1. Analytická geometrie - bod, souřadnice bodu, vzdálenost bodů

1.1 Rozhodněte, zda trojúhelník s vrcholy $A = [3; 2]$, $B = [-1; -1]$ a $C = [11; -6]$ je pravoúhlý.

1.2 Na ose *y* najděte bod, který je vzdálený od bodu $A = [4; -6]$ o délku 5.

1.3 Na ose *z* najděte bod, který má stejnou vzdálenost od bodů $A = [-2; 1; 4]$ a $B = [3; 0; 1]$.

1.4 Určete délku těžnic v trojúhelníku *KLM*, jsou-li dány body $K = [2; 0]$, $L = [2; 3]$, $M = [-2; 0]$.

1.5 V trojúhelníku *ABC* je délka strany *AB* rovna $\sqrt{10}$ a vzdálenost bodu *A* od středu protilehlé strany je rovna $\frac{\sqrt{17}}{2}$, přičemž tento bod má souřadnice $\left[4; \frac{3}{2}\right]$. Bod *B* má souřadnice $[5; 0]$ a *x*-ová souřadnice bodu *A* je 2. Určete zbývající souřadnici bodu *A*, souřadnice bodu *C*, souřadnice zbývajících středů stran trojúhelníka *ABC* a délky zbývajících stran trojúhelníka.

2. Analytická geometrie - vektory (souřadnice, umístění, délka, lineární závislost a nezávislost, odchylka)

2.1 Zjistěte, zda vektor $\vec{v} = (1; 2; -1)$ je roven vektoru $\overrightarrow{AB}$, je-li dáno: $A = [-1; 1; 5]$ a $B = [0; 3; 4]$.

2.2 Určete velikost vektoru $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, kde $A = [-1; 0; 3]$ a $B = [2; 2; -2]$.

2.3 Určete zbývající souřadnici vektoru $\vec{w} = \left(2; w_y; -\frac{5}{3}\right)$ tak, aby vektor $\vec{w}$ byl jednotkový.

2.4 Zjistěte souřadnice součtu vektorů $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-2; 3; -1)$, $\vec{c} = (0; -3; 2)$ a $\vec{d} = (0; 1; -2)$.

2.5 Jsou dány vektory $\vec{a} = (0; 2; -4)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$, $\vec{c} = (-2; 2; 3)$. Zjistěte souřadnice vektoru a) $\vec{w} = \vec{a} + 0{,}5\vec{b} - 2\vec{c}$, b) $\vec{w} = -2(\vec{a} + \vec{b}) + 0{,}1\vec{c}$, c) $\vec{w} = -\vec{a} - 4(0{,}5\vec{b} - 2\vec{c})$.

2.6 Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (12; 1; 14)$, $\vec{v} = (-1; -3; 0)$ a $\vec{w} = (2; 1; 2)$ lineárně závislé či nezávislé.

2.7 Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (0; 0; 1)$, $\vec{v} = (2; 1; 1)$ a $\vec{w} = (1; 1; 1)$ lineárně závislé či nezávislé.

2.8 Určete $u_3 \in R$ tak, aby vektory $\vec{u} = (4; 4; u_3)$, $\vec{v} = (-2; -2; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 3)$ byly lineárně závislé.

2.9 Vypočtěte úhel vektorů $\vec{u} = (1; -2)$ a $\vec{v} = (2; 1)$.

2.10 Vrcholy trojúhelníku *ABC* jsou $A = [2; -4; 9]$, $B = [-1; -4; 5]$ a $C = [6; -4; 6]$. Vypočtěte délky stran trojúhelníka *ABC* a úhel při vrcholu *C*.

2.11 Zjistěte, zda čtyřúhelník s vrcholy $A = [5; 2; 6]$, $B = [6; 4; 4]$, $C = [4; 3; 2]$ a $D = [3; 1; 4]$ je čtverec.

3. Analytická geometrie - přímka v rovině (rovnice parametrická, obecná, směrová, vzájemná poloha, odchylka)

3.1 Napište parametrické vyjádření přímky *p* dané bodem $A = [1; -2]$ a vektorem $\vec{u} = (-3; 4)$ s ní rovnoběžným.

3.2 Napište parametrické vyjádření přímky procházející body $A = [5; 3]$ a $B = [7; 4]$.

3.3 Napište parametrické vyjádření přímky *p*, která prochází bodem $A = [2; 6]$ a je rovnoběžná s přímku *BC*, kde $B = [3; 7]$ a $C = [-4; 8]$.

3.4 Rozhodněte, zda body $M = [5; 3]$ a $N = \left[-\frac{31}{2}; 0\right]$ leží na přímce *p* dané bodem $A = [-5; 7]$ a vektorem $\vec{u} = (3; 2)$.

3.5 Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [2; 1]$ a je kolmá k vektoru $\vec{n} = (7; 2)$.

3.6 Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [3; -2]$ a je rovnoběžná s osou *y*.

3.7 Napište obecnou rovnici přímky, jestliže přímka je dána parametrickým vyjádřením $x = -3 + 5t$ a $y = 1 - 4t;\ t \in R$.

3.8 Napište obecnou rovnici přímky, je-li přímka dána body $A = [-3; 7]$ a $B = [5; -2]$.

3.9 Napište obecnou rovnici přímky *p*, která je kolmá k přímce $q: 3x - 2y + 2 = 0$ a prochází bodem $A = [4; -1]$.

3.10 Jsou dány body $A = [-2; 1]$ a $B = [6; 7]$. Bodem *A* veďte přímku *p* a bodem B přímku *q* tak, aby přímky *p*, *q* byly vzájemně kolmé a jejich průsečík *P* ležel na ose *x*.

3.11 Určete souřadnice těžiště trojúhelníka, který je dán body $K = [2; 0]$, $L = [4; 2]$ a $M = [-2; 4]$.

3.12 Do soustavy souřadnic zakreslete trojúhelník *ODS*, jehož strany *OD*, *DS* a *SO* leží po řadě na přímkách $2x + y - 1 = 0$, $-x + y - 2 = 0$ a $x + 2y + 6 = 0$. Určete graficky i početně souřadnice jeho vrcholů.

3.13 Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $3x-2y-9=0$ a $4x+y-1=0$ a je rovnoběžná s přímkou $2x+y-3=0$.

3.14 Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek $x+2y+3=0$ a $3x-y-5=0$ a je kolmá k přímce $3x-4y=6$.

3.15 Napište rovnice kolmic vedených k přímce $2x-4y-10=0$ v jejím průsečíku s osou a) *x*, b) *y*.

3.16 Určete vzájemnou polohu dvou přímek *p*, *q*, které jsou dány:

p: $2x-3y+19=0$	*p*: $8x-2y+7=0$	*p*: $x=4-1{,}2t$, $y=1-1{,}3t$; $t\in\mathbb{R}$
q: $3x-2y+2=0$	*q*: $x=3+t$, $y=15{,}5+4t$; $t\in\mathbb{R}$	*q*: $x=r$, $y=1-r$; $r\in\mathbb{R}$

3.17 Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka *ABC*, jehož strany leží na přímkách *a*: $x\sqrt{3}-y+1=0$, *b*: $y-3\sqrt{3}-1=0$ a *c*: $x\sqrt{3}+3y-20\sqrt{3}-3=0$. Určete souřadnice vrcholů tohoto trojúhelníka.

3.18 Světelný paprsek prochází bodem $A=[3;\,2]$, odráží se od zrcadla, které leží na přímce $x+y+1=0$ a dopadá do bodu $B=[2;\,0]$. Najděte rovnici přímky, na níž leží dopadající a odražený paprsek.

3.19 Světelný paprsek vychází z bodu $K=[5;\,4]$, dopadá na osu *x* pod úhlem $60°$, odráží se od ní a poté dopadá na osu *y*, od níž se také odráží. Určete rovnice přímek, na nichž leží všechny 3 paprsky a souřadnice bodů, v nichž se paprsek odráží od jednotlivých os.

3.20 Určete množinu bodů, které mají od přímky $8x-6y+5=0$ vzdálenost rovnou 3.

3.21 Napište rovnici přímky, která je ve vzdálenosti 5 od bodu $A=[-4;\,2]$ a je a) rovnoběžná, b) kolmá k přímce dané rovnicí $3x-4y+2=0$.

3.22 Přímka prochází bodem $P=[-2;\,5]$ a má od bodu $Q=[3;\,5]$ vzdálenost $\sqrt{5}$. Napište její rovnici.

3.23 Napište rovnici trajektorie pohybu bodu $M=[x;\,y]$, jehož vzdálenost od přímky *p*: $y=2x-4$ je třikrát větší než vzdálenost od přímky *q*: $y=4-2x$.

3.24 V rovnici přímky *p*: $3x+by-1=0$ určete parametr *b* tak, aby: a) přímka procházela bodem $E=[2;\,2]$, b) přímka *p* byla rovnoběžná s osou *y*, c) směrový úhel přímky *p* měl velikost $\dfrac{\pi}{6}$.

3.25 Napište rovnice os úhlů, jejichž ramena leží na přímkách, které jsou dány rovnicemi:
a) $x-3y+3=0$ a $3x-y+10=0$ b) $6x-8y+11=0$ a $12x+5y+2=0$

3.26 Vypočtěte obsah trojúhelníku s vrcholy $A=[2;\,3]$, $B=[5;\,1]$ a $C=[0;\,0]$.

4. Analytická geometrie - přímka v prostoru (parametrické vyjádření, vzájemná poloha, odchylka)

4.1 Určete zbývající souřadnice bodu $L=[x_L;\,-3;\,z_L]$, který leží na přímce *MN* dané body $M=[1;\,1;\,-1]$ a $N=[-5;\,-9;\,2]$.

4.2 Napište parametrické vyjádření stran trojúhelníka *OSN*, kde $O=[2;\,-2;\,2]$, $S=[-3;\,0;\,-2]$ a $N=[0;\,-4;\,2]$.

4.3 Určete vzájemnou polohu přímek *p* a *q*. Přímka *p* je dána body $A=[3;\,-2;\,-4]$ a $B=[-1;\,3;\,0]$, přímka *q* je určena bodem $C=[-2;\,2;\,1]$ a vektorem $\vec{v}=(1;\,-5;\,6)$, který je s přímkou *q* rovnoběžný.

4.4 Přímka *k* prochází body $E=[3;\,-2;\,4]$ a $F=[5;\,-1;\,3]$; přímka *l* pak prochází body $G=[1;\,-6;\,2]$ a $H=[5;\,3;\,h_3]$. Určete souřadnici h_3 bodu *H* tak, aby přímky *k* a *l* byly: a) různoběžné, b) splývající a c) mimoběžné.

4.5 Zjistěte, zda mohou body $A=[1;\,3;\,4]$, $B=[2;\,-2;\,-1]$, $C=[-3;\,-2;\,1]$ a $D=[5;\,-1;\,0]$ tvořit vrcholy rovinného čtyřúhelníku.

4.6 Je dána přímka *p* parametrickým vyjádřením $x=m+2t$, $y=3t$, $z=6-4t$; $t\in\mathbb{R}$ a přímka *q* s parametrickým vyjádřením $x=5+s$, $y=1-4s$, $z=-4+s$; $s\in\mathbb{R}$. Určete hodnotu reálného parametru *m* tak, aby přímky byly různoběžné a poté určete jejich průsečík.

4.7 Určete vzájemnou polohu přímek *p* a *q*, které jsou dány takto: *p*: $x=1+t$, $y=3-2t$, $z=-1+3t$; $t\in\mathbb{R}$ a *q*: $x=2+2s$, $y=5+3s$, $z=s$; $s\in\mathbb{R}$.

5. ***Analytická geometrie - rovina (parametrické vyjádření, vzájemná poloha rovin, vzájemná poloha přímky a roviny, vzdálenost bodu od přímky a roviny)***

5.1 Rovina τ je určena body $K=[1;2;-3]$, $L=[3;-2;0]$ a $M=[-1;-2;-3]$. Zjistěte, zda v této rovině leží body $P=[-1;-2;-3]$, $Q=[-5;2;-6]$ a $R=[11;-2;-6]$.

5.2 Rovina λ je dána body $E=[-1;3;-3]$, $K=[2;-3;4]$ a $G=[5;-1;7]$. Určete zbývající souřadnici bodu $S=[x_S;-4;1]$ tak, aby ležel v rovině λ.

5.3 Rovina τ je dána bodem $P=[1;0;-3]$ a vektory a) $\vec{u}=(-1;2;1)$ a $\vec{v}=(3;-4;2)$, b) $\vec{u}=(4;6;-2)$ a $\vec{v}=(-2;-3;1)$. Napište její obecnou rovnici.

5.4 V rovině τ : $2x+y-4z+d=0$ leží bod $A=[2;2;1]$. Určete zbývající souřadnici bodu $B=[4;-3;z_B]$ tak, aby v rovině τ ležel, a zbývající souřadnici bodu $C=[-1;y_C;2]$ tak, aby v rovině τ neležel.

5.5 Rovina ω je dána body $A=[2;4;-2]$, $B=[0;3;-1]$ a $C=[1;-2;3]$. Napište její obecnou rovnici.

5.6 Jsou dány body $P=[3;-1;2]$ a $Q=[-2;4;3]$. Napište obecnou rovnici roviny τ, která prochází bodem Q a je kolmá k vektoru $\overrightarrow{PQ}$.

5.7 Napište obecnou rovnici roviny procházející bodem $L=[3;-6;1]$, který je patou kolmice vedené počátkem soustavy souřadnic k této rovině.

5.8 Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A=[-1;2;-3]$ a je a) kolmá k přímce p: $x=3-2t$, $y=-1+t$, $z=4+2t$; $t\in\mathbb{R}$.

5.9 Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou x a procházející body $M=[0;1;3]$ a $N=[2;4;5]$.

5.10 Napište obecnou rovnici roviny procházející osou x a bodem $K=[0;-2;3]$.

5.11 Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou y a protínající osy x a z v bodech $A=[x_A;0;0]$ a $B=[0;0;z_B]$.

5.12 Napište rovnici roviny, která prochází bodem $P=[2;-1;3]$ a protíná kladné části os souřadnic ve stejných vzdálenostech od počátku.

5.13 Najděte pravoúhlý průmět bodu $Q=[3;1;-1]$ do roviny $x+2y+3z-30=0$.

5.14 Zjistěte, jak daleko od počátku kartézského systému souřadnic leží rovina daná rovnicí $15x-10y-6z-190=0$.

5.15 Vypočítejte souřadnice bodu, který je souměrný s počátkem soustavy souřadnic podle roviny σ : $6x+2y-9z+121=0$.

5.16 Jsou dány body $A=[1;-2;-2]$, $B=[2;-1;-1]$, $C=[1;-1;-2]$ a $M=[0;2;-2]$. Vypočítejte vzdálenost bodu M od roviny ABC a najděte souřadnice bodu M v osové souměrnosti podle přímky AB.

5.17 Bodem $D=[3;-2;1]$ veďte přímku kolmou k rovině τ : $2x-3y-z+11=0$.

5.18 Vypočítejte úhly, které svírá rovina σ : $2x-2y+z-6=0$ s osami kartézského systému souřadnic.

5.19 Osou z veďte rovinu τ, jejíž odchylka od roviny ρ : $2x+y-z\sqrt{5}=0$ je $60°$.

Řešení

1. Analytická geometrie - bod

1.1 není pravoúhlý

1.2 $B=[0;-3]$; $B'=[0;-9]$

1.3 $X=\left[0;0;\dfrac{11}{6}\right]$

1.4 $t_k=\dfrac{5}{2}$; $t_l=\sqrt{13}$; $t_m=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

1.5 $A=[2;1]$, $C=[3;3]$, $S_{AC}=\left[\dfrac{5}{2};2\right]$, $S_{AB}=\left[\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right]$, $|BC|=\sqrt{13}$, $|AC|=\sqrt{5}$

2. Analytická geometrie - vektory

2.1 $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$

2.2 $\vec{v}=\sqrt{38}$

2.3 nelze

2.4 $\vec{v}=(-1;4;3)$

2.5 a) $\vec{w}=(4{,}5;-1;10{,}5)$; b) $\vec{w}=(-2{,}2;-7{,}8;10{,}3)$, c) $\vec{w}=(-18;10;30)$

2.6 lineárně závislé

2.7 lineárně nezávislé

2.8 $u_3=2$

2.9 vektory jsou kolmé

2.10 $|AB|=|AC|=5$, $|BC|=5\sqrt{2}$, $\gamma=45°$

2.11 jedná se o čtverec

3. Analytická geometrie - přímka v rovině

3.1 $x=1-3t$, $y=-2+4t$; $t\in\mathbb{R}$

3.2 $x=5+2t$, $y=3+t$; $t\in\mathbb{R}$

3.3 $x=2-7t$, $y=6+t$; $t\in\mathbb{R}$

3.4 $M\notin p$, $N\in p$

3.5 $7x+2y-16=0$

3.6 $x-3=0$

3.7 $4x+5y+7=0$

3.8 $9x+8y-29=0$

3.9 $2x+3y-5=0$

3.10 p: $x+7y-5=0$, q: $7x-y-35=0$ nebo p: $x+y+1=0$, q: $-x+y-1=0$

3.11 $T=\left[\dfrac{4}{3};2\right]$

3.12 $O=\left[\dfrac{8}{3};-\dfrac{13}{3}\right]$, $D=\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right]$, $S=\left[-\dfrac{10}{3};-\dfrac{4}{3}\right]$

3.13 $2x+y+1=0$

3.14 $4x+3y+2=0$

3.15 a) $2x+y-10=0$, b) $4x+2y-5=0$

3.16 různoběžné $P=\left[\dfrac{53}{5};\dfrac{32}{5}\right]$; shodné; různoběžné $P=\left[\dfrac{52}{25};-\dfrac{27}{25}\right]$

3.17 $A=\left[\dfrac{11\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}};3\sqrt{3}+1\right]$, $B=\left[\dfrac{20\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}};\dfrac{24\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}\right]$, $C=\left[3;3\sqrt{3}+1\right]$, $\alpha=30°$, $\beta=90°$, $\gamma=60°$

3.18 dopadající: $5x-4y-7=0$, odražený: $4x-5y-8=0$

3.19 $X=\left[-4\sqrt{3}+5;0\right]$, $Y=\left[0;12-5\sqrt{3}\right]$, $x\sqrt{3}-3y+12-5\sqrt{3}=0$, $x\sqrt{3}+y-12+5\sqrt{3}=0$, $x\sqrt{3}-3y+36-15\sqrt{3}=0$

3.20 2 rovnoběžné přímky: $8x-6y+35=0$, $8x-6y-25=0$

3.21 a) $3x-4y+45=0$, $3x-4y-5=0$, b) $4x+3y+35=0$, $4x+3y-15=0$

3.22 $x+2y-8=0$ nebo $x-2y+12=0$

3.23 přímka $x+y-2=0$ nebo $4x+y-8=0$

3.24 a) $b=-\dfrac{5}{2}$, b) $b=0$, c) $b=-3\sqrt{3}$

3.25 a) $2x+2y+7=0$, $4x-4y+13=0$, b) $42x+154y-123=0$, $198x-54y+163=0$

3.26 $\dfrac{13}{2}$ čtverečních jednotek

4. Analytická geometrie - přímka v prostoru

4.1 $x_L=-1{,}4$, $z_L=0{,}2$

4.2 OS: $x=2-5t$, $y=-2+2t$, $z=2-4t$; $t\in\mathbb{R}$, ON: $x=2-2r$, $y=-2-2r$, $z=2$; $r\in\mathbb{R}$, SN: $x=-3+3s$, $y=-4s$, $z=-2+4s$; $s\in\mathbb{R}$

4.3 mimoběžné

4.5 nemohou (přímky AC a BD jsou mimoběžné

4.4 a) $h_3 = -\frac{31}{7}$, b) nelze, c) $h_3 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{31}{7}\right\}$

4.6 $m = -3$

4.7 mimoběžné

5. Analytická geometrie - rovina

5.1 $P \in \tau$, $Q \notin \tau$, $R \notin \tau$

5.2 $x_S = -\frac{5}{8}$

5.3 a) $8x + 5y - 2z - 14 = 0$, b) vektory neurčují rovinu

5.4 $2x + y - 4z - 2 = 0$, $z_B = -\frac{3}{4}$, $y_C \neq 12$

5.5 $x - 9y + 11z + 56 = 0$

5.6 $-5x + 5y + z - 33 = 0$

5.7 $3x - 6y + z - 46 = 0$

5.8 $-2x + y + 2z + 2 = 0$

5.9 $2y - 3z + 7 = 0$

5.10 $-3y + 2z = 0$

5.11 $z_B x + x_A z - x_A z_B = 0$

5.12 $x + y + z - 4 = 0$

5.13 $Q' = [5; 5; 5]$

5.14 10

5.15 $O' = [-12; -4; 18]$

5.16 $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $M' = [4; -4; 0]$

5.17 $x = 3 + 2t$, $y = -2 - 3t$, $z = 1 - t$; $t \in \mathbb{R}$

5.18 $41{,}81°$; $41{,}81°$; $19{,}47°$

5.19 $3x - y = 0$ nebo $x + 3y = 0$