

6. Binomická věta

- 1) Rozhodněte, zda existuje prostý (absolutní) člen rozvoje výrazu $(\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[5]{c^3})^{20}$.
- 2) Vypočítejte $(1+i\sqrt{3})^4$
 - a) pomocí binomické věty
 - b) pomocí Moivroy věty.
- 3) Sečtěte 3 prostřední členy rozvoje výrazu $(1-i)^{100}$.
- 4) Určete všechna reálná čísla x tak, aby 9.člen rozvoje $\left(\frac{\sqrt{10}}{(\sqrt{x})^{5\log x}} + x \cdot {}^{2\log x}\sqrt{x}\right)^{10}$ byl roven 450.
- 5) Užitím Moivroy poučky z binomické věty vypočtěte $\sin 5a, \cos 5a$.
- 6) Kolik racionálních členů má rozvoj $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3})^{10}$?
- 7) Pro která x je 5.člen rozvoje $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ roven 105?
- 8) Pro která přirozená čísla n jsou koeficienty 3.členů rozvoje $(a+b)^{2n}$ a $(a+b)^{3n}$ v poměru 2:5?
- 9) V rozvoji $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$ určete prostý člen.
- 10) Pro které reálné x je 7.člen rozvoje $(\sqrt[3]{4-2x} + \sqrt[5]{3-2x})^9$ roven 168?
- 11) Kolikátý člen rozvoje $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ obsahuje x^7 ?
- 12) V rozvoji $(1+x)^n$ je třetí člen 84 a čtvrtý 280.
Určete x a n .
- 13) V rozvoji $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ určete
 - a) $x \in R$
 - b) $x \in C$tak, aby tak, aby 5.člen rozvoje byl 105.
- 14) V rozvoji výrazu $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ je součet prvních tří koeficientů roven 67.
Určete z této podmínky absolutní člen rozvoje.
- 15)
 - a) Pro které reálné číslo x platí, že 4.člen binomického rozvoje výrazu $(1+x)^6$ je čtyřikrát větší než 3.člen?
 - b) V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{2}{x^2} - 3x\right)^a$ určete přirozené číslo a tak, aby 6.člen rozvoje výrazu obsahoval x^3 ?

16) Dokažte pomocí binomické věty, že pro všechna přirozená n platí:

a)
$$\binom{n}{0} + 4\binom{n}{1} + 4^2\binom{n}{2} + \dots + 4^n\binom{n}{n} = 5^n \quad (\text{návod: } 5^n = (1+4)^n)$$

b)
$$\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - 2^3\binom{n}{3} + \dots + (-2)^n\binom{n}{n} = (-1)^n \quad (\text{návod: } (-1)^n = (1-2)^n)$$

17) Určete ten člen mnohočlenu vzniklého po výpočtu $(1+x^3)^9 \cdot (1+x^2)^{10}$, který obsahuje x^{14} .

18) Určete ten člen mnohočlenu, který vznikne po výpočtu $(1+\sqrt{3})^8$, který je větší než člen předcházející i následující.

Výsledky (6. Binomická věta)

- 1) ne, 201. člen
- 2) $-8 - 8i\sqrt{3}$
- 3) $-\binom{100}{50}$
- 4) $x_1 = 10^2, x_2 = 10^{-\frac{2}{5}}$
- 5) $\sin 5a = 5 \cos^4 a \cdot \sin a - 10 \cos^2 a \cdot \sin^3 a + \sin^5 a,$
 $\cos 5a = \cos^5 a - 10 \cos^3 a \cdot \sin^2 a + 5 \cos a \cdot \sin^4 a$
- 6) 9
- 7) $x = \frac{1}{8}$
- 8) $n = 2$
- 9) 5. člen, hodnota 4860
- 10) $x = 1$
- 11) 4. člen
- 12) $x = 2, n = 7$
- 13)
 - a) $x = \frac{1}{8},$
 - b) $x_1 = -\frac{1}{16} - i\frac{\sqrt{3}}{16}, x_2 = -\frac{1}{16} - i\frac{\sqrt{3}}{16}, x_3 = \frac{1}{8}$
- 14) 4. člen, hodnota 165
- 15)
 - a) $x = 3$
 - b) $a = 6$
- 16)
- 17) $8940x^{14}$
- 18) 6. člen