MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHEQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire : 2010/11
Session de mai 2011

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures

Le sujet de 6 pages est constitué de cinq exercices indépendants.
Les cinq exercices sont obligatoires.

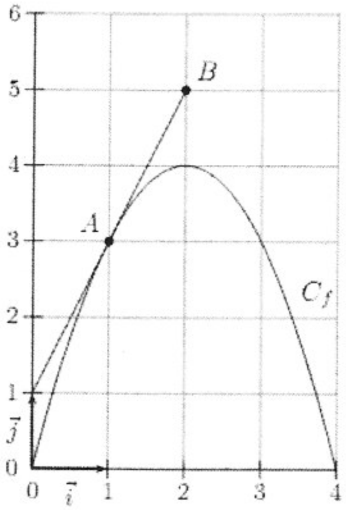
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n°1
(sur 3 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur *[0 ; 4]* dont la courbe représentative C_f est donnée sur le graphique ci-dessous :



On admet que :

- $f(0) = 0$ et $f(4) = 0$;
- La courbe C_f passe par le point $A(1; 3)$;
- Et la tangente de C_f en ce point A passe par le point $B(2; 5)$.

Pour chacune des affirmations suivantes, vous devez indiquer si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant votre réponse.

Le candidat respectera l'ordre des questions et indiquera clairement le numéro de l'affirmation à laquelle il se réfère.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 :	Pour tout x dans $[0; 4]$, on a $f'(x) \geq 0$.
Affirmation 2 :	$f'(1) = 2$.
Affirmation 3 :	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{f(x)} = -\infty$
Affirmation 4 :	On note g la fonction définie sur $]0 ; 4[$ par $g(x) = \ln(f(x))$. On peut dire que la courbe représentative de g admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$.
Affirmation 5 :	On note h la fonction définie sur $]0 ; 4[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. On a $h'(1) = \dfrac{1}{2}$.
Affirmation 6 :	On note F une primitive de f sur $[0 ; 4]$. On peut dire que F est croissante sur $[0 ; 4]$.

Exercice n°2
(sur 4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm.
On fera une figure que l'on complètera tout au long de cet exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 3+5i$, $b = -4+2i$ et $c = 1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M′ d'affixe z' défini par : $\boxed{z' = (2-2i)z+1}$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

2. a) Déterminer l'affixe du point B′, image de B par f .

   b) Montrer que les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x+iy$ où on suppose que x et y sont des entiers.
   Soit M′, l'image de M par f et d'affixe z'.

   Ne placez pas des points M et M' sur la figure. Attendez la question 4.

   a) Calculer z' en fonction de x et de y.
   b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si :

   $$\boxed{x+3y=2}$$

4. On choisit x = -1 et y = 1.

   Placer les points M et M' sur la figure.

   Vérifier graphiquement l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$.

Exercice n°3
(sur 6 points)

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=\frac{3}{8}x+5$.

On considère aussi une suite numérique (u_n), définie par: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Dans un repère orthonormal direct $(0;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique $1\ cm$, tracer la droite (d) d'équation $y=x$ et la courbe représentative (C) de la fonction f.
Faire ces tracés uniquement pour x et y tels que : $0 \le x \le 15$ **et pour** $0 \le y \le 15$.

b) Utiliser (d) et (C) pour la représentation graphique des termes u_1, u_2, u_3 de la suite (u_n).

c) D'après le graphique, faire l'hypothèse sur la monotonie et la convergence de la suite (u_n).

d) La suite (u_n) est-elle bornée? **Justifier la réponse.**

2. Prouver que la suite (u_n) est:

a) croissante. **Utiliser la récurrence.**

b) majorée par 8. **Utiliser la récurrence.**

c) convergente.

3. Déterminer la limite de cette suite (u_n).

4. On considère maintenant une autre suite numérique (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par:
$v_n = u_n - 8$

a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique et déterminer en même temps son premier terme v_0 et sa raison q.

b) Exprimer (v_n), puis (u_n) en fonction de n.

c) Calculer la somme S des 10 premiers termes de la suite (v_n) et la somme S_1 des 10 premiers termes de la suite (u_n).

Exercice n°4
(sur 3,5 points)

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal direct $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On note I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3};1;1\right)$.

1. Refaire ce cube en prenant 3 cm comme unité graphique et placer le point I.
2. Le plan (ACI) coupe la droite (EH) en J.

   Démontrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
3. On note R le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

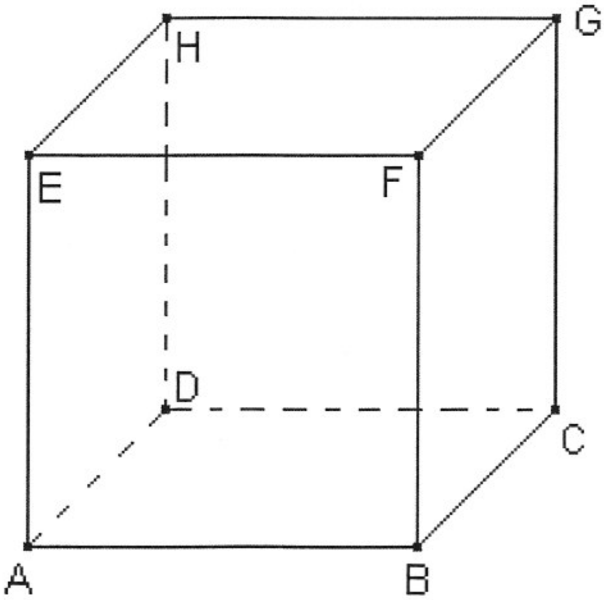
   a) Justifier que les deux conditions suivantes sont vérifiées:

   - Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AC}$. (1)
   - $\overrightarrow{RI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. (2)

   b) Vérifier que les coordonnées (x_R, y_R, z_R) du point R sont $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};0\right)$.

   c) En déduire que la distance RI vaut: $RI = \frac{\sqrt{11}}{3}$ unités graphiques.
4. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(3;-3;2)$ est un vecteur normal du plan (ACI).

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ACI).
5. Démontrer que la distance du point F au plan (ACI) vaut: $\frac{5}{\sqrt{22}}$ unités graphiques.



Exercice n°5
(sur 3,5 points)

Dans le stand d'une foire qui dure 5 jours, une publicité annonce : " Un billet sur deux est gagnant ici, achetez deux billets ! "

Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant.

Xavier est toujours le premier à arriver à ce stand au début de la journée et, donc, toujours le premier à y acheter deux billets.

Toutes les probabilités devront être données sous forme de fractions.

1. Le lundi, cent billets sont mis en vente. Xavier en achète deux.
   a) Calculer la probabilité qu'il n'ait aucun billet gagnant.
   b) En déduire la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.

2. Le mardi, $2n$ billets, où n est un entier naturel non nul, sont mis en vente.

   Xavier achète encore deux billets.

   a) Démontrer que la probabilité p_n qu'il achète au moins un billet gagnant est :
   $p_n = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
   Procéder comme à la question 1. a) et b) pour la démonstration.

   b) Calculer p_1 et expliquer le résultat obtenu.

   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{3}{4} < p_n \leq 1$

3. Les trois derniers jours de la foire, $2n$ billets, où n est un entier naturel non nul, sont encore mis en vente tous les jours.

   Pendant ces 3 jours, Xavier revient, tous les jours, acheter deux billets.

   a) Quelle est la probabilité q_n qu'il obtienne, au cours de ces 3 jours, au moins un billet gagnant ?

   b) Montrer alors que la limite de la suite (q_n) vaut : $\dfrac{63}{64}$.