

## 11. Dělitelnost v množině celých čísel

- 1) Dokažte, že pro všechna přirozená  $n$  platí  $5 \mid (n + 2) \Rightarrow 25 \mid (n^2 - n - 6)$ .
- 2) Určete všechny dvojice  $x, y \in N$ , pro něž:
  - a)  $D(x, y) = 6, n(x, y) = 72$
  - b)  $D(x, y) = 21, n(x, y) = 441$
- 3) Dokažte, že nejvýše jedna dvojice  $x, y \in N$  splňuje rovnici  $y^2 - x^2 = 11$ .
- 4) Napište obměnu, obrácení a negaci výroku:  
 $\forall k \in Z : 3 \mid k^2 \Rightarrow 3 \mid k$   
Rozhodněte o pravdivosti.
- 5) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla  $n$  platí, že číslo  $A = n^3 + 2n$  je dělitelné třemi.
- 6) Dokažte, že pro každé liché  $x \in N$  je výraz  $V = x^3 + 3x^2 - x - 3$  dělitelný číslem 48.
- 7) Dokažte, že součet čtverců dvou po sobě následujících přirozených čísel zmenšený o 1 je dělitelný čtyřmi.
- 8) Dokažte, že pro všechna celá čísla  $k$  větší než 1 je jedno z čísel  $k, k^2 + 1, k^2 - 1$  dělitelné pěti.
- 9) Jsou dána 2 přirozená čísla  $x, y$ .  $D(x, y) = 6, n(x, y) = 90$ .  
Určete je, víte-li, že  $x = 30$ .
- 10) Dokažte, že pro všechna přirozená  $n$  platí  $49 \mid (99^{61} - 50^{56})$ .
- 11) Dokažte, že pro všechna přirozená  $n$  platí  $23 \mid (5^{2n} + 11 \cdot 2^{n+1})$ .
- 12) Najděte všechna celá čísla  $x$ , pro něž je  $y = x^3 + 14$  dělitelné číslem  $x + 2$ .
- 13) Dokažte, že pro všechna přirozená  $n$  platí  $31 \mid (5^{n+1} + 6^{2n-1})$ .
- 14) Dokažte, že pro všechna přirozená  $n$  platí  $3 \mid (n^3 + 2n)$ .
- 15) Kterou číslicí končí číslo  $77^{77}, 1995^{1995}, 19^{19}, 133^{59}$ .
- 16) Odvoďte kritérium pro dělitelnost 3, 9.
- 17) Najděte všechna přirozená čísla  $m$ , pro která platí, že  $m + 3$  je dělitelné 4,  $m + 4$  je dělitelné 5 a  $m + 5$  je dělitelné 6.
- 18) Najděte všechna přirozená čísla  $n$ , která mají tu vlastnost, že pokud jimi dělíme čísla 45, 73, 115, dostaneme vždy zbytek 3.
- 19) Najděte nejmenší přirozené číslo  $n$  takové, že dělíme-li ho po řadě čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dostaneme vždy neúplný podíl se zbytkem, který je vždy o 1 menší než dělitel.
- 20) Najděte nejmenší přirozené číslo  $x$  takové, aby každé z čísel  $x, 616, 700, 924$  dělil součin ostatních tří.

**Výsledky**  
**(11. Dělitelnost v množině celých čísel)**

1)  $-20$  ---