb{R}$



3.55 $D(f) = \mathbb{R}$



3.56 $D(f) = \mathbb{R}$ 3.57 $D(f) = \mathbb{R}$ **4. Využití diferenciálního počtu**

4.1 14 a 14

4.2 a) čtverec, b) čtverec

4.3 trojúhelník je rovnostranný

4.4 $\frac{z}{2} \times \frac{v}{2}$, kde z je délka základny a v výška trojúhelníka

4.5 20 cm

4.6 30 m × 60 m

4.7 2 m

4.8 $a = \frac{\sqrt{2P}}{4}$, $v = \frac{3}{8}\sqrt{2P}$, kde P je povrch hranolu4.9 $r = \frac{8}{3} dm$, $v = 2 dm$, $V = \frac{128\pi}{9} dm^3$ 4.10 $\sqrt{3}$ krát4.11 $A = \left[2; -\frac{1}{2}\right]$

4.12 čtverec o straně 6 cm

4.13 $a = \sqrt[3]{2} dm = 1,26 dm$ 4.14 $a = 4 m$ 4.15 $a = \frac{18}{4+\pi} m \doteq 2,5 m$ 4.16 2 Ω

4.17 12 cm

4.18 $x = \frac{b\sqrt{2}}{4}$ 4.19 $a = 2f$ 4.20 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 4.21 $h = d$ 4.22 čtverec: $\frac{4d}{\pi+4} \doteq 112 mm$, kruh: $\frac{\pi d}{\pi+4} \doteq 88 mm$ **5. Neurčitý integrál**5.1 $F(x) = -2\cos x + 4$ 5.2 $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$ 5.3 $F(x) = 4e^x - 5\cos x + 6$ 5.4 $F(x) = -x + 4\ln|x| - 6 + e$ 5.5 $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2 + 7x + C$ 5.6 $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 18x + C$ 5.7 $\int f(x) dx = \frac{x^3}{12} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8x^2} + C$ 5.8 $\int f(x) dx = 6\sqrt[6]{x} + \frac{24}{13x \cdot \sqrt[6]{x}} + \frac{3}{7x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} + C$ 5.9 $\int f(x) dx = \frac{36x \cdot \sqrt[36]{x^{17}}}{53 \cdot \sqrt[6]{3}} + C$ 5.10 $\int f(x) dx = \frac{x^3}{15} + \frac{ax^2}{10} + \frac{b}{5}\ln|x| + C$ 5.11 $\int f(x) dx = \frac{-5}{x^5} + \frac{10}{3x^3} - \frac{1}{2x} + C$ 5.39 $\int f(x) dx = \frac{3\ln^2 x}{10} + C$ 5.40 $\int f(x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ 5.41 $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\ln(x-1)(x^2-1) - \frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2}+1\right) + C$ 5.42 $\int f(x) dx = -2x \cotg x + 2\ln|\sin x| + C$ 5.43 $\int f(x) dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$ 5.44 $\int f(x) dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$ 5.45 $\int f(x) dx = \frac{(4x+5)^9}{36} + C$ 5.46 $\int f(x) dx = \frac{-1}{6(3x+2)^2} + C$ 5.47 $\int f(x) dx = 2\ln(x^2+1) + C$ 5.48 $\int f(x) dx = \frac{-1}{(x^2-5)^2} + C$ 5.49 $\int f(x) dx = \frac{-1}{12}\sqrt{(1-4x^2)^3} + C$

$$\begin{aligned}
5.12 \int f(x) dx &= \frac{1}{a^6} \left(\frac{x^4}{4} + 3ax^3 + \frac{27}{2}a^2x^2 + 27a^3x \right) + C & 5.50 \int f(x) dx &= \frac{-1}{8} \sqrt[3]{(5-6x)^4} + C \\
5.13 \int f(x) dx &= 4e^x + \sin x + C & 5.51 \int f(x) dx &= \frac{1}{25} \sqrt[4]{(2+5x^2)^5} + C \\
5.14 \int f(x) dx &= \frac{4}{5} \sin x + C & 5.52 \int f(x) dx &= \frac{-2}{3} \sqrt{2-3x} + C \\
5.15 \int f(x) dx &= \frac{-2\sqrt{3}}{3} \cos x + C & 5.53 \int f(x) dx &= \frac{-1}{9} \ln|1-3x^3| + C \\
5.16 \int f(x) dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x + C & 5.54 \int f(x) dx &= \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{(a-bx)^2} + C \\
5.17 \int f(x) dx &= -\cotg x - 2x + C & 5.55 \int f(x) dx &= x - 7 \ln|x+2| + C \\
5.18 \int f(x) dx &= -\cotg x - x + C & 5.56 \int f(x) dx &= -\frac{\cos x}{2} + C \\
5.19 \int f(x) dx &= 5x + C & 5.57 \int f(x) dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \\
5.20 \int f(x) dx &= \operatorname{tg} x - \cotg x + C & 5.58 \int f(x) dx &= \frac{4}{3} \operatorname{tg}(3x+2) + C \\
5.21 \int f(x) dx &= -\cotg x + \cos x + C & 5.59 \int f(x) dx &= -\frac{1}{2} \cos(x^2+3) + C \\
5.22 \int f(x) dx &= e^x + \operatorname{tg} x + C & 5.60 \int f(x) dx &= -\frac{1}{3} \sin(2-x^3) + C \\
5.23 \int f(x) dx &= x + \cos x + C & 5.61 \int f(x) dx &= -\ln|\cos x| + C \\
5.24 \int f(x) dx &= 3 \operatorname{tg} x + 2 \cotg x + C & 5.62 \int f(x) dx &= \frac{1}{2} e^{2x+9} + C \\
5.25 \int f(x) dx &= -x \cos x + \sin x + C & 5.63 \int f(x) dx &= -\frac{1}{5} e^{1-5x} \left(x + \frac{1}{5} \right) + C \\
5.26 \int f(x) dx &= x \sin x + \cos x + C & 5.64 \int f(x) dx &= \frac{1}{2} e^{x^2+6x} + C \\
5.27 \int f(x) dx &= 2x \sin x + (2-x^2) \cos x + C & 5.65 \int f(x) dx &= 2e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + 4x + C \\
5.28 \int f(x) dx &= e^x(x-1) + C & 5.66 \int f(x) dx &= e^{\sin x} + C \\
5.29 \int f(x) dx &= e^x(x^2-2x+2) + C & 5.67 \int f(x) dx &= \frac{1}{2} e^{x^2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + C \\
5.30 \int f(x) dx &= x(\ln x - 1) + C & 5.68 \int f(x) dx &= 2e^{\sqrt{x}} + C \\
5.31 \int f(x) dx &= \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C & 5.69 \int f(x) dx &= \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C \\
5.32 \int f(x) dx &= \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C & 5.70 \int f(x) dx &= x + \frac{3}{2} \sin 2x + C \\
5.33 \int f(x) dx &= x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C & 5.71 \int f(x) dx &= \frac{11}{2}x + 3 \sin 2x + \frac{9}{8} \sin 4x + C \\
5.34 \int f(x) dx &= -\frac{1}{x}(1 + \ln x) + C & 5.72 \int f(x) dx &= -x - \frac{1}{2} \ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C \\
5.35 \int f(x) dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \\
5.36 \int f(x) dx &= \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C \\
5.37 \int f(x) dx &= \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C \\
5.38 \int f(x) dx &= \frac{\ln^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

6. Určitý integrál

6.1 15

$$6.10 \frac{1}{96} (1-3^{16})$$

$$6.17 \frac{1}{2} \ln(\ln 4)$$

6.2 $\frac{138}{5} - \frac{16}{5}\sqrt{2}$

6.3 1

6.4 1

6.5 60

6.6 $\frac{23}{6} + 6\ln\frac{5}{2}$

6.7 $1 + \frac{\pi}{2}$

6.8 $-\frac{1}{3}(27 - \sqrt{33^3})$

6.9 $\frac{1}{10}$

6.11 $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

6.12 $\frac{3}{8}$

6.13 0

6.14 $-\frac{\pi}{2}$

6.15 $\frac{3}{4}e(e^2 - 1)$

6.16 $\frac{1}{3}\ln\frac{e^6 + 1}{2}$

6.18 $4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

6.19 $2 - \sqrt{3}$

6.20 $e + \frac{1}{2}$

6.21 $2\pi + 6$

6.22 $-\frac{9}{4}\pi^2 + 5\pi + 2$

6.23 $e^2 + 1$

6.24 $\frac{-\ln 3e + 13}{18e^2}$

7. Užití integrálního počtu

7.1 9

7.2 4

7.3 $1 - \frac{1}{e}$

7.4 2

7.5 $\frac{5}{12}$

7.6 $\frac{1}{4}$

7.7 $20\frac{5}{6}$

7.8 $\frac{8}{3}$

7.9 $\frac{2(12\sqrt{3} - 20)}{3}$

7.10 $\frac{512}{15}$

7.11 $\frac{199}{6}$

7.12 9

7.13 $e + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2} - 3\right)$

7.14 $\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)$

7.15 $\frac{9}{4}$

7.16 $\frac{32}{5}\pi$

7.17 $(e - 2)\pi$

7.18 $\frac{12}{5}\pi$

7.19 π

7.20 $\frac{63}{2}, \frac{2807}{15}\pi$

7.21 $\frac{64}{3}\pi$

7.22 $V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$

7.23 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

7.24 $W = \frac{\kappa m M_z h}{(R_z + h)R_z} = 7 \cdot 10^8 \text{ J}$

7.25 $F = \frac{\rho g a h^2}{2} = 144 \cdot 10^4 \text{ N}, F = \frac{3\rho g a h^2}{8} = 108 \cdot 10^4 \text{ N}$

7.26 $F = \frac{\rho g l h^2}{6}$

7.27 $F = \frac{2\rho g r^3}{3}$

7.28 $F = \frac{\rho g h^2 (a + 2c)}{6} = 240 \cdot 10^4 \text{ N}$

7.29 $F = \frac{\rho g a h^2}{3} = 144 \cdot 10^4 \text{ N}$

7.30 $9 \text{ m.s}^{-1}, 30 \text{ m}$