MANUÁL K ŘEŠENÍ TESTOVÝCH ÚLOH

Matematika

Vážení vyučující!
Předmětoví koordinátoři Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání pro Vás připravili tento materiál, s jehož pomocí můžete bezprostředně po ukončení testování provést se svými žáky první zhodnocení vybraných testových úloh, zařazených do souboru testových úloh z matematiky.

Úloha 1

Rozhodněte u následujících tvrzení, zda jsou pravdivá (ANO), nebo nepravdivá (NE).

1.1 Pro každá dvě reálná čísla a, b platí $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Správné řešení je **NE**. $L = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Pro $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$ je $L \neq P$.

1.2 Je-li $a = -2$, platí vztah $a^3 < a^5$.

Správné řešení je **NE**. $a^3 = (-2)^3 = -8$, $a^5 = (-2)^5 = -32$ a platí opačná nerovnost $-8 > -32$.

1.3 $2^{500} \cdot 2^{500} = 4^{1000}$

Správné řešení je **NE**. $2^{500} \cdot 2^{500} = 2^{1000} \neq 4^{1000}$

1.4 Nerovnice $\dfrac{1}{x+4} \leq 1$ je v množině všech reálných čísel kromě čísla $x = -4$ ekvivalentní s nerovnicí $x \geq -3$.

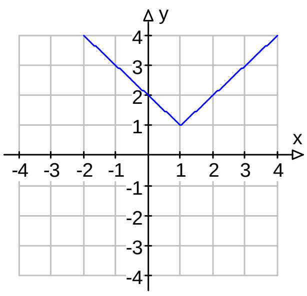
Správné řešení je **NE**. Při násobení první nerovnice výrazem $(x+4)$ záleží na hodnotě tohoto výrazu. Pokud je záporná, musí se obrátit znaménko nerovnosti, je-li kladná, znaménko nerovnosti se nezmění.
Pro $x + 4 > 0$ tedy platí: $1 \leq x + 4 \Rightarrow x \geq -3$. Pro $x + 4 < 0$ platí: $1 \geq x + 4 \Rightarrow x \leq -3$.
Obě nerovnice ze zadání řešené v uvedeném oboru $R \setminus \{-4\}$ nejsou ekvivalentní.

Úloha 2

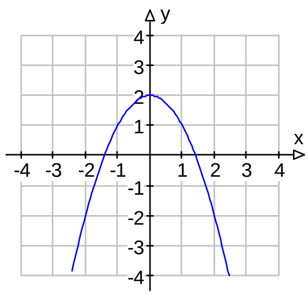
Reálné funkce f_1 až f_4 jedné reálné proměnné jsou dány svými předpisy. Ke každé funkci přiřaďte odpovídající graf zakreslený na jednom z obrázků A – F.

2.1 $f_1 : y = 2 - x^2$

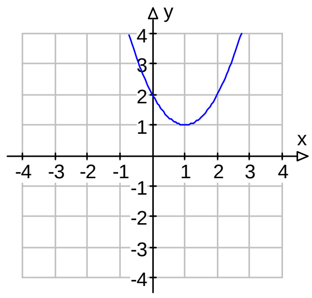
Správné řešení je **B**.
Grafem kvadratické funkce je parabola. Vrchol paraboly, bod $[0; 2]$, je maximem funkce.



A)



B)

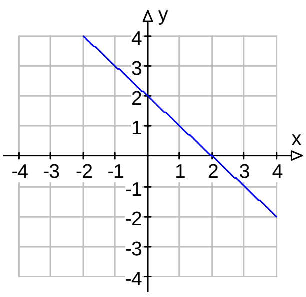


C)

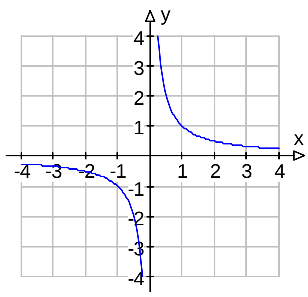
2.2 $f_2 : y = 2 - x$

Správné řešení je **D**.

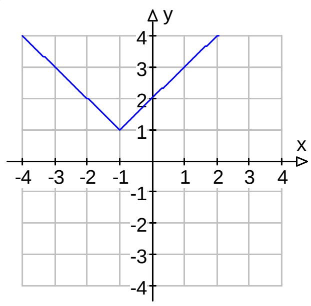
Grafem lineární funkce je přímka.



D)



E)



F)

2.3 $f_3 : y = \dfrac{1}{x}$

Správné řešení je **E**. Grafem lineární lomené funkce jsou dvě větve hyperboly.

2.4 $f_4 : y = 1 + |x - 1|$

Správné řešení je **A**. Grafem lineární funkce s absolutní hodnotou je lomená čára zakreslená na obrázku A nebo F. Vypočteme některou z hodnot funkce. Např. po dosazení hodnoty $x = 1$ do předpisu funkce získáme hodnotu souřadnice $y = 1$. Proto vybereme graf s bodem $[1; 1]$, tedy obrázek A.

Úloha 3

Majitel dílny nakoupil na úvěr s roční úrokovou sazbou 10 % materiál v ceně m Kč. Dluh chce splatit ve dvou stejných splátkách vždy na konci 1. a 2. roku. Velikost jednotlivých splátek s je možné určit vztahem: $(m \,.\, 1{,}1 - s) \,.\, 1{,}1 = s$.

3.1 Vyjádřete z tohoto vzorce velikost jedné splátky s. Čísla nezaokrouhlujte.

Správné řešení je $\boldsymbol{s = \dfrac{1{,}21\, m}{2{,}1}}$.

$(m \,.\, 1{,}1 - s) \,.\, 1{,}1 = s$, po roznásobení je $m \cdot 1{,}1^2 - 1{,}1\, s = s$, po přičtení $1{,}1\, s$ je $m \cdot 1{,}1^2 = s + 1{,}1\, s$, tj. $m \cdot 1{,}1^2 = 2{,}1\, s$. Rovnice se vydělí číslem $2{,}1$ a dostaneme požadovaný vztah $s = \dfrac{1{,}21\, m}{2{,}1}$.

3.2 Jaký byl úvěr m na materiál, pokud majitel splácí každým rokem částku s = 461 000 Kč? Výsledek zaokrouhlete na tisíce.

Správné řešení je **800 000 Kč**.

Ze vzorce v předchozí části se vyjádří neznámá m a dále se za s dosadí číslo 461 000.

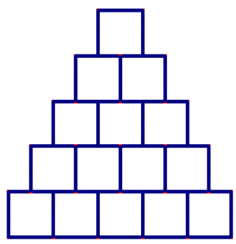
$m = \dfrac{2{,}1\, s}{1{,}21} \Rightarrow m = \dfrac{2{,}1 \cdot 461\,000}{1{,}21} \doteq 800\,082{,}6$ tj. po zaokrouhlení na celé tisíce 800 000 Kč.

Jiné řešení: Číslo 461 000 je možné dosadit za s do vztahu v zadání úlohy: $(m \cdot 1{,}1 - 461\,000) \cdot 1{,}1 = 461\,000$. Postupnými úpravami rovnice vypočteme hodnotu neznámé *m.* Výsledek je stejný jako v předchozím řešení.

Úloha 4

Malý Pepíček sestavil z 15 kostek „zeď“ podle obrázku. Tatínek Josef mu chtěl postavit podobným způsobem co největší „zeď“. Měl na ni celkem 200 stejných kostek.

4.1 Z kolika kostek se skládala spodní nejdelší řada?



Správné řešení je **19 kostek**.

Počítáme-li kostky od horní řady dolů, pak v každé následující řadě je o 1 kostku více. Počty kostek v jednotlivých řadách tvoří konečnou aritmetickou posloupnost čísel s prvním členem 1 a s diferencí 1, tj. posloupnost $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Počet všech použitých kostek je součtem s aritmetické posloupnosti, který je nejvýše roven číslu 200. Platí: $s = \dfrac{1+n}{2} \cdot n \le 200$. Vynásobením nerovnice číslem 2 dostáváme vztah: $n \cdot (n+1) \le 400$, tj. součin dvou po sobě jdoucích čísel je nejvýše roven číslu 400. Vztah platí pro $n = 19$, neboť $20 \cdot 20 = 400 \Rightarrow 19 \cdot 20 \le 400$. Spodní řada obsahuje 19 kostek a je v pořadí 19.

4.2 Kolik kostek zůstalo nevyužito?

Správné řešení je **10 kostek**. Do vztahu pro součet aritmetické posloupnosti se za n dosadí číslo 19, tj. pořadí (shora) nejdelší řady. Platí: $s = \dfrac{1+19}{2} \cdot 19 = 190$. Z 200 kostek bylo použito 190. Nevyužito zůstalo 10 kostek.

Úloha 5

Kamarádi byli na výletě. Peníze, které každý složil jako zálohu, beze zbytku utratili. Při závěrečném účtování celkovou útratu rovnoměrně rozdělili na osobu a den, někdo pak musel doplácet a jinému se peníze vracely. Vyúčtování je zapsáno do tabulky.

Níže uvedená tabulka je neúplná (špatně čitelné údaje byly vynechány). Doplňte správná čísla do prázdných políček. Čísla pište do záznamového archu.

Správné řešení:

Jméno	Počet dnů	Záloha [Kč]	Musí doplatit [Kč]	Bude mu vráceno [Kč]
Adam	7	540	0	36
David	***n* = 6**	490	0	58
Filip	7	***f* = 460**	44	0
Honza	4	***h* = 238**	***d* = 50**	0

Z prvního řádku určíme průměrnou denní útratu x na jednu osobu:
$x = (540 - 36) : 7 = 72$ Kč

Ve druhém řádku dopočítáme počet dnů n, které David strávil na společném výletě:
$n = (490 - 58) : 72 = 6$ dnů.

Ve třetím řádku dopočítáme Filipovu zálohu f takto:
$f = 7 \cdot 72 - 44 = 460$ Kč

Při závěrečném vyúčtování se vracejí přeplatky ($36 + 58 = 94$ Kč), na které se peníze získají splacením dluhů: $94 = 44 + d$, kde $d\ (= 50 \text{ Kč})$ je velikost Honzova dluhu.

Nakonec spočteme Honzovu zálohu h:
$h = 4 \cdot 72 - 50 = 238$ Kč.

Jiný způsob řešení pro výpočet hodnot v posledním řádku:

Počet „člověkodnů“ na výletě je $7 + 6 + 7 + 4 = 24$. Celková útrata za všechny chlapce je $24 \cdot 72 = 1\,728$ Kč. Honzova záloha je $h = 1\,728 - (540 + 490 + 460) = 238$ Kč. Honzův nedoplatek je $d = 4 \cdot 72 - 238 = 50$ Kč.

Úloha 6

Testování matematické gramotnosti se účastnilo celkem 9 570 studentů středních škol a z maximálního počtu 40 bodů získali průměrně 17,4 bodu. Studenti gymnázií, kterých bylo 1174, získali v průměru 22,5 bodu. Jakého průměrného výsledku x dosáhli studenti zbývajících škol? Zvolte jeden z uvedených postupů, který je možné použít pro zjištění správného výsledku. (Čísla jsou zaokrouhlována na jedno desetinné místo.)

A) $\frac{x + 22{,}5}{2} = 17{,}5$; z čehož plyne $x = 12{,}5$

B) $\frac{x(9570 - 1174) + 17{,}4 \cdot 1174}{9570} = 22{,}5$; z čehož plyne $x = 23{,}2$

C) $x \cdot 8396 + 22{,}5 \cdot 1174 = 17{,}4 \cdot 9570$; z čehož plyne $x = 16{,}7$

D) $\frac{22{,}5 - 17{,}4}{40} \cdot 100 = \frac{8396 - 1174}{9570} \cdot x$; z čehož plyne $x = 16{,}9$

Správné řešení je **C**.

Průměrný bodový zisk ve skupině všech účastníků je 17,4 a vypočte se jako vážený průměr z průměrných bodových zisků gymnázií a ostatních škol: $17{,}4 = \frac{1174 \cdot 22{,}5 + (9\,570 - 1174) \cdot x}{9\,570}$. Po úpravě závorky a vynásobení rovnice hodnotou jmenovatele (9 570) získáme vztah uvedený v C:
$x \cdot 8396 + 22{,}5 \cdot 1174 = 17{,}4 \cdot 9570$; z čehož plyne $x = 16{,}7$.

Úloha 7

Určete počet reálných čísel, které vyhovují rovnici: $(2x+3)^2 - 12x = 0$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 4

Správné řešení je **A**.

$(2x+3)^2 - 12x = 0 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 - 12x = 0$

$\Rightarrow x^2 = -\dfrac{9}{4}$

Druhá mocnina reálného čísla nemůže být záporná, rovnost tedy nenastane pro žádnou reálnou hodnotu x a rovnice nemá řešení.

Úloha 8

Z plastelíny je vytvořen válec o výšce 12 cm. Pak je přeměněn na kužel, jehož podstava je shodná s podstavou původního válce. Jaká je výška kužele?

A) $v = 4$ cm

B) $v = 6$ cm

C) $v = 24$ cm

D) $v = 36$ cm

Správné řešení je **D**.

$V_{VÁLCE} = S_{PODSTAVY} \cdot v_{\text{VÁLCE}}$

$V_{KUŽELE} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{PODSTAVY} \cdot v_{KUŽELE}$

Objem válce a kužele je shodný, podstavy obou těles jsou shodné. Platí:

$S_{PODSTAVY} \cdot v_{\text{VÁLCE}} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{PODSTAVY} \cdot v_{KUŽELE}$

$\Rightarrow v_{KUŽELE} = 3 \cdot v_{\text{VÁLCE}}$

$v = v_{KUŽELE} = 3 \cdot 12 \Rightarrow v = 36$ cm .

Úloha 9

Jedna odvěsna pravoúhlého trojúhelníka se zmenší o 5 % a druhá odvěsna se o 10 % zvětší. Jak se změní obsah trojúhelníka?

A) zmenší se o 4,5 %

B) zmenší se o 9 %

C) zvětší se o 4,5 %

D) zvětší se o 5 %

Správné řešení je **C**.

$S = \dfrac{1}{2} a \cdot b$,

$S_1 = \dfrac{1}{2} 0{,}95a \cdot 1{,}10b = 1{,}045 \cdot \dfrac{1}{2} a \cdot b = 1{,}045\ S$

tj. zvětšení obsahu o 4,5 %.

Úloha 10

V obdélníku svírá úhlopříčka se stranou a délky 12 cm úhel α. Hodnota $\cos\alpha = 0{,}8$. Jaká je délka druhé strany b obdélníka?

A) $b = 16$ cm

B) $b = 15$ cm

C) $b = 9$ cm

D) jiná hodnota

Správné řešení je **C**.

$\dfrac{a}{u} = \cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{b}{a} = 0{,}75$

$b = a \cdot \tan\alpha \Rightarrow b = 12 \cdot 0{,}75 = 9$ cm

Jiný způsob řešení:

$\dfrac{a}{u} = \cos\alpha = 0{,}8 \Rightarrow u = \dfrac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow u = \dfrac{12}{0{,}8} \Rightarrow u = 15$ cm

$b = \sqrt{u^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

Řešení využívající nabídnuté alternativy:

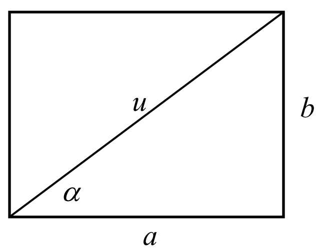
$\dfrac{b}{a} = \tan\alpha$

Viz A):

$\tan\alpha = \dfrac{16}{12} \Rightarrow \alpha \doteq 53{,}13° \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}6 \neq 0{,}8$,

podobně viz B) $\cos\alpha = 0{,}62$, ale

viz C) $\tan\alpha = \dfrac{9}{12} \Rightarrow \alpha = 36{,}87° \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}8$



K některým úlohám je možné najít ještě jiné způsoby řešení.

Vypracovaly: PhDr. Eva Řídká, CSc.
RNDr. Eva Lesáková