Goniometrické vzorce a rovnice

Obsah:

Příklad 1 - Vyjádři funkcemi jednoduchého úhlu x výraz $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}$

Příklad 2 - Vyjádři funkcemi jednoduchého úhlu x výraz $\sin 3x$

Příklad 3 - Zjednoduš výraz $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$

Příklad 4 - Zjednoduš výraz $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}$

Příklad 5 - Dokaž, že platí $\dfrac{tg 2x \cdot tgx}{tg 2x - tgx} = \sin 2x$

Příklad 6 - Řeš v R rovnici: $\sin x = \dfrac{1}{2}$

Příklad 7 - Řeš v R rovnici: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad 8 - Řeš v R rovnici: $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$

Příklad 9 - Řeš v R rovnici: $\cos(3x - 60°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Příklad 10 - Řeš v R rovnici: $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$

Příklad 11 - Řeš v R rovnici: $\cos 2x = 2\sin x$

Příklad 12 - Řeš v R rovnici: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

Příklad 13 - Řeš v R rovnici: $8\sin x + 6\cos x = 9$

Příklad 14 - Řeš $\Delta\, ABC$, je-li dáno: $a = 32{,}5cm, b = 58{,}4cm, c = 72{,}6cm.$ Urči též obsah ΔABC

Příklad 15 - Určete hodnotu výrazu: $\sin 225° - \cos 240° + tg 300° - \cot g 330°$

Příklad 16 - Určete hodnoty goniometrických funkcí (bez použití kalkulačky):

a) $\sin\left(\dfrac{-31}{4}\pi\right)$, b) $\cot g \dfrac{31}{4}\pi$

Příklad 17 - Vypočítejte s využitím součtových vzorců: $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$

Příklad 18 - Vypočítejte s využitím součtových vzorců: $\dfrac{\sin 70° + \sin 50}{°\cos 55° + \cos 35}\,°$

Příklad 19 - Řešte v R rovnici: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

Příklad 20 - Řešte v R rovnici: $\dfrac{5\sin x - 5tgx}{\sin x + tgx} + 2 \cdot (1 - \cos x) = 0$

Příklad 21 - Vypočítejte $\cos\alpha$, víte-li, že platí $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Příklad 22 - Vyjádřete funkci $\sin x$ pomocí funkce proměnné $t = tg\dfrac{x}{2}$

Příklad 23 - Je dána funkční hodnota $tgx = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $a \neq \pm b$. Určete funkční hodnotu $\sin x$.

Příklad 24 - Řešte v R rovnici: $2 \cdot \sin^2 x + \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0$

Příklad 25 - Řešte v R rovnici: $\sqrt{3} tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$

Příklad 26 - Řešte v R rovnici: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}+\cos x}=1$

Příklad 27 - Řešte v R rovnici: $2\sin^2 x-5\cos x+1=0$

Příklad 28 - Řešte v R rovnici: $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x=1$

Příklad 29 - Řešte v R rovnici: $2\cdot\sin x=\sqrt{3}\cdot tgx$

Příklad 30 - Řešte v R rovnici: $\sin x+\cos 2x=1$

Příklad 31 - Řešte v R rovnici: $tg^2 x-1-\dfrac{tgx}{\cos x}=0$

Příklad 32 - Řešte v R rovnici: $\sin^2 x\cdot(tg+1)=3\cdot\sin x\cdot(\cos x-\sin x)+3$

Příklad 33 - Řešte v R rovnici: $\sin^4 x-\cos^4 x=\dfrac{1}{2}$

Příklad 34 - Řešte v R rovnici: $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{1}{3}$

Příklad 35 - Řešte v R rovnici: $1+\sin x=2\cos^2 x$

Příklad 36 - Řešte v R rovnici: $\dfrac{\sin^2 x}{tgx}+\cos^2 x\cdot tgx=\dfrac{1}{2}$

Příklad 37 - Řešte v R rovnici: $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}\sin x$

Příklad 38 - Řešte v R rovnici: $\cos 4x=-2\cos^2 x$

Příklad 39 - Řešte v R rovnici: $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\dfrac{x}{2}-45°\right)$

Příklad 40 - Řešte v R rovnici: $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$

Příklad 41 - Určete hodnoty goniometrických funkcí (bez použití kalkulačky)

Příklad 42 - Určete hodnotu výrazu: $\dfrac{\sin\left(-\dfrac{17}{3}\pi\right)\cdot tg\dfrac{9}{4}\pi}{\cos\dfrac{7}{6}\pi\cdot\cot g(-300°)}$

Příklad 43 - Řeš v R rovnici: $2\sin x=\sqrt{3}\cdot tgx$

Příklad 44 - Řešte v R rovnici: $\sqrt{3}\cdot\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$

Příklad 45 - Řešte v R rovnici: $\cos x-2\sin^2\dfrac{x}{2}=0$

Příklad 46 - Řešte v R rovnici: $\sin x+\sin 2x=tgx$

Příklad 47 - Řešte v R rovnici: $\cos 3x+\sin 3x=0$

Příklad 48 - Řešte v R rovnici: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

Příklad 49 - Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a=11{,}6dm,\ c=9dm,\ \alpha=65°30'$

Příklad 50 - Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a=51{,}32mm,\ c=34{,}76mm,\ \beta=126°12'$

Příklad 1

Vyjádři funkcemi jednoduchého úhlu x výraz $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}$.

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} = \frac{\sin x + 2\sin x \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x(1 + 2\cos x)}{\cos x + 2\cos^2 x} = \frac{\sin x(1 + 2\cos x)}{\cos x(1 + 2\cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$$

Podmínky :

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$1 + 2\cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + (2k+1)$$

Příklad 2

Vyjádři funkcemi jednoduchého úhlu x výraz $\sin 3x$.

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 2\sin x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x =$$
$$= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

Příklad 3

Zjednoduš výraz $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$.

$$\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \cdot \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) + \cos^2 x = \sin 2x - \cos^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x$$

Příklad 4

Zjednoduš výraz $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}$.

$$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}=\frac{1-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2\sin x\cos x}{1+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2\sin x\cos x}=\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x}=$$
$$=\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos x(\sin x+\cos x)}=tgx$$

Podmínky :

$$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$$
$$x\neq(4k-1)\frac{\pi}{4}$$

Příklad 5

Dokaž, že platí $\dfrac{tg2x \cdot tgx}{tg2x - tgx} = \sin 2x$

$$L = \frac{tg2x \cdot tgx}{tg2x - tgx} = \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}}{\frac{2\sin x \cos^2 x - \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}} =$$

$$= \frac{\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}}{\frac{2\sin x \cos^2 x - \sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}} = \frac{2\sin^2 x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x(\cos^2 x + \sin^2 x)} = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$P = \sin 2x$

$L = P$

Podmínky :

$x \neq 0$

$x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

$x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{4}$

Příklad 6

Řeš v R rovnici: $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x_2 = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$K = \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$

Příklad 7

Řeš v R rovnici: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x' = \frac{\pi}{4}$$

$$x_1 = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$
$$K = \left\{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 8

Řeš v R rovnici: $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$
$$\sin a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \wedge a_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$
$$x_1 = \frac{7}{12}\pi + k\pi$$
$$x_2 = \frac{11}{12}\pi + k\pi$$
$$K = \left\{\frac{7}{12}\pi + k\pi, \frac{11}{12}\pi + k\pi\right\}$$

Příklad 9

Řeš v R rovnici: $\cos(3x - 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos(3x - 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_1 = 45° + k \cdot 360°$$
$$3x_1 - 60° = 45° + k \cdot 360°$$
$$x_1 = 35° + k \cdot 120°$$

$$a_2 = 315° + k \cdot 360°$$
$$3x_2 - 60° = 315° + k \cdot 360°$$
$$x_2 = 125° + k \cdot 120°$$

$$K = \{35° + k \cdot 120°, 125° + k \cdot 120°\}$$

Příklad 10

Řeš v R rovnici: $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$

$$2\sin^2 x - 1 + \sin^2 x - 4\sin x + 2 = 0$$

$$3\sin 2x - 4\sin x + 1 = 0$$

$$3a^2 - 4a = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow a_1 = a \wedge a_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x_1 = 1$$

$$x_1 = 90° + k \cdot 360°$$

$$\sin x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 \doteq 19°28' + k \cdot 360°$$

$$x_3 \doteq 160°32' + k \cdot 360°$$

$$K = \{90° + k \cdot 360°, 19°28' + k \cdot 360°, 160°32' + k \cdot 360°\}$$

Příklad 11

Řeš v R rovnici: $\cos 2x = 2\sin x$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 2\sin x$$
$$2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$
$$2a^2 + 2a - 1 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = 0.3660$$
$$x_1 = 21°28' + k \cdot 360°$$
$$x_2 = 158°32' + k \cdot 360°$$

$$\sin x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = -1{,}3660 < -1$$
$$K = \{21°28' + k \cdot 360°, 158°32' + k \cdot 360°\}$$

Příklad 12

Řeš v R rovnici: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$

$$(\sin 2x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 3x) = 0$$

$$2\sin\frac{2x+x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{4x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{7x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = 0 \vee \sin\frac{5x}{2} = 0 \vee \cos x = 0$$

$I.$

$$\frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_1 = \pi + 2k\pi = \pi(2k+1)$$

$II.$

$$\frac{5x_2}{2} = k\pi$$

$$x_2 = \frac{2}{5}k\pi$$

$III.$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

$$K = \left\{\pi(2k+1), \frac{2}{5}k\pi, \frac{\pi}{2}(2k+1)\right\}$$

Příklad 13

Řeš v R rovnici: $8\sin x + 6\cos x = 9$

$$8\sin x + 6\cos x = 9$$
$$8u + 6v = 9$$

$$8u + 6v = 9 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{u} = \frac{9 - 6\mathrm{v}}{8}$$
$$\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 = 1$$

$$\left(\frac{9-6v}{8}\right)^2 + v^2 = 1$$
$$100v^2 - 108v + 17 = 0$$
$$v_{1,2} = \frac{108 \pm \sqrt{108^2 - 4 \cdot 100 \cdot 17}}{200}$$
$$v_1 = 0{,}8887$$
$$v_2 = 0{,}1913$$

$$\cos x_1 = 0{,}8887$$
$$x_1 = 27°17' + k \cdot 360°$$
$$x_3 = 332°43' + k \cdot 360°$$

$$\cos x_2 = 0{,}1913$$
$$x_2 = 78°58' + k \cdot 360°$$
$$x_4 = 281°2' + k \cdot 360°$$
$$K = \{27°17' + k \cdot 360°, 332°43' + k \cdot 360°, 78°58' + k \cdot 360°, 281°2' + k \cdot 360°\}$$

Příklad 14

Řeš $\Delta\ ABC$, je-li dáno: $a = 32{,}5cm, b = 58{,}4cm, c = 72{,}6cm.$ Urči též obsah $\Delta\ ABC$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{58{,}4^2 + 72{,}6^2 - 32{,}5^2}{2 \cdot 58{,}4 \cdot 72{,}6} \Rightarrow \alpha = 25°57'$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{58{,}4 \cdot \sin 25°57'}{32{,}5} \Rightarrow \beta = 51°50'$$

$$\gamma = 180 - (25°57' + 51°50') = 102°13'$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 32{,}5 \cdot 58{,}4 \cdot \sin 102°13' = 927{,}5cm^2$$

Úhel α má velikost 25°57‘, úhel β má velikost 51°50‘ a úhle γ má velikost 102°13‘.

Obsah trojúhelníku je 927,5cm².

Příklad 15

Určete hodnotu výrazu: $\sin 225° - \cos 240° + tg300° - \cot g330°$

$$\sin 225° - \cos 240° + tg300° - \cot g330° = -\sin 45° - (-\cos 60°) - tg60° - (-\cot g30°) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{1} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

Příklad 16

Určete hodnoty goniometrických funkcí (bez použití kalkulačky):

a) $\sin\left(\frac{-31}{4}\pi\right)$

b) $\cot g\frac{31}{4}\pi$

a) $\sin\left(\frac{-31}{4}\pi\right) = -\sin\frac{31}{4}\pi = -\sin\frac{7}{4}\pi = -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cot g\frac{31}{4}\pi = \cot g\frac{3}{4}\pi = -\cot g\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Příklad 17

Vypočítejte s využitím součtových vzorců: $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140°$

$$\cos 20° + \cos 100° + \cos 140° = \cos 20° + \cos(120° - 20°) + \cos(120° + 20°) =$$
$$= \cos 20° + \cos 120° \cdot \cos 20° + \sin 120 \cdot {}°\sin 20° + \cos 120° \cdot \cos 20° - \sin 120 \cdot {}°\sin 20° =$$
$$= \cos 20° + 2 \cdot \cos 120 \cdot {}°\cos 20° = \cos 20° + 2 \cdot (-\cos 60) \cdot {}°\cos 20° =$$
$$= \cos 20° + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 20° = \cos 20° - \cos 20° = 0$$

Příklad 18

Vypočítejte s využitím součtových vzorců: $\dfrac{\sin 70° + \sin 50°}{\cos 55° + \cos 35°}$

$$\frac{\sin 70° + \sin 50°}{\cos 55° + \cos 35°} = \frac{\sin(60° + 10°) + \sin(60° - 10°)}{\cos(45° + 10°) + \cos(45° - 10°)} =$$

$$= \frac{\sin 60° \cdot \cos 10° + \cos 60° \cdot \sin 10° + \sin 60° \cdot \cos 10° - \cos 60° \cdot \sin 10°}{\cos 45° \cdot \cos 10° - \sin 45° \cdot \sin 10° + \cos 45° \cdot \cos 10° + \sin 45° \cdot \sin 10°} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 60° \cdot \cos 10°}{2 \cdot \cos 45° \cdot \cos 10°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Příklad 19

Řešte v R rovnici: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

Užitím substituce $\cos x = y$ získáme rovnici:

$$2y^2 - 3y + 1 = 0$$
$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$
$$\sqrt{D} = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$
$$y_1 = 1$$
$$y_2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \vee \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x \in \left\{2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 20

Řešte v R rovnici: $\dfrac{5\sin x - 5tgx}{\sin x + tgx} + 2\cdot(1-\cos x) = 0$

$$\frac{5\sin x - 5tgx}{\sin x + tgx} + 2\cdot(1-\cos x) = 0$$

$$\frac{5\cdot\left(\sin x - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}{\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}} + 2\cdot(1-\cos x) = 0$$

$$\frac{5\sin x\cdot\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right)}{\sin x\cdot\left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right)} + 2\cdot(1-\cos x) = 0$$

$$\frac{5\cdot\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right)}{1 + \dfrac{1}{\cos x}} + 2\cdot(1-\cos x) = 0$$

$$5\cdot\left(1-\frac{1}{\cos x}\right) + 2\cdot(1-\cos x)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

$$5\cdot\left(1-\frac{1}{\cos x}\right) + 2\cdot\left(1+\frac{1}{\cos x} - \cos x - 1\right) = 0$$

$$5\cdot\frac{\cos x - 1}{\cos x} + 2\cdot\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = 0$$

$$5\cos x - 5 + 2 - 2\cos^2 x = 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 3 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{5\pm 1}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2} \vee t_2 = 1$$

$$\cos x = \frac{3}{2} \vee \cos x = 1$$

nikdy neplatí $\qquad x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1) \Rightarrow x \in \emptyset$$

Příklad 21

Vypočítejte $\cos\alpha$, víte-li, že platí $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\
\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} &= \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\\
\frac{1-\cos\alpha}{2} &= \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\\
2-2\cos\alpha &= 2-\sqrt{3}\\
2\cos\alpha &= \sqrt{3}\\
\cos\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Příklad 22

Vyjádřete funkci $\sin x$ pomocí funkce proměnné $t=tg\frac{x}{2}$

$$\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}=\frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+1}=\frac{2\cdot t}{t^2+1}$$

Příklad 23

Je dána funkční hodnota $tgx = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $a \neq \pm b$. Určete funkční hodnotu $\sin x$.

$$\cot gx = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

$$1 + \cot gx = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1 + \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\left(a^2 + b^2\right)^2 + \left(a^2 - b^2\right)^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2 + \left(a^2 - b^2\right)^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4}$$

$$\sin 2x = \frac{\left(a^2 + b^2\right)^2}{2\left(a^4 + b^4\right)}$$

$$\left|\sin x\right| = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{2\left(a^4 + b^4\right)}}$$

Příklad 24

Řešte v R rovnici: $2 \cdot \sin^2 x + \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0$

$$2 \cdot \sin^2 x + \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$2 \cdot y2 + \left(2-\sqrt{3}\right) \cdot y - \sqrt{3} = 0$$

$$D = \left(2-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-\sqrt{3}\right) = 4 - 4 \cdot \sqrt{3} + 3 + 8 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 4 + 4 \cdot \sqrt{3} + 3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$\sqrt{D} = 2 + \sqrt{3}$$

$$y_{1,2} = \frac{-2+\sqrt{3} \pm \left(2+\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = -1$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\}$$

Příklad 25

Řešte v R rovnici: $\sqrt{3}tg^2x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$

Podmínky: $\cos x \neq 0 \Rightarrow (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{3}tg^2x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3}y^2 - 4y + \sqrt{3} = 0$$

$$D = 16 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 16 - 12 = 4$$

$$\sqrt{D} = 2$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2\sqrt{3}}$$

$$y_1 = \frac{6}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{2}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tgx = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$x \in \left\{x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$$

Příklad 26

Řešte v R rovnici: $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}+\cos x}=1$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{2}+\cos x}=1$$
$$\sin x=\sqrt{2}+\cos x$$
$$\sin^2 x=2+2\sqrt{2}\cos x+\cos^2 x$$
$$1-\cos^2 x=2+2\sqrt{2}\cos x+\cos^2 x$$
$$2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos x+1=0$$
$$2y^2+2\sqrt{2}+1=0$$
$$D=8-4\cdot 2\cdot 1=8-8=0$$
$$y=-\frac{2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$$
$$x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi$$

Zkouška:

$$L\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sin\frac{3}{4}\pi}{\sqrt{2}+\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1 \qquad P\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1$$

$$L\left(\frac{3}{4}\pi\right)=P\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$L\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\sin\frac{5}{4}\pi}{\sqrt{2}+\cos\frac{5}{4}\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1 \qquad P\left(\frac{5}{4}\pi\right)=1$$

$$L\left(\frac{5}{4}\pi\right)\neq P\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

Závěr: Hodnota $x=\dfrac{5}{4}\pi$ nevyhovuje rovnici, řešením je pouze $x=\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

Příklad 27

Řešte v R rovnici: $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

$$
\begin{aligned}
2\sin^2 x - 5\cos x + 1 &= 0 \\
2\left(1-\cos^2 x\right) - 5\cos x + 1 &= 0 \\
2 - 2\cos^2 x - 5\cos x + 1 &= 0 \\
-2\cos^2 x - 5\cos x + 3 &= 0 \\
2\cos^2 x + 5\cos x - 3 &= 0 \\
2y^2 + 5y - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$D = 25 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 25 + 24 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$y_2 = -3 \Rightarrow \cos x = -3 \Rightarrow nelze$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\}$$

Příklad 28

Řešte v R rovnici: $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x = 1$

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x &= 1\\
1-\sin^2 x + 3\cdot\sin^2 x + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x &= 1\\
2\cdot\sin^2 x + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x &= 0\\
\sin^2 x + \sqrt{3}\cdot\sin x\cdot\cos x &= 0\\
\sin x\cdot\left(\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x\right) &= 0
\end{aligned}$$

$\sin x = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{k}\cdot\pi$

$$\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x = 0$$

$$1 + \sqrt{3}\cdot\cot gx = 0$$

$$\cot gx = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$$

$$x \in \left\{k\pi, \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}$$

Příklad 29

Řešte v R rovnici: $2 \cdot \sin x = \sqrt{3} \cdot tgx$

Podmínky: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$

$$2 \cdot \sin x = \sqrt{3} \cdot tgx$$

$$2 \cdot \sin x = \sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot \left(2 \cdot \cos x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x \in \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 30

Řešte v R rovnici: $2 \cdot \sin x \cdot \cot gx + 1 = \cos(-x)$

Podmínky: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cot gx + 1 = \cos(-x)$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = \cos x$$

$$2 \cdot \cos x + 1 - \cos x = 0$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \Rightarrow K = \emptyset$$

$$x \in \emptyset$$

Příklad 30

Řešte v R rovnici: $\sin x + \cos 2x = 1$

$$\sin x + \cos 2x = 1$$
$$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1$$
$$\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1$$
$$-2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$
$$\sin x \cdot (2 \cdot \sin x - 1) = 0$$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi$

$x \in \left\{ k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}$

Příklad 31

Řešte v R rovnici: $tg^2x-1-\frac{tgx}{\cos x}=0$

Podmínky: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$

$$tg^2x-1-\frac{tgx}{\cos x}=0$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1-\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{1}}=0$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1-\frac{\sin x}{\cos^2 x}=0$$
$$\sin^2 x-\cos^2 x-\sin x=0$$
$$\sin^2 x-(1-\sin^2 x)-\sin x=0$$
$$\sin^2 x-1+\sin^2 x-\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sin x-1=0$$
$$2y^2-y-1=0$$
$$D=1-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$$

$$y_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}\Rightarrow y_1=1 \vee y_2=-\frac{1}{2}$$

$$\sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow nelze$$

$$\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \vee x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi$$

$$x\in\left\{\frac{7}{6}\pi+2k\pi, \frac{11}{6}\pi+2k\pi\right\}$$

Příklad 32

Řešte v R rovnici: $\sin^2 x\cdot(tg+1)=3\cdot\sin x\cdot(\cos x-\sin x)+3$

Podmínky: $\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$

$$\sin^2 x\cdot(tg+1)=3\cdot\sin x\cdot(\cos x-\sin x)+3$$

$$\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)=3\cdot\sin x\cdot\cos x-3\sin x^2x+3$$

$$\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)=3\cdot\sin x\cdot\cos x+3\cdot(1-\sin^2 x)$$

$$\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)=3\cdot\sin x\cdot\cos x+3\cdot\cos^2 x$$

$$\sin^2 x\cdot\left(\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)=3\cdot\cos x\cdot(\sin x+\cos x)$$

$$\sin x+\cos x=0$$

$$\sin x=-\cos x$$

$$tgx=-1\Rightarrow x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$$

Pro $\sin x+\cos x\neq 0$ platí:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x}=3\cdot\cos x$$

$$tg^2x=3\Rightarrow|tgx|=\sqrt{3}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$x\in\left\{\frac{3}{4}\pi+k\pi,\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}$$

Příklad 33

Řešte v R rovnici: $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\cdot\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \cos^2 x - \cos^2 x\right)\cdot\left(1 - \cos^2 x + \cos^2 x\right) = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\left|\cos x\right| = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee \frac{2}{3}\pi + k\pi$$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi,\ \frac{2}{3}\pi + k\pi\right\}$$

Příklad 34

Řešte v *R* rovnici: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{3}$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{3}$$

$$\sin^4 x + \cos^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\sin^4 x + \left(1 - \sin^2 x\right) \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) = \frac{1}{3}$$

$$\sin^4 x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x = \frac{1}{3}$$

$$2\sin 4x - 2\sin^2 x + 1 - \frac{1}{3} = 0$$

$$6\sin^4 x - 6\sin^2 x + 2 = 0$$

$$3\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0$$

$$3y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 9 - 12 = -3$$

Protože $D < 0$, rovnice nemá v oboru reálných čícel řešení, tj. $K \in \emptyset$

$x \in \emptyset$

Příklad 35

Řešte v R rovnici: $1+\sin x = 2\cos^2 x$

$$1+\sin x = 2\cos^2 x$$
$$1+\sin x = 2\cdot\left(1-\sin^2 x\right)$$
$$1+\sin x = 2-2\sin^2 x$$
$$2\sin^2 x+\sin x-1=0$$
$$2y^2+y-1=0$$
$$D=1-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9$$
$$\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$$

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$$
$$y_1=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$$
$$y_2=-1\Rightarrow \sin x=-1\Rightarrow x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$$
$$x\in\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5}{6}\pi+2k\pi, \frac{3}{2}\pi+2k\pi\right\}$$

Příklad 36

Řešte v R rovnici: $\dfrac{\sin^2 x}{tgx} + \cos^2 x \cdot tgx = \dfrac{1}{2}$

Podmínky: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \wedge \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$

$$\frac{\sin^2 x}{tgx} + \cos^2 x \cdot tgx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\frac{\sin^2 x}{1}}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5}{12}\pi + k\pi \right\}$$

Příklad 37

Řešte v R rovnici: $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}\sin x$

Podmínky: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \wedge \cos 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{(2k+1)\pi}{4}$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}\sin x$$

$$\cos x = \frac{1}{2\sin x} - \sin x$$

$$\cos x = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\sin x}$$

$$2\sin x \cdot \cos x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$$

$$2\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$$

$$tg 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right\}$$

Příklad 38

Řešte v R rovnici: $\cos 4x = -2\cos^2 x$

$$\cos 4x = -2\cos^2 x$$

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = -2\cos^2 x$$

$$8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1 = 0$$

Substituce $\cos^2 \mathrm{x} = \mathrm{y}$

$$8\mathrm{y}^2 - 6\mathrm{y} + 1 = 0$$

$$\mathrm{D} = 36 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 36 - 32 = 4$$

$$\sqrt{\mathrm{D}} = \sqrt{4} = 2$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{16} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \vee y_2 = \frac{1}{4}$$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$	$\cos^2 x = \frac{1}{4}$
$\lvert\cos x\rvert = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\lvert\cos x\rvert = \frac{1}{2}$
$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = \pm\frac{1}{2}$
$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$	$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$	$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$
$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$	$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$
$x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$	$x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

Závěr: Řešení pro $y_1 = \frac{1}{2}$ lze souhrnně zapsat $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, pro y_2 je

$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \mathrm{x} = \frac{2}{3}\pi + k\pi$.

Příklad 39

Řešte v R rovnici: $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)$

$$1+\sin x+\cos x=2\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)$$

$$1+\sin x+\cos x=2\cdot\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos 45^\circ+\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 45^\circ\right)$$

$$1+\sin x+\cos x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$1+\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$1+2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)-\sqrt{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)=0$$

a)

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{2} \qquad /\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow\cos\frac{x}{2}\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{\pi}{2}(2k+1)$$

$$tg\frac{x}{2}=-1$$

$$\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\pi+k\pi$$

$$x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$$

b)

$$2 \cdot \cos\frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$2\cos\frac{x}{2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$$

$$x \in \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 4k\pi\right\}$$

Příklad 40

Řešte v R rovnici: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$$

$$\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6} + \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos x = 1 + \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right)$$

$$\cos x = 1 + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$

$$2 \cdot \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2}(2k + 1), \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 41

Určete hodnoty goniometrických funkcí (bez použití kalkulačky)

a) $\cos\frac{109}{6}\pi$

b) $tg\left(-\frac{109}{6}\pi\right)$

a) $\cos\frac{109}{6}\pi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $tg\left(-\frac{109}{6}\pi\right) = -tg\frac{109}{6}\pi = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Příklad 42

Určete hodnotu výrazu: $\dfrac{\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)\cdot tg\frac{9}{4}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi\cdot\cot g(-300°)}$

$$\frac{\sin\left(-\frac{17}{3}\pi\right)\cdot tg\frac{9}{4}\pi}{\cos\frac{7}{6}\pi\cdot\cot g(-300°)} = \frac{-\sin\frac{17}{3}\pi\cdot tg\frac{9}{4}\pi}{-\cos\frac{7}{6}\pi\cdot\cot g\frac{5}{3}\pi} = \frac{\sin\left(2\cdot 2\pi+\frac{5}{3}\pi\right)\cdot tg\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{7}{6}\pi\cdot\cot g\left(\pi+\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{\sin 300°\cdot tg45°}{\cos 210°\cdot\cot g120°} =$$

$$= \frac{-\sin 60°\cdot tg45°}{-\cos 30°\cdot(-\cot g60°)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

Příklad 43

Řeš v R rovnici: $2\sin x = \sqrt{3} \cdot tgx$

Podmínky: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$

$$2\sin x = \sqrt{3} \cdot tgx$$

$$2\sin x = \sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\sin x \cdot \left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$x \in \left\{k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 44

Řešte v R rovnici: $\sqrt{3}\cdot\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$

$$\sqrt{3}\cdot\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$$
$$\sqrt{3}\sin 2x+2\sin 7x\cdot\sin 2x=0$$
$$\sin 2x\cdot\left(\sqrt{3}+2\sin 7x\right)=0$$

$$\sin 2x=0$$
$$2x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

$$\sin 7x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$7x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\Rightarrow x=\frac{4}{21}\pi+\frac{2}{7}k\pi$$
$$7x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi\Rightarrow x=\frac{5}{21}\pi+\frac{2}{7}k\pi$$
$$x\in\left\{\frac{k\pi}{2},\frac{4}{21}\pi+\frac{2}{7}k\pi,\frac{5}{21}\pi+\frac{2}{7}k\pi\right\}$$

Příklad 45

Řešte v R rovnici: $\cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$

$$\cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\cos x - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2 = 0$$

$$\cos x - 2 \cdot \left|\frac{1-\cos x}{2}\right| = 0$$

$$\cos x - 2 \cdot \frac{|1-\cos x|}{2} = 0$$

$$\cos x - |1-\cos x| = 0$$

a)

$$1-\cos x \geq 0 \Rightarrow |1-\cos x| = 1-\cos x$$

$$\cos x \leq 1 \quad \text{platí vždy}$$

$$\cos x\text{-}(1\text{-}\cos x) = 0$$

$$\cos x - 1 + \cos x = 0$$

$$2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

b)

$$1-\cos x < 0$$

$$\cos x > 1 \quad \text{neplatí nikdy}$$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 46

Řešte v R rovnici: $\sin x + \sin 2x = tgx$

Podmínky: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$

$$\sin x + \sin 2x = tgx$$

$$\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x + 2\sin x \cdot \cos^2 x = \sin x$$

$$2\sin x \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x \cdot \left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$t_{1.2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \vee t_2 = -1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$$

$$x \in \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 47

Řešte v R rovnici: $\cos 3x + \sin 3x = 0$

$$\cos 3x + \sin 3x = 0 \qquad \text{substituce } 3x = t$$

$$\cos t + \sin t = 0 \qquad /(\ )^2$$

$$\cos^2 t + 2\sin t \cdot \cos t + \sin^2 t = 0$$

$$\cos^2 t + 2\sin t \cdot \cos t + 1 - \cos^2 t = 0$$

$$2\sin t \cdot \cos t = -1$$

$$\sin 2t = -1$$

$$2t = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

$$t = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

$$3x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

Příklad 48

Řešte v R rovnici: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$
$$\sin 3x + \sin x + \sin 2x = 0$$
$$2\sin\frac{3x+x}{2}\cdot\cos\frac{3x-x}{2} + \sin 2x = 0$$
$$2\sin 2x\cdot\cos x + \sin 2x = 0$$
$$\sin 2x\cdot\left(2\cos x + 1\right) = 0$$

$$\sin 2x = 0$$
$$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$2\cos x + 1 = 0$$
$$2\cos x = -1$$
$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$
$$x \in \left\{\frac{k\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right\}$$

Příklad 49

Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:

$a = 11{,}6dm,\ c = 9dm,\ \alpha = 65°30'$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\gamma = 0{,}7060$$

$$\gamma = 44°54'$$

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 69°36'$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$b = 11{,}9dm$$

Výsledkem je $\beta = 69°36',\ \gamma = 44°54',\ b = 11{,}9dm.$

Příklad 50

Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, je-li dáno:

$a = 51{,}32mm,\ c = 34{,}76mm,\ \beta = 126°12'$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$b^2 = 2633{,}74 + 1208{,}26 + 2107{,}14$$
$$b^2 = 5949{,}14$$
$$b = 77{,}13$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$$
$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$$
$$\sin\gamma = \frac{34{,}76 \cdot 0{,}8070}{77{,}13}$$
$$\sin\gamma = 0{,}3637$$
$$\gamma = 21°20'$$

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$\alpha = 32°28'$$

Výsledkem je $\alpha = 32°28',\ \gamma = 21°20',\ b = 77{,}13mm.$